G. STEPHENSON
Imperial College, University of London

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΔΙΑ
ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
Θ. ΚΑΚΟΥΛΛΟΥ Ph. D. ΚΑΙ Β. ΚΑΛΟΜΟΙΡΗ M. S.

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Θ. ΚΑΚΟΥΛΛΟΥ
Τακτικοῦ Καθηγητοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΤΕΥΧΟΣ 2

ΑΘΗΝΑΙ 1974

FIRST PUBLISHED 1961
EIGHT IMPRESSION 1971
SECOND EDITION 1973

This edition of
Mathematical Methods for Science Students
is published by arrangement with
LONGMAN GROUP LIMITED, LONDON

Ὑπεύθυνος Ἑλληνικῆς Ἐκδόσεως:
Θ. Κάκουλλος, Πανεπιστημιόπολις, Ἀθῆναι (621)

FOTO OFFSET
ΛΕΟΥΣΗΣ - ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΑ: ΝΟΤΑΡΑ 39 - ΑΘΗΝΑΙ - ΤΗΛ. 88.26.862
ΕΡΓΟΣΤ.: ΔΗΜΗΤΡΟΣ & ΕΡΑΤΟΥΣ - ΤΑΥΡΟΣ - ΤΗΛ. 353.460

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό παρόν Τεῦχος 2 συμπληροῖ τήν ἔκδοσιν εἰς τήν Ἑλληνικήν τοῦ ὑπό τόν τίτλον "Mathematical Methods for Science Students" ἐπιτόμου συγγράμματος τοῦ Καθηγητοῦ G. Stephenson τοῦ Imperial College.

Ἡ κατόπιν ἀνακατατάξεως τῶν 27 κεφαλαίων τοῦ ἀγγλικοῦ κειμένου ἔκδοσις τούτου εἰς δύο Τεύχη ἀποβλέπει εἰς τήν πλήρωσιν τρεχουσῶν διδακτικῶν ἀναγκῶν εἰς Ἀνώτατα Ἐκπαιδευτικά Ἱδρύματα, ὅπου εἰς ἕν πρῶτον ἐτήσιον μάθημα Γενικῶν Μαθηματικῶν διδάσκονται, κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον, τά περιεχόμενα τοῦ Τεύχους 1. Εἰς τό ἀνά χεῖρας Τεῦχος 2 ἐξετάζονται πλέον προκεχωρημένα, ἀλλ' οὐδόλως ὀλιγώτερον χρήσιμα, θέματα : Διαφορικαί Ἐξισώσεις (Συνήθεις καί μέ Μερικάς Παραγώγους), Μετασχηματισμοί Laplace, Σειραί Fourier, Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα καί στοιχεῖα Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν, Διαφοροεξισώσεων καί Ὁλοκληρωτικῶν Ἐξισώσεων. Περιλαμβάνονται ἐπίσης εἰσαγωγικά κεφάλαια ἀφορῶντα τήν Ἀριθμητικήν Ὁλοκλήρωσιν καί Ἐλλειπτικά Ὁλοκληρώματα.

Δέον νά τονισθῇ ὅτι τό παρόν Τεῦχος 2 εἶναι κατά τό πλεῖστον αὐτοτελές, αἱ δέ ἀραιαί ἀναφοραί καί παραπομπαί εἰς τό Τεῦχος 1 (Κεφ. 1 - 14) οὐδόλως δυσκολεύουν τόν σπουδαστήν εἰς τήν κατανόησιν καί ἐφαρμογήν τῶν ἀναπτυσσομένων μαθηματικῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι, ἄλλωστε, πάντοτε συνοδεύονται ὑπό ἐκλεκτῶν παραδειγμάτων.

Εὐχαριστῶ τούς παρά τῇ Ἕδρᾳ μου βοηθούς δ. Μαργ. Ἀντωνάκη καί κ.κ. Χαρ. Δαμιανοῦ καί Χρ. Σπυρόπουλον διά τήν βοήθειάν των εἰς τήν διεκπεραίωσιν τῶν πρός ἐκτύπωσιν τελικῶν δοκιμίων καί τήν σύνταξιν τῶν Εὑρετηρίων.

Ἀθῆναι
Ἰανουάριος 1974

Θεόφιλος Κάκουλλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

15.1. Παραγώγισις ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων

Εἰς τό παρόν ἐξετάζομεν ὁλοκληρώματα τῶν ὁποίων αἱ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεις εἶναι συγχρόνως συναρτήσεις τοῦ x καί μιᾶς μεταβλητῆς παραμέτρου α. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f(x,α) εἶναι ὁλοκληρώσιμος συνάρτησις τοῦ x· τότε ἐάν

$$\int f(x,\alpha)\,dx = F(x,\alpha) \tag{1}$$

ἐξ ὁρισμοῦ (ἰδέ Κεφ. 4, § 4.1) ἔχομεν

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x} = f(x,\alpha). \tag{2}$$

Συνεπῶς, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ f(x,α) ἱκανοποιεῖ τήν

$$\frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial x\,\partial\alpha} = \frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial\alpha\,\partial x}, \tag{3}$$

ἔπεται ὅτι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}. \tag{4}$$

Ὅθεν, δι'ὁλοκληρώσεως τῆς (4), εὑρίσκομεν

$$\int\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx = \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial\alpha}, \tag{5}$$

ἡ ὁποία ἰσχύει ὅταν ἡ $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ εἶναι συνεχής ὡς πρός x καί α. Ὁ τύπος αὐτός χρησιμοποιεῖται διά τόν ὑπολογισμόν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων ἀπό γνωστά ὁλοκληρώματα ὡς θά ἴδωμεν εἰς τά κατωτέρω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Ἐπειδή

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}, \tag{6}$$

θά ἔχωμεν χρησιμοποιοῦντες τήν (5)

$$\int xe^{\alpha x}\,dx = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right) = \left(\frac{x}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}. \tag{7}$$

Ὁμοίως παραγωγίζοντες τήν (7) ὑπό τό ὁλοκλήρωμα ὡς πρός α, εὑρίσκομεν

$$\int x^2e^{\alpha x}\,dx = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}\right\} = \left(\frac{x^2}{\alpha}-\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}\right)e^{\alpha x}. \tag{8}$$

Τά ἀποτελέσματα αὐτά ἐπαληθεύονται ἀπ'εὐθείας δι'ὁλοκληρώσεως κατά μέρη.

Παράδειγμα 2. Ἀπό τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (|x|<a) \tag{9}$$

ἔχομεν, παραγωγίζοντες ὡς πρός α,

$$-\int \frac{2a}{(a^2-x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{a^2}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{a(a^2-x^2)}, \tag{10}$$

ἡ ὁποία δίδει

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)}. \tag{11}$$

15.2. Παραγώγισις Ὡρισμένων Ὁλοκληρωμάτων

Ὁμοίως,ὡς εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον,δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν ὡρισμένα ὁλοκληρώματα. Ὑποθέσωμεν ὅτι

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{12}$$

ὅπου $f(x,\alpha)$ εἶναι μία ὁλοκληρώσιμος συνάρτησις τοῦ x εἰς τήν περιοχήν $a < x < b$, ὅπου τά a καί b εἶναι συνεχεῖς καί τοὐλάχιστον μίαν φοράν παραγωγίσιμοι συναρτήσεις τοῦ α. Χρησιμοποιοῦντες τόν τελευταῖον συμβολισμόν

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=F(b,\alpha)-F(a,\alpha) \tag{13}$$

καί ἀπό τήν (5)

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx=\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha}-\frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha}. \tag{14}$$

Παραγωγίζοντες τήν (13) ὡς πρός α, ἔχομεν

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}+\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha}-\frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}-\frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha} \tag{15}$$

ἡ ὁποία, κατόπιν χρησιμοποιήσεως τῶν (2) καί (14), γίνεται

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}+\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx. \tag{16}$$

Ἐάν τά ὅρια ὁλοκληρώσεως δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τό α, τότε

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right\}=\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx. \tag{17}$$

Τά ἀνωτέρω προϋποθέτουν φυσικά ὅτι ἡ $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ ὑπάρχει.Πράγματι,δέν ὑπάρχει δυσκολία ἐφ'ὅσον αἱ συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς καί ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους τῆς ἀπαιτουμένης τάξεως. Δυσκολίαι (συνδεό - μεναι μέ τήν σύγκλισιν τῶν ὁλοκληρωμάτων) δύνανται νά ἐμφανισθοῦν ἐν τούτοις, ἐάν τό a ἤ b (ἤ καί ἀμφότεραι) εἶναι ἄπειρον, ἀλλά δέν θά ἀσχοληθῶμεν μέ τάς περιπτώσεις αὐτάς.

Παρά ταῦτα ὅπου νοεῖται ἄπειρος περιοχή ὁλοκληρώσεως εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα δύναται νά ὑποτεθῇ ὅτι αἱ (16) καί (17) εἶναι ἐφαρμόσιμοι.

Παράδειγμα 3. Ἐάν

$$I(\alpha)=\int_1^{e^\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \tag{18}$$

τότε ἀπό τήν (16)

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=e^\alpha\left(\frac{\sin(\alpha e^\alpha)}{e^\alpha}\right)+\int_1^{e^\alpha}\cos \alpha x\,dx \tag{19}$$

$$= \sin(\alpha e^{\alpha}) + \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right)_1^{e^{\alpha}} \tag{20}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin(\alpha e^{\alpha}) - \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{21}$$

Παράδειγμα 4. Ἐπειδή

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}, \quad (\alpha > 0), \tag{22}$$

εὑρίσκομεν, παραγωγίζοντες n φοράς ὡς πρός α,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}\, dx = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}, \quad (n \geqq 0). \tag{23}$$

Παράδειγμα 5. Σημαντικόν ἀποτέλεσμα τό ὁποῖον θά δείξωμεν εἰς τό Κεφ. 17 τῇ βοηθείᾳ διπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἶναι τό

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{24}$$

Δεχόμενοι τό ὁλοκλήρωμα αὐτό ἐπί τοῦ παρόντος εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

ὅπου α εἶναι θετική παράμετρος. Κατά συνέπειαν παραγωγίζοντες τήν (25) n φοράς ὡς πρός α δυνάμει τῆς (17) λαμβάνομεν τά ὁλοκληρώματα

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2\, dx} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\,\alpha^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{26}$$

ὅπου $n \geq 1$.

Σημειοῦμεν ὅτι ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\, dx \tag{27}$$

δύνανται νά ὑπολογισθοῦν δι'ἀντικαταστάσεως $x^2 = u$ καί ἐν συνεχείᾳ ὁλοκληρώσεως κατά μέρη. Ἐπί παραδείγματι, κατ'αὐτόν τόν τρόπον

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}\,dx \text{ γίνεται } \frac{1}{2}\int_0^\infty u e^{-\alpha u}\,du, \tag{28}$$

ἡ ὁποία εἶναι κατ'εὐθεῖαν ὁλοκληρώσιμος. Δέν ὑπάρχει ὅμως ἁπλός τρόπος εὑρέσεως τῆς (26).

Παράδειγμα 6. Ἐάν

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx, \quad (\alpha \geqq 0), \tag{29}$$

τότε

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx. \tag{30}$$

Ὅθεν ὁλοκληρώνοντες κατά μέρη εὑρίσκομεν

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{1+\alpha^2} \tag{31}$$

ἤ

$$I(\alpha) = A - \tan^{-1}\alpha, \tag{32}$$

ὅπου A εἶναι ἡ σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως.

Τώρα καθώς $\alpha \to \infty$, τό $I \to 0$· ὅθεν $A = \frac{\pi}{2}$ καί συνεπῶς

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\alpha = \cot^{-1}\alpha. \tag{33}$$

Θέτοντες $\alpha = 0$ εἰς τήν (33) λαμβάνομεν τό σπουδαῖον ἀποτέλεσμα

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \tag{34}$$

τό ὁποῖον εἶχε ἀναφερθῆ εἰς τό Κεφ. 4, Παράδειγμα 18.

15.3. Ὁλοκλήρωσις Ὡρισμένου Ὁλοκληρώματος

Ἐάν ἡ $f(x,\alpha)$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις ὡς πρός x καί α εἰς τήν περιοχήν $a \leqq x \leqq b$, $\varepsilon \leqq \alpha \leqq \eta$ ὅπου a, b, ε, η εἶναι σταθεραί καί ἐάν

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{35}$$

τότε

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} I(\alpha)\, d\alpha = \int_{\varepsilon}^{\eta}\left\{\int_{a}^{b} f(x, \alpha)\, dx\right\} d\alpha. \tag{36}$$

Ἐπί πλέον ὑποθέτοντες ὅτι τά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι πεπερασμένα ἡ τάξις τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νά ἀντιστραφῆ οὕτως ὥστε

$$\int_{\varepsilon}^{\eta}\left\{\int_{a}^{b} f(x, \alpha)\, dx\right\} d\alpha = \int_{a}^{b}\left\{\int_{\varepsilon}^{\eta} f(x, \alpha)\, d\alpha\right\} dx. \tag{37}$$

Ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει κατά τήν παραγώγισιν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων, ὅταν τά ὅρια τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι ἄπειρον, δυσκολίαι ἀφορῶσαι τήν σύγκλισιν τῶν ὁλοκληρωμάτων δύνανται νά ἐμφανισθοῦν καί ἐνδέχεται ἡ (37) νά μήν ἀληθεύη.

Παράδειγμα 7. Ἔστω τό

$$I(\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{1}{1+\alpha^2}. \tag{38}$$

Τότε

$$\int_{0}^{\eta} I(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{\eta}\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx\right\} d\alpha = \int_{0}^{\eta} \frac{1}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \tan^{-1} \eta. \tag{39}$$

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ τάξις τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νά ἀντιστραφῆ εἰς τήν (39), εὑρίσκομεν

$$\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\eta} e^{-\alpha x} \sin x\, d\alpha\right\} dx = \tan^{-1} \eta, \tag{40}$$

ἤ, ὁλοκληρώνοντες ὡς πρός α,

$$\int_{0}^{\infty}\left\{-\frac{e^{-\eta x} \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x}\right\} dx = \tan^{-1} \eta. \tag{41}$$

Τοῦτο δίδει (ὡς εἰς τό Παράδειγμα 6)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\eta x} \sin x}{x}\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx - \tan^{-1} \eta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \eta = \cot^{-1} \eta \tag{42}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 15

1. Ὑπολογίσατε τάς παραγώγους ὡς πρός x τῶν ἀκολούθων

α) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{y} e^{-xy^2}\, dy,$ β) $\displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{1}{y} \sqrt{(1+xy^3)}\, dy.$ (L.U.)

2. Δείξατε παραγωγίζοντες ὡς πρός α ὅτι

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+\cos\alpha\cos\theta)}{\cos\theta}\,d\theta = \pi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \text{(C.U.)}$$

ὅπου $0 \leqq \alpha \leqq \pi/2$.

3. Ἐάν $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\phi)\,d\phi$, , ἀποδείξατε ὅτι

$$\frac{d^2J_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_0(x)}{dx} + J_0(x) = 0.$$

4. Παραγωγίζοντες τήν ὑπό ὁλοκλήρωσιν παράστασιν ὡς πρός α, δείξατε ὅτι

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2/4}.$$

5. Δείξατε ὅτι

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x} e^{-y}(x-y)^{3/2}\,dy = \frac{3}{2}\int_0^{x} e^{-y}\sqrt{(x-y)}\,dy$$

ὅταν $x > 0$. (L.U.)

6. Δείξατε ὅτι

$$C = \int_0^{x/2\sqrt{(kt)}} e^{-u^2}\,du$$

ἱκανοποιεῖ τήν

$$k\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

7. Δείξατε, ὁλοκληρώνοντες ἕνα ὁλοκλήρωμα καί ὑποθέτοντες ὅτι ἡ σειρά τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νά ἀντιστραφῇ, ὅτι

α) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\sinh bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$, ὅταν $|b| < 1$,

β) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a})$,

γ) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^b-x^a}{\log_e x}\,dx = \log_e\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16.

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

16.1. Ὁρισμοί

Ὅπως ἀνεφέρθη εἰς τό Κεφ. 4, § 4.5, ὁ ἀριθμός τῶν ὁλοκληρωμάτων τά ὁποῖα δύνανται νά ὑπολογισθοῦν ἀναλυτικῶς τῇ βοηθείᾳ βασικῶν συναρτήσεων (sin x, cos x, e^x, κ.λ.π.) εἶναι μικρός καί κατά πᾶσαν πιθανότητα ὅταν ἀντιμετωπίζωμεν ὁλοκληρώματα τά ὁποῖα δέν εἶναι συνήθους μορφῆς πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν προσεγγιστικάς ἀριθμητικάς μεθόδους,ὡς εἶναι ἡ τοῦ Simpson. Πάντως, δι'ἐπινοήσεως νέων συναρτήσεων ἡ κλάσις τῶν συναρτήσεων αἵτινες δύνανται νά ὁλοκληρωθοῦν ἀναλυτικῶς διευρύνεται. Ἐπί παραδείγματι, τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(2-x^2)]}} \tag{1}$$

δύναται νά ὁλοκληρωθῇ μόνον τῇ βοηθείᾳ ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων . Ὁμοίως, κάθε ὁλοκλήρωμα τοῦ ὁποίου ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις εἶναι ρητή συνάρτησις τοῦ x καί $\sqrt{P(x)}$, ὅπου P(x) εἶναι πολυώνυμον ὡς πρός x βαθμοῦ 3 ἤ 4, λέγεται ὅτι εἶναι ἐλλειπτικῆς μορφῆς καί δέν δύναται νά ὁλοκληρωθῇ συναρτήσει βασικῶν συναρτήσεων ὡς συμβαίνει ὅταν τό P(x) εἶναι βαθμοῦ 2 ἤ κατωτέρου.

Κατωτέρω ὁρίζομεν δύο βασικούς τύπους ἐλλειπτικῶν ὁλοκληρωμάτων

α) $1^{ος}$ τύπος

$$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}},\tag{2}$$

ὅπου $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$, καί $0 < k < 1$.

β) $2^{ος}$ τύπος

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}\,d\theta,\tag{3}$$

ὅπου $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$, καί $0 < k < 1$.

Εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις τά ὁλοκληρώματα καλοῦνται πλήρη ἐάν $\phi = \pi/2$, καί τά $F(k,\pi/2)$, $E(k,\pi/2)$, συμβολίζονται ὑπό τῶν $K(k)$ καί $E(k)$, ἀντιστοίχως.

Διαφορετικαί μορφαί τῶν (2) καί (3) εὑρέως χρησιμοποιούμεναι εὑρίσκονται δι'ἀντικαταστάσεως $\sin\theta = u$. Τότε

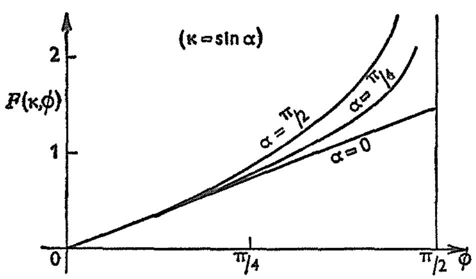
$$*F(k,x)=\int_0^{x}\frac{du}{\sqrt{[(1-u^2)(1-k^2u^2)]}}\tag{4}$$

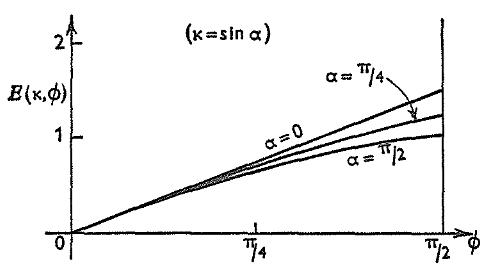
καί

$$*E(k,x)=\int_0^{x}\sqrt{\left(\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}\right)}\,du,\tag{5}$$

ὅπου $0 < k < 1$ καί $0 < x < 1$.

Αἱ τιμαί τῶν συναρτήσεων $F(k,\phi)$, $E(k,\phi)$ δίδονται διά μεγάλον ἀριθμόν τιμῶν τῶν k καί ϕ (ἰδέ, π.χ., Jahnke and Emde , "Tables of Functions", Dover Publications, 1945) καί συνεπῶς ἐάν ἕν ὁλοκλήρωμα δύναται νά τεθῇ ὑπό βασικήν μορφήν ἡ τιμή του ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκεται εὐκόλως. Γραφικαί παραστάσεις τῶν F καί E δι' ὀλίγας τιμάς τοῦ k δίδονται εἰς τό Σχ.16.1.





Σχ. 16.1.

Τώρα θεωροῦμεν τά ἀκόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα

$$I=\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)}},\quad 0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2},\tag{6}$$

γράφομεν τό I ὡς

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{[\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)]}}\tag{7}$$

καί ἐκτελοῦμεν τήν ἀντικατάστασιν $\sin(x/2)=\sin(\alpha/2)\sin\theta$. Τότε, ἐπειδή $\cos(x/2)\,dx=2\sin(\alpha/2)\cos\theta\,d\theta$, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}I=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{[1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2\theta]}}&=\sqrt{2}\,F\left(\sin\frac{\alpha}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sqrt{2}\,K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}\tag{8}$$

Θέτοντες α = π/2 εἰς τάς (6), (8), λαμβάνομεν τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{(\cos x)}}\left(=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{(\sin x)}}\right)=\sqrt{2}\,K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\tag{9}$$

τό ὁποῖον, ἐπειδή $K(1/\sqrt{2})$ = 1,854 (κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ) ἔχει τήν τιμήν 2,62, κατά προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Παράδειγμα 2. Τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/6}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-4\sin^2\theta)}}\tag{10}$$

δύναται νά μετασχηματισθῆ εἰς ἕν πλῆρες ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα τῆς πρώτης μορφῆς θέτοντες $4\sin^2\theta=\sin^2\psi$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-4\sin^2\theta)}}&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\frac{1}{4}\sin^2\psi)}}\\&=\tfrac{1}{2}F(\tfrac{1}{2},\pi/2)=\tfrac{1}{2}K(\tfrac{1}{2})\end{aligned}\tag{11}$$

τό ὁποῖον ἐπειδή K(1/2) = 1,688 ἔχει τήν τιμήν 0,84, ὀρθήν ὡς πρός δύο δεκαδικά ψηφία.

Παράδειγμα 3. Τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{7}{16}\sin^2\theta)}},\tag{12}$$

τό ὁποῖον ἐδείχθη εἰς τό Κεφ. 4, Παράδειγμα 13, ὅτι κεῖται μεταξύ $\frac{\pi\sqrt{2}}{5}$ καί $\frac{\pi}{4}$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου εἴδους, ἤτοι τό $F(\frac{1}{4}\sqrt{7}, \pi/4)$. Ἐκ πινάκων ἡ τιμή του εὑρίσκεται 0,82, ὀρθή ὡς πρός δύο δεκαδικά ψηφία.

Παράδειγμα 4. Τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty \sqrt{\left\{\frac{9+8x^2}{(1+x^2)^3}\right\}}\, dx \tag{13}$$

γίνεται, μετά τήν ἀντικατάστασιν x = tan θ,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left\{\frac{9+8\tan^2\theta}{\sec^6\theta}\right\}}\sec^2\theta\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(8+\cos^2\theta)}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(9-\sin^2\theta)}\, d\theta = 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-\tfrac{1}{9}\sin^2\theta)}\, d\theta \\ &= 3E\left(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = 3\times 1{\cdot}525 \ (=4{\cdot}57 \text{ μέχρι δύο δεκαδικῶν ψηφίων})\end{aligned} \tag{14}$$

16.2. Ἰακωβιαναί Ἐλλειπτικαί Συναρτήσεις

Συμβολίζοντες τό F(k,ϕ) διά u λαμβάνομεν ἐκ τῆς τελευταίας παραγράφου

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\{(1-y^2)(1-k^2y^2)\}}}, \tag{15}$$

ὅπου x = sin ϕ.

Διά δοθεῖσαν τιμήν τοῦ k, ἡ (15) ὁρίζει ϕ (ἤ x) ὡς συνάρτησιν τῆς u. Συνηθίζεται νά καλοῦμεν τό ϕ πλάτος τῆς u καί γράφομεν

$$\phi = \text{am}\, u, \tag{16}$$

ὁρίζομεν δέ τήν πρώτην Ἰακωβιανήν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν sn u διά τῆς

$$x = \sin\phi = \sin(\text{am}\, u) = \text{sn}\, u. \tag{17}$$

Ὁμοίως δύο ἄλλαι Ἰακωβιαναί ἐλλειπτικαί συναρτήσεις cn u καί dn u ὁρίζονται ὑπό τῶν

$$\text{cn}\, u = \sqrt{(1-x^2)} = \sqrt{(1-\text{sn}^2 u)}, \tag{18}$$

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{(1-k^2x^2)} = \sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u)}. \tag{19}$$

'Από τάς (15), (18) καί (19) έπεται ότι

$$\mathrm{sn}\, 0 = 0, \quad \mathrm{cn}\, 0 = 1, \quad \mathrm{dn}\, 0 = 1 \tag{20}$$

καί ότι αί cn u καί dn u είναι άρτιαι συναρτήσεις τοῦ u. Αί παράγωγοι τῶν ἐλλειπτικῶν αὐτῶν συναρτήσεων εὐκόλως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ὁρισμῶν αὐτῶν.

'Επί παραδείγματι

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\, u = \frac{d}{du}\sin\phi = \frac{d}{d\phi}(\sin\phi)\frac{d\phi}{du} = \cos\phi\,\frac{d\phi}{du} = \mathrm{cn}\, u\,\frac{d\phi}{du}. \tag{21}$$

'Επειδή ἀπό τήν (15)

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}, \tag{22}$$

ἔχομεν (διά παραγωγίσεως)

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)}} = \frac{1}{\mathrm{dn}\, u}. \tag{23}$$

"Οθεν

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\, u = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u. \tag{24}$$

'Ομοίως

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}\, u = -\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u \tag{25}$$

καί

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}\, u = -k^2\,\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u. \tag{26}$$

"Αλλαι ἰδιότητες 'Ιακωβιανῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων εἶναι πέραν τῶν σκοπῶν τοῦ παρόντος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 16

1. Δείξατε, χρησιμοποιοῦντες τό γεγονός ὅτι αἱ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεις τῶν F(k,φ) καί E(k,φ) εἶναι περιοδικαί συναρτήσεις περιόδου π, ὅτι

$$F(k, \phi+n\pi) = nF(k, \pi)+F(k, \phi),$$

$$E(k, \phi+n\pi) = nE(k, \pi)+E(k, \phi),$$

ὅπου n = 0, 1, 2,... Ἐξ αὐτῶν δείξατε ὅτι

$$F(k, \phi+n\pi) = 2nK(k)+F(k, \phi),$$

$$E(k, \phi+n\pi) = 2nE(k)+E(k, \phi).$$

2. Ἀποδείξατε τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα

α) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(3-4x^2+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right),$

β) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1+k^2 \sin^2 \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)}} K\left\{\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right\}.$

3. Ἐπαληθεύσατε τάς ἀκολούθους σχέσεις

α) $\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1,$

β) $\mathrm{dn}^2 u+k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1,$

γ) $\displaystyle\frac{d}{du}\left\{\log_e\left(\frac{\mathrm{dn}\, u-\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{sn}\, u}\right)\right\} = \frac{1}{\mathrm{sn}\, u}.$

4. Δείξατε ὅτι οἱ πρῶτοι δύο μή μηδενιζόμενοι ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος κατά Maclaurin τῶν Ἰακωβιανῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων εἶναι

$$\mathrm{sn}\, u = u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+ \dots$$

$$\mathrm{cn}\, u = 1-\frac{u^2}{2!}+ \dots$$

$$\mathrm{dn}\, u = 1-\frac{k^2u^2}{2!}+ \dots .$$

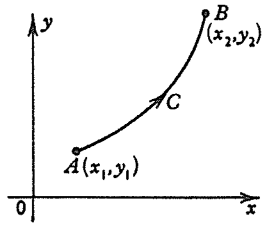
* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

17.1. Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα εἰς τό Ἐπίπεδον

Ἔστω ὅτι ἡ $y = f(x)$ εἶναι μία πραγματική μονότονος συνεχής μονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ x εἰς ἕν διάστημα $x_1 < x < x_2$ ὡς παρίσταται ὑπό τῆς καμπύλης C τοῦ σχήματος 17.1.(τά ἀκραῖα σημεῖα A, B ἔχουν συντεταγμένας (x_1,y_1) καί (x_2,y_2), ἀντιστοίχως). Τότε ἐάν $P(x,y)$ καί $Q(x,y)$ εἶναι δύο πραγματικαί μονοσήμαντοι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x καί y δι'ὅλα τά σημεῖα τῆς C, τά ὁλοκληρώματα



Σχ. 17.1.

$$\int_C P(x,y)\,dx, \quad \int_C Q(x,y)\,dy \tag{1}$$

καί συχνότερα τό ἄθροισμα αὐτῶν

$$\int_C \left\{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right\} \tag{2}$$

καλοῦνται καμπυλόγραμμα ὁλοκληρώματα ἤ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα, ἐφ'ὅσον ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως C εἶναι ἡ καμπύλη $y = f(x)$ ἀπό τό A πρός τό B. Ἐπειδή τό y ἐκφράζεται ὡς συνάρτησις τοῦ x, ἕκαστον τῶν ὁλοκληρωμάτων αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμον πρός σύνηθες ὁλοκλήρωμα ὡς πρός x.

Ἐπί παραδείγματι,

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{x=x_1}^{x=x_2} P(x, f(x))\, dx \tag{3}$$

καί

$$\int_C Q(x, y)\, dy = \int_{x=x_1}^{x=x_2} Q(x, f(x)) f'(x)\, dx, \tag{4}$$

(ἐπειδή dy = f΄(x)dx).

Ἰσοδυνάμως, ἐπειδή ἡ y = f(x) εἶναι μονοσήμαντος, μονότονος καί συνεχής συνάρτησις κατά μῆκος τῆς C, δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τήν x ὡς μία μονοσήμαντον συνεχῆ συνάρτησιν ὡς πρός y κατά μῆκος τῆς C διά τῆς σχέσεως, ἔστω, x = g(y). Τά ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα (1) δύνανται νά ἐκφρασθοῦν ὡς τά κάτωθι συνήθη ὁλοκληρώματα ὡς πρός y :

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{y=y_1}^{y=y_2} P(g(y), y) g'(y)\, dy \tag{5}$$

(ἐπειδή dx = g΄(y)dy) καί

$$\int_C Q(x, y)\, dy = \int_{y=y_1}^{y=y_2} Q(g(y), y)\, dy. \tag{6}$$

Ὁμοίως δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν καί τήν (2).

17.2. Μερικαί Ἰδιότητες καί Παραδείγματα Ἐπικαμπυλίων Ὁλοκληρωμάτων

(α) Τά ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα δύνανται νά ὑπολογισθοῦν ὡς πρός δύο διευθύνσεις ἐπειδή ἡ καμπύλη C δύναται νά διαγραφῆ εἴτε ἀπό τό A πρός τό B εἴτε ἀπό τό B πρός τό A. Παρά ταῦτα, ἕνεκα τῆς ἰσοδυναμίας μετά τῶν συνήθων ὁλοκληρωμάτων ἔχομεν τό ἀποτέλεσμα

$$\int_{A\to B} P(x, y)\, dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} P(x, f(x))\, dx = -\int_{x_2}^{x_1} P(x, f(x))\, dx$$

$$= -\int_{B\to A} P(x, y)\, dx. \tag{7}$$

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι τό πρόσημον τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τῆς μορφῆς (1) (ὡς καί τῆς μορφῆς (2)) ἀλλάζει ὅταν ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως διαγράφεται κατά τήν ἀντίθετον φοράν.

(β) Ἐάν ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἡ C νά εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν y, ἔστω x = k ὅπου k μία σταθερά, τότε

$$\int_C P(x, y)\, dx = 0 \tag{8}$$

ἐπειδή κατά μῆκος τῆς C, dx = 0.

Ὁμοίως, ἐάν ἡ C εἶναι γραμμή παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x, ἔστω y = k, τότε

$$\int_C Q(x, y)\, dy = 0 \tag{9}$$

ἐπειδή κατά μῆκος τῆς C, dy = 0.

(γ) Ἐάν ἡ καμπύλη διαιρῆται εἰς δύο μέρη ὑπό τοῦ σημείου $E(x_3, y_3)$ (ἰδέ Σχ. 17.2), τότε δυνάμει τῆς

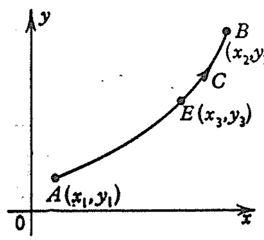
$$\int_{x_1}^{x_2} P(x,f(x))\, dx = \int_{x_1}^{x_3} P(x,f(x))\, dx + \int_{x_3}^{x_2} P(x,f(x))\, dx \tag{10}$$

(ἰδέ Κεφ. 4, 4.2 (β)), ἔχομεν

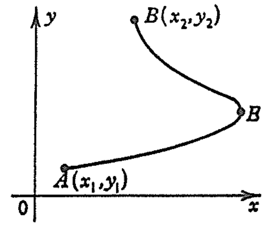
$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{A\to E} P(x, y)\, dx + \int_{E\to B} P(x, y)\, dx. \tag{11}$$

Ὅμοια ἀποτελέσματα ἰσχύουν διά τό $\int_C Q(x, y)\, dy$ καί τόν γραμμικόν συνδυασμόν εἰς τήν (2).

Τά ἀποτελέσματα αὐτά ἐπεκτείνονται καί εἰς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἡ C ὑποδιαιρεῖται εἰς οἱονδήποτε πεπερασμένον ἀριθμόν μερῶν.



Σχ. 17.2.



Σχ. 17.3.

(δ) Ἐάν ἡ καμπύλη C εἶναι τοιαύτη ὥστε διά τινα τιμήν (ἤ τιμάς) τῆς x νά ἔχωμεν δύο διαφορετικάς τιμάς τῆς y (δηλαδή ἡ y δέν εἶναι μονότιμος, ἰδέ Σχ. 17.3), τότε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἀπό τό A εἰς τό B πρέπει νά γραφῇ

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{A\to E} P(x, y_1)\,dx + \int_{E\to B} P(x, y_2)\,dx, \tag{12}$$

ὅπου $y_1 = f_1(x)$ καί $y_2 = f_2(x)$ εἶναι μονότιμοι καί συνεχεῖς συναρτήσεις ὡς πρός x ἀντιπροσωπεύουσαι τά μέρη τῆς καμπύλης AE καί EB, ἀντιστοίχως.

Ὁμοίως δυνάμεθα νά εἴπωμεν καί διά τό $\int_C Q(x, y)\,dy$ ὡς καί διά τόν γραμμικόν συνδυασμόν (2).

Ἐν συνεχείᾳ διευκρινίζομεν τούς ὁρισμούς καί τάς ἰδιότητας τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων μέ τά ἀκόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Ὑπολογίσατε τό $\int_C (x+y)\,dx$ (i) ἀπό A(0,1) μέχρι B(1,0) κατά μῆκος τῆς καμπύλης $C = C_1$ ὁριζομένης ὑπό τῆς $y = 1-x$ (ii), ἀπό O(0,0) μέχρις E(1,1) κατά μῆκος τῆς καμπύλης $C = C_2$ ὁριζομένης ὑπό τῆς $y = x^2$ (ἰδέ Σχ. 17.4).

$$\text{(i)} \int_{C_1} (x+y)\,dx = \int_0^1 (x+1-x)\,dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1. \tag{13}$$

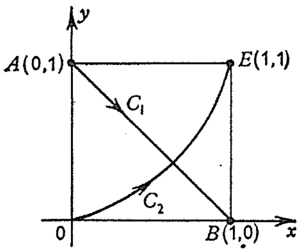
$$\text{(ii)} \int_{C_2} (x+y)\,dx = \int_0^1 (x+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6}. \tag{14}$$

"Αλλως, ἐκφράζοντες τό x ὡς συνάρτησιν τῆς y (ὡς εἰς τήν (5)), ἔχομεν

$$\text{(i)} \int_{C_1} (x+y)\,dx = \int_1^0 (1-y+y)(-dy) = \int_0^1 dy = \Big[y\Big]_0^1 = 1, \tag{15}$$

$$\text{(ii)} \int_{C_2} (x+y)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{y}+y)\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \Big[\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}y^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5}{6}, \tag{16}$$

ὅπως εὕρομεν καί προηγουμένως.



Σχ. 17.4.

Παράδειγμα 2. Ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_C (x^2+2y)\,dx + (x+y^2)\,dy \tag{17}$$

ἀπό A(0,1) μέχρι B(2,3) κατά μῆκος τῆς καμπύλης C ὁριζομένης ὑπό τῆς $y = x+1$.

Ἐκφράζοντες τήν (17) ἀποκλειστικῶς συναρτήσει τῆς x ἔχομεν

$$I = \int_0^2 [\{x^2+2(x+1)\}\,dx + \{x+(x+1)^2\}\,dx] \tag{18}$$

$$= \int_0^2 (2x^2+5x+3)\,dx = \frac{64}{3}. \tag{19}$$

"Αλλως, δυνάμεθα νά γράψωμεν (ἐπειδή $x = y-1$).

$$I = \int_0^2 \{x^2+2(x+1)\}dx + \int_1^3 (y-1+y^2)\,dy \tag{20}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right]_0^2 + \left[\frac{y^2}{2}-y+\frac{y^3}{3}\right]_1^3 \tag{21}$$

$$=\left(\frac{32}{3}+\frac{32}{3}\right)=\frac{64}{3}, \tag{22}$$

ὅπως εὕρομεν καί ἀνωτέρω.

Παράδειγμα 3. Ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$I=\int_C \{(x+y)\,dx+xy\,dy\} \tag{23}$$

(i) ἀπό O(0,0) ἕως B(1,1) κατά μῆκος τῆς καμπύλης $C = C_1$ ὁριζο - μένης ὑπό y = x,

(ii) ἀπό O(0,0) μέχρις A(1,0) κατά μῆκος τῆς καμπύλης y = 0 καί ἀπό A(1,0) μέχρις B(1,1) κατά μῆκος τῆς γραμμῆς x = 1 (ἰδέ Σχ. 17.5).

(i) ἐπειδή y = x

$$I_{C_1}=\int_0^1 \{(x+x)\,dx+x^2\,dx\}=\tfrac{4}{3}. \tag{24}$$

(ii) ἐπειδή y = 0 ἀπό O μέχρις A ἔχομεν dy = 0 καί ἐξ αὐτοῦ

$$I_{O\to A}=\int_0^1 x\,dx=\tfrac{1}{2}. \tag{25}$$

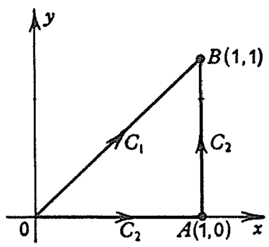
Ἀπό A μέχρις B, x = 1, dx = 0 καί ἐξ αὐτοῦ

$$I_{A\to B}=\int_0^1 y\,dy=\tfrac{1}{2}. \tag{26}$$

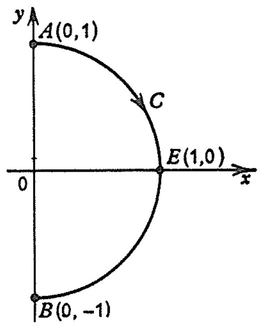
Συνεπῶς συμφώνως μέ τήν προσθετικήν ἰδιότητα (6)

$$I_{C_2}=I_{O\to A}+I_{A\to B}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1. \tag{27}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι μολονότι τά A, B εἶναι τά αὐτά σημεῖα δι'ἀμφοτέρας τάς C_1 καί C_2 ἡ τιμή τοῦ I λαμβανομένη κατά μῆκος τῆς C_1 διαφέρει ἀπό ἐκείνην κατά μῆκος τῆς C_2. Αὕτη εἶναι μία κοινή ἰδιότης τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων, ἄν καί ἀργότερον εἰς τό κεφάλαιον αὐτό θά συναντήσωμεν ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα τῶν ὁποίων αἱ τιμαί εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως καί ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τῶν ἀρχικῶν καί τελικῶν σημείων.



Σχ. 17.5.



Σχ. 17.6.

Παράδειγμα 4. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα

$$I=\int_C (x+y)\,dx \tag{28}$$

ἀπό A(0,1) μέχρι B(0,-1) ὅπου C παριστᾶ τό ἡμικύκλιον $y = \surd(1-x^2)$ δεικνυόμενον εἰς τό Σχ. 17.6.

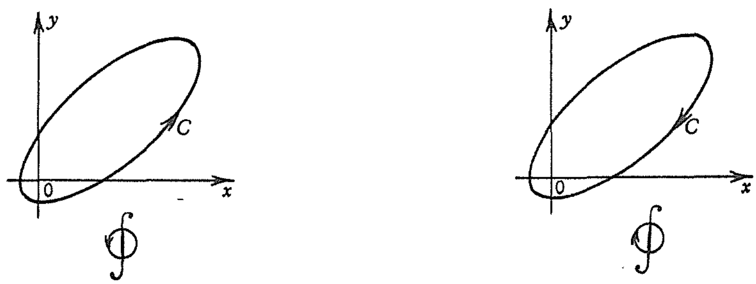
Ἐπειδή ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης δέν εἶναι μονότιμος συνάρτησις ὡς πρός x πρέπει κατά τήν (δ) νά χρησιμοποιήσωμεν τήν $y = +\surd(1-x^2)$ εἰς τό πρῶτον τμῆμα τῆς καμπύλης A μέχρι E καί τήν $y = -\surd(1-x^2)$ εἰς τό δεύτερον μέρος E μέχρι B. Ὅθεν

$$I=\int_0^1 \{x+\surd(1-x^2)\}\,dx+\int_1^0 \{x-\surd(1-x^2)\}\,dx \tag{29}$$

$$=2\int_0^1 \surd(1-x^2)\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{30}$$

17.3. Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα κατά Μῆκος Κλειστῶν Ἐπιπέδων Καμπύλων

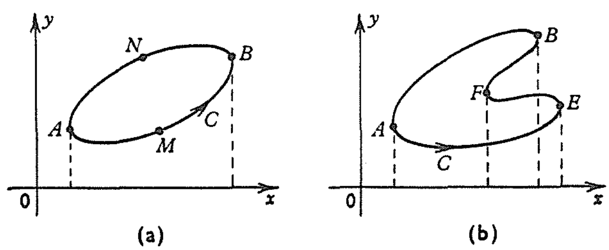
Διά νά ὑπολογίσωμεν ἕν ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα κατά μῆκος μιᾶς ἁπλῆς κλειστῆς ἐπιπέδου καμπύλης C (δηλ. καμπύλης ἡ ὁποία δέν κόπτει ἑαυτήν) ὁλοκληρώνομεν μίαν φοράν ἐπί τῆς περιμέτρου ἀρχίζοντες καί καταλήγοντες εἰς τό αὐτό σημεῖον. Κατά τήν ἐκτέλεσιν τῆς ὡς ἄνω ὁλοκληρώσεως ἡ κατεύθυνσις πρέπει νά καθορισθῆ καί ἡ ἀντίθετος φορά τῆς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καλεῖται συνήθως θετική ἐνῶ ἡ αὐτή μετά τῆς φορᾶς τῶν δεικτῶν καλεῖται ἀρνητική. Ὅταν ὁλοκληρώματα πρόκειται νά ὑπολογισθοῦν πέριξ κλειστῶν καμπυλῶν συνηθίζεται νά συμβολίζωνται ὑπό $\oint$ καί $\oint$, ὅπου τά τόξα δεικνύουν τήν φοράν τῆς ὁλοκληρώσεως πέριξ τῆς C (Σχ. 17.7).



θετική κατεύθυνσις   ἀρνητική κατεύθυνσις

Σχ. 17.7.

Ἐπί παραδείγματι, τό $\oint_C$ sinxydx σημαίνει ὅτι τό sinxy πρέπει νά ὁλοκληρωθῇ πέριξ καμπύλης C κατά τήν θετικήν κατεύθυνσιν, ἡ δέ ἐξίσωσις τῆς C ὁρίζει τό y συναρτήσει τοῦ x. Ἐπειδή ὅμως ἡ ἐξίσωσις μιᾶς κλειστῆς καμπύλης δέν δύναται νά παρασταθῇ ὑπό μονοτίμου συναρτήσεως y τοῦ x, διά τοῦτο πρέπει κατά τήν ὁλοκλήρωσιν ὡς πρός x νά ἀκολουθήσωμεν τήν τεχνικήν (δ). Ἐπί παραδείγματι, διά τήν καμπύλην (α) τοῦ Σχ. 17.8 θά πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν μονοτίμους συναρτήσεις $y = f_1(x)$ κατά μῆκος τῆς AMB καί $y = f_2(x)$ κατά μῆκος τῆς BNA. Ὁμοίως διά τήν (β) θά πρέπει νά διαιρέσωμεν τήν C εἰς τέσσερα μέρη AE, EF, FB καί BA ὥστε ἡ ἐξίσωσις ἑκάστου μέρους νά δύναται νά παρασταθῇ ὑπό τῆς y ὡς μονοτίμου συναρτήσεως τοῦ x.



Σχ. 17.8.

Παράδειγμα 5. Ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$I = \oint_C (2xy\, dy - x^2\, dx), \tag{31}$$

ὅπου ἡ C ἀποτελεῖται ἀπό τάς τρεῖς πλευράς τοῦ τριγώνου μέ κορυφάς O(0,0), A(1,0) καί B(1,1) : (ἰδέ Σχ. 17.9). Τώρα ἀπό O μέχρι A, y = 0 καί ἐξ αὐτοῦ (ἐπειδή dy = 0)

$$I_{O\to A} = -\int_0^1 x^2\, dx = -\tfrac{1}{3}. \tag{32}$$

Ὁμοίως ἀπό A μέχρι B, x = 1, dx = 0 καί ἐξ αὐτοῦ

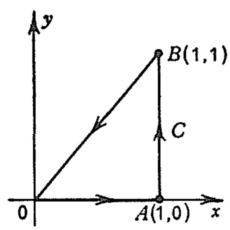
$$I_{A\to B} = \int_0^1 2y\, dy = 1. \tag{33}$$

Τελικῶς ἀπό B μέχρι O, y = x καί ἐξ αὐτοῦ (ἐκφράζοντες τήν (31) ὡς πρός x)

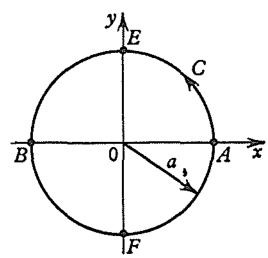
$$I_{B\to O} = \int_1^0 x^2\, dx = -\tfrac{1}{3}. \tag{34}$$

Ὅθεν τελικῶς λαμβάνομεν

$$I = I_{O\to A} + I_{A\to B} + I_{B\to O} = -\tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}. \tag{35}$$



Σχ. 17.9.



Σχ. 17.10.

Παράδειγμα 6. Ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$I = \oint_C y\, dx, \tag{36}$$

ὅπου C εἶναι ὁ κύκλος

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{37}$$

(Σχ. 17.10).

Ἐπειδή ἡ y δέν εἶναι μονότιμος συνάρτησις τοῦ x, πρέπει νά διαιρέσωμεν τήν (36) εἰς δύο μέρη, μέ τήν

$$y = +\sqrt{(a^2-x^2)} \tag{38}$$

διά τό ἡμικύκλιον AEB τό ὁποῖον κεῖται ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x καί τήν

$$y = -\sqrt{(a^2-x^2)} \tag{39}$$

διά τό ἡμικύκλιον BFA τό ὁποῖον κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x. Ὅθεν

$$I = \int_a^{-a} \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx + \int_{-a}^{a} \{-\sqrt{(a^2-x^2)}\}\,dx \tag{40}$$

$$= -4\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = -\pi a^2. \tag{41}$$

(Ὁλοκλήρωσις τῆς (36) κατά τήν ἀρνητικήν φοράν ἀλλάζει μόνον τό πρόσημον τῆς (41)).

Μία ἀπό τάς σπουδαίας ἐφαρμογάς τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων εἶναι εἰς τόν ὑπολογισμόν τῶν ἐμβαδῶν ἁπλῶν κλειστῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. Εἰς τήν § 17.11 θά ἀποδείξωμεν τό χρήσιμον ἀποτέλεσμα (ὑποδειχθέν εἰς τό τελευταῖον παράδειγμα)

$$\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = A, \tag{42}$$

ὅπου A τό ἐμβαδόν τό ὁποῖον περικλείει ἡ C.

17.4. Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα ὡς πρός τό Μῆκος Τόξου

Ἐκτός τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων ὁρισθέντων ὑπό τῶν (1) καί (2), ὁρίζομεν καί τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_C P(x, y)\,ds, \tag{43}$$

ὅπου s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης C ὁριζομένης ὑπό y = f(x). Ἕν τῶν ἁπλουστέρων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς αὐτῆς εἶναι ὁ στοιχειώδης τύπος $\int_A^B ds$ διά τό μῆκος τῆς καμπύλης ἀπό τό σημεῖον A μέχρι τό σημεῖον B.

Ὅπως καί μέ ἄλλας μορφάς ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων τά ὁποῖα εἴδομεν ἐνωρίτερον εἰς τό κεφάλαιον αὐτό, δυνάμεθα νά αναγάγωμεν τήν (43) εἰς ἕν σύνηθες ὁλοκλήρωμα δυνάμει τῶν στοιχειωδῶν ἀποτελεσμάτων

$$ds = \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx, \quad \text{ὅπου} \quad y=f(x) \tag{44}$$

καί

$$ds = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}\, dt, \quad \text{ὅπου} \quad \begin{matrix} x=f(t), \\ y=g(t), \end{matrix} \tag{45}$$

καί t εἶναι τυχοῦσα παράμετρος.

Παράδειγμα 7. Ὑπολογίσατε τό

$$I = \int_C (3x+2xy)\, ds, \tag{46}$$

ὅπου C εἶναι ἡ γραμμή y = x ἀπό O(0,0) μέχρις A(1,1). Τώρα δυνάμει τῆς (44) ἔχομεν

$$ds = \sqrt{2}\, dx \tag{47}$$

καί συνεπῶς

$$I = \int_0^1 (3x+2x^2)\sqrt{2}\, dx = \frac{13\sqrt{2}}{6}. \tag{48}$$

Παράδειγμα 8. Ὑπολογίσατε τό

$$I = \int_C 2xy\, ds, \tag{49}$$

ὅπου C εἶναι ἡ καμπύλη x = cost, y = sint ἀπό t = 0 μέχρι t = $\frac{\pi}{4}$.

Χρησιμοποιοῦντες τήν (45), ἔχομεν

$$I = \int_{t=0}^{t=\pi/4} 2\cos t \sin t \sqrt{\{(-\sin t)^2+(\cos t)^2\}}\, dt \tag{50}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin 2t\, dt = \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}. \tag{51}$$

Παράδειγμα 9. Ὑπολογίσατε τό

$$I = \oint_C (x^2-y^2)\, ds, \tag{52}$$

ὅπου C εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2 = 4$.

'Εδῶ $y = +\sqrt{(4-x^2)}$ διά τό μέρος τῆς C ὑπεράνω τοῦ ἄξονος τῶν x. Συνεπῶς

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{(4-x^2)}}. \tag{53}$$

Ὁμοίως $y = -\sqrt{(4-x^2)}$ διά τό μέρος τῆς C κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x καί ἐξ αὐτοῦ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(4-x^2)}}. \tag{54}$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν (44) ἔχομεν λοιπόν

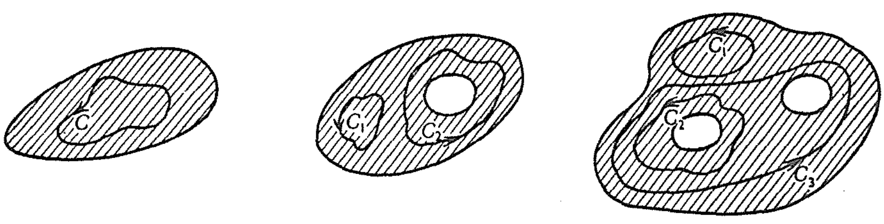
$$I = \int_2^{-2} \{x^2-(4-x^2)\}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{(4-x^2)}}\right)^2\right\}}\,dx$$

$$+\int_{-2}^{2} \{x^2-(4-x^2)\}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{x}{\sqrt{(4-x^2)}}\right)^2\right\}}\,dx \tag{55}$$

$$= \int_2^{-2} (2x^2-4)\frac{2}{\sqrt{(4-x^2)}}\,dx - \int_a^{-a} (2x^2-4)\,\frac{2}{\sqrt{(4-x^2)}}\,dx = 0. \tag{56}$$

17.5. Συνεκτικότης

Εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον καί εἰς μερικάς ἑπομένας θά χρειασθῶμεν τήν ἔννοιαν τῆς συνεκτικότητος περιοχῆς ἤ πεδίου. Ἡ ἰδέα αὐτή ἀνήκει εἰς τόν κλάδον τῆς τοπολογίας ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μέ τό ἐνυπᾶρχον σχῆμα περιοχῶν καί σωμάτων. Μία ἐπίπεδος περιοχή R καλεῖται ἁπλῶς συνεκτική ἐάν κάθε ἁπλῆ κλειστή καμπύλη C κειμένη εἰς τήν R δύναται νά συσταλῇ συνεχῶς εἰς σημεῖον (ἰδέ Σχ. 17.11 (α)). Ἐάν ὅμως ἡ R περιέχη ὀπήν (Σχ. 17.11 (β)), τότε δέν εἶναι



(α) (β) (γ)

Σχ. 17.11.

δυνατόν νά συσταλῇ ἡ C_2 χωρίς νά ἐγκαταλείψη τήν περιοχήν R. Ὅμως ή καμπύλη C_1 δύναται νά συσταλῆ εἰς σημεῖον. Ὑπάρχουν λοιπόν δύο εἴδη καμπυλῶν εἰς τήν περιοχήν αὐτήν, ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι δύνανται νά συσταλοῦν κατά τρόπον συνεχῆ εἰς σημεῖον καί ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι δέν δύνανται νά συσταλοῦν εἰς σημεῖον. Τοιαῦται περιοχαί λέγονται διπλῶς συνεκτικαί ἐπειδή τά σύνορά των ἀποτελοῦνται ἀπό δύο διαφορετικά μέρη. Ὁμοίως μία περιοχή μέ δύο ὀπάς (Σχ. 17.11 (γ)) καλεῖται τριπλῶς συνεκτική διότι τά σύνορά της ἀποτελοῦνται ἀπό τρία διαφορετικά μέρη. Ἐδῶ αἱ καμπύλαι C_2 καί C_3 δέν δύνανται νά συσταλοῦν συνεχῶς εἰς σημεῖα χωρίς νά ἐξέλθουν τῆς περιοχῆς R. Γενικεύοντες τήν ἔννοιαν μιᾶς περιοχῆς μέ (ν-1) ὀπάς καλοῦμεν αὐτήν ν-πλῶς συνεκτικήν (ἤ ἐνίοτε, ἁπλῶς,πολλαπλῶς συνεκτική). Ἀνάλογον ἐπιχείρημα ἰσχύει διά τήν ἐπιφάνειαν σφαίρας (ἡ ὁποία εἶναι ἁπλῶς συνεκτική) καί διά τήν τοῦ δακτυλίου (torus),(ἡ ὁποία δέν εἶναι ἁπλῶς συνεκτική)(ἰδέ Σχ. 17.12).

ἁπλῶς συνεκτική ἐπιφάνεια

ὄχι ἁπλῶς συνεκτική ἐπιφάνεια

Σχ. 17.12.

17.6. Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα Ἀνεξάρτητα τοῦ Δρόμου

Εἴδομεν εἰς τά τελευταῖα παραδείγματα ὅτι ὅταν τά ἀρχικά καί τελικά σημεῖα ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος παραμένουν σταθερά,ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος ἐξάρτᾶται ἀπό τόν ἐκλεγέντα δρόμον μεταξύ τῶν σημείων. Ἐν τούτοις, αὐτό δέν συμβαίνει πάντοτε. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ F(x,y) εἶναι μονότιμος καί συνεχής συνάρτησις τῶν x καί y μέ μονοτίμους καί συνεχεῖς πρώτας παραγώγους εἴς τινα περιοχήν R τοῦ ἐπιπέδου xy. Ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι ἡ C εἶναι καμπύλη κειμένη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τήν R ἡ ὁποία ὁρίζεται παραμετρικῶς ὑπό τῶν ἐξισώσεων x = f(t), y = g(t) καί ὅτι $A(x_1,y_1)$ καί $B(x_2,y_2)$ εἶναι τό ἀρχικόν καί τελικόν σημεῖον τοῦ ὁλοκληρώματος, ἀντιστοίχως. Τότε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τῆς F εἶναι

$$\begin{aligned}\int dF &= \int \frac{dF}{dt}\,dt = \int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy \\ &= F(t_2)-F(t_1) = F(x_2, y_2)-F(x_1, y_1).\end{aligned} \tag{57}$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως εἰς τό ἀρχικόν καί τελικόν σημεῖον καί ὄχι ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς διαδρομῆς C. Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ὅπου C εἶναι μία ἁπλῆ κλειστή καμπύλη εἰς τήν περιοχήν R, τότε τά A καί B συμπίπτουν καί ἐξ αὐτοῦ

$$\oint_C \frac{dF}{dt}\,dt = 0, \quad (\text{ἤ} \quad \oint dF = 0). \tag{58}$$

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν μία συνάρτησις F(x,y) δύναται νά εὑρεθῆ οὕτως ὥστε

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \tag{59}$$

τότε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_C \{P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy\} \tag{60}$$

θά εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς C.

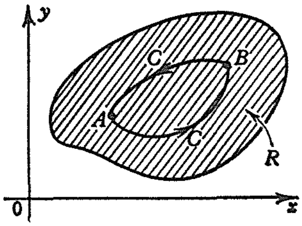
Ἐπί πλέον δύναται νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἐάν οἱ P(x,y), Q(x,y) ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους εἰς τήν περιοχήν R, καί ἡ R εἶναι ἁπλῶς συνεκτική περιοχή, τότε ἡ συνθήκη

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{61}$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν (59) δι'ἀπαλοιφῆς τῆς F(x,y), εἶναι μία ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό (60) εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου C. Ἐάν ὅμως ἡ R δέν εἶναι ἁπλῶς συνεκτική, ἡ (61) δέν ἐξασφαλίζει τήν ἀνεξαρτησίαν ἀπό τήν διαδρομήν (ἰδέ Παράδειγμα 11).

Δυνάμεθα ἐπίσης νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἐάν τό

$$\int \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\}$$



Σχ. 17.13.

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς εἰς τήν περιοχήν R, τότε

$$\oint_C \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} = 0$$

δι'ὅλας τάς ἁπλᾶς κλειστάς καμπύλας C εἰς τήν περιοχήν R. Καθ'ὅτι (ἰδέ Σχ.17.13)

$$\oint_C \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} = \int_{\substack{A \to B, \\ \text{κάτω δρόμου}}} \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} + \int_{\substack{B \to A, \\ \text{ἄνω δρόμου}}} \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\}, \tag{62}$$

$$= \int_{\substack{A \to B. \\ \text{κάτω δρόμου}}} \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} - \int_{\substack{A \to B, \\ \text{ἄνω δρόμου}}} \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\}. \tag{63}$$

'Εάν ὅμως τά ὁλοκληρώματα ἀπό A μέχρι B εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς ἀκολουθουμένης διαδρομῆς μεταξύ τῶν σημείων τούτων, τότε τά ὁλοκληρώματα εἰς τήν (63) εἶναι ἴσα.

"Οθεν

$$\oint_C \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} = 0. \tag{64}$$

'Αντιθέτως, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐάν

$$\oint_C \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} = 0 \tag{65}$$

δι'ὅλους τούς κλειστούς δρόμους C ἐς τήν περιοχήν R, τότε τό

$$\int \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} \tag{66}$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου εἰς τήν R.

Παράδειγμα 10. Τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_{A}^{B} (y \cos x \, dx + \sin x \, dy) \tag{67}$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τοῦ συνδέοντος τά A(0,0),B($\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$) ἐπειδή

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \cos x. \tag{68}$$

Συνεπῶς ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις εἰς τήν (67) πρέπει νά εἶναι ὁλικόν διαφορικόν συναρτήσεώς τινος. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι

$$I = \int_{(0,0)}^{(\pi/4,\pi/4)} d(y \sin x) = \Big[y \sin x \Big]_{(0,0)}^{(\pi/4,\pi/4)} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}. \tag{69}$$

Παράδειγμα 11. Τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_{C} \left(\frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} \right) \tag{70}$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου C εἰς κάθε ἁπλῶς συνεκτικήν περιοχήν μή περιέχουσαν τήν ἀρχήν ἐπειδή

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{71}$$

ἐκτός εἰς τό (0,0). Ἑπομένως (ἰδέ (64))

$$I = \oint_{C} \left(\frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} \right) = 0 \tag{72}$$

εἰς ἑκάστην περιοχήν τοῦ εἴδους αὐτοῦ, δι'ὅλας τάς ἁπλᾶς κλειστάς καμπύλας C.

Τώρα δυνάμει τῆς (71) ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις τῆς (70) πρέπει νά εἶναι ὁλικόν διαφορικόν. Πράγματι, εὐκόλως συνάγεται ὅτι

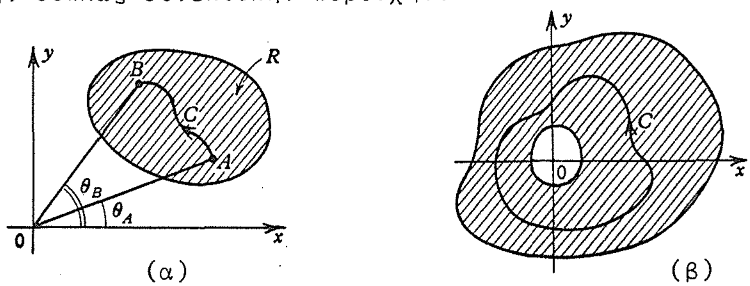
$$I = \int_{C} d\left(\tan^{-1} \frac{y}{x} \right) = \int_{C} d\theta = \theta_B - \theta_A, \tag{73}$$

ὅπου θ_A καί θ_B εἶναι αἱ τιμαί τῶν πολικῶν συντεταγμένων θ εἰς τά ἀρχικά καί τελικά σημεῖα τῆς C (A καί B, ἀντιστοίχως), (ἰδέ Σχ. 17.14 (α)). Δι'ἁπλᾶς κλειστάς καμπύλας $\theta_B = \theta_A$ καί ἡ (73) δίδει καί πάλιν τήν (72).

Τώρα ἔστω ἡ διπλῶς συνεκτική περιοχή ἐμφαινομένη εἰς τό Σχ. 17.14 (β). Ἐάν C εἶναι τυχοῦσα κλειστή καμπύλη, τότε κατά μῆκος τῆς C ἡ θ μεταβάλλεται κατά 2π· ὅθεν

$$I = 2\pi. \tag{74}$$

Ἐν γένει, κατά ταῦτα, τό I δέν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου εἰς αὐτήν τήν διπλῶς συνεκτικήν περιοχήν.



Σχ. 17.14.

17.7. Ἐπικαμπύλια Ὁλοκληρώματα εἰς τόν Χῶρον

Αἱ ἰδέαι τῶν τελευταίων ἕξη παραγράφων εὐκόλως δύνανται νά ἐπεκταθοῦν εἰς ὁλοκληρώματα κατά μῆκος γραμμῶν καί καμπυλῶν εἰς τόν τριδιάστατον χῶρον. Δέν θά δώσωμεν ὅμως λεπτομερείας εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον ἀλλά παραπέμπομεν εἰς τά Προβλήματα 6, 7 καί 8 εἰς τό τέλος τοῦ κεφαλαίου.

17.8. Διπλᾶ Ὁλοκληρώματα

Τά διπλᾶ ὁλοκληρώματα ὁρίζονται γεωμετρικῶς κατά παρόμοιον τρόπον ὡς ὡρίσθη τό ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα κατά Riemann εἰς τό Κεφ.4, § 4.1 (β). Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f(x,y) εἶναι συνεχής μονότιμος συνάρτησις τῶν x καί y τόσον εἰς τό ἐσωτερικόν ὅσον καί εἰς τό σύνορον C μιᾶς ὀρθογωνίου περιοχῆς R τοῦ xy-ἐπιπέδου. Ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι ἡ R περιορίζεται ἀπό τάς εὐθείας

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d \tag{75}$$

ὅπου a, b, c, d εἶναι σταθεραί (ἰδέ Σχ. 12.15 (α)). Τότε ἐάν τό διάστημα (a,b) διαιρεθῆ εἰς m μέρη οὕτως ὥστε

$$a(=x_0)<x_1<x_2<\ldots<x_{m-1}<b(=x_m) \tag{76}$$

καί τό διάστημα (c,d) διαιρεθῆ εἰς n μέρη οὕτως ὥστε

$$c(=y_0)<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<d(=y_n), \tag{77}$$

ἡ περιοχή R διαιρεῖται εἰς mn ὀρθογωνίους στοιχειώδεις ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ δR_{rs} (r = 1,2,...m, s = 1,2,...n) ὅπου

$$\delta R_{rs}=(x_r-x_{r-1})(y_s-y_{s-1})=\delta x_r\,\delta y_s. \tag{78}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγομεν τυχόν σημεῖον μέ συντεταγμένας (ξ_r, η_s), κείμενον εἰς τό rs ὀρθογώνιον τοιοῦτον ὥστε

$$\left.\begin{aligned} x_{r-1}&\leqq\xi_r\leqq x_r\\ y_{s-1}&\leqq\eta_s\leqq y_s\end{aligned}\right\}. \tag{79}$$

Θεωρήσωμεν τώρα τό διπλοῦν ἄθροισμα

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} f(\xi_r,\eta_s)\,\delta R_{rs}. \tag{80}$$

Ἐάν τό ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ὅταν ἀμφότερα τά m καί n τείνουν εἰς τό ἄπειρον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου διαιρέσεως τῶν (α,b) καί (c,d) (ἰδέ (76) καί (77)), καί ἐπίσης τοῦ τρόπου ἐκλογῆς τῶν σημείων (ξ_r, η_s) ἐντός τοῦ δR_{rs}, τότε, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι $\delta R_{rs}\to 0$, τό

$$I=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} f(\xi_r,\eta_s)\,\delta R_{rs} \tag{81}$$

καλεῖται διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ἐπί τῆς περιοχῆς R καί συνήθως γράφεται

$$I=\int_R f(x,y)\,dR=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \tag{82}$$

(δυνάμει τῆς (78)). Δύναται νά ἀποδειχθῆ, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι τό ὅριον (81) ὑπάρχει, ὅτι τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου κατά τόν ὁποῖον τά m καί n τείνουν εἰς τό ἄπειρον. Δυνάμεθα οὕτω νά ἀκολουθήσωμεν τάς ἑξῆς δύο διαδικασίας.

(i) Διά δοθεῖσαν τιμήν τοῦ x εἰς τό διάστημα $\alpha\leq x\leq b$ πρῶτον ἀθροίζομεν τά στοιχειώδη ἐμβαδά ἐντός τῆς κατακορύφου λωρίδος PQ (ἰδέ Σχ. 17.15 (α)) καί ἐν συνεχείᾳ ἀθροίζομεν ὡς πρός x δι'ὅλας τάς δυνατάς κατακορύφους λωρίδας τῆς R. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τό

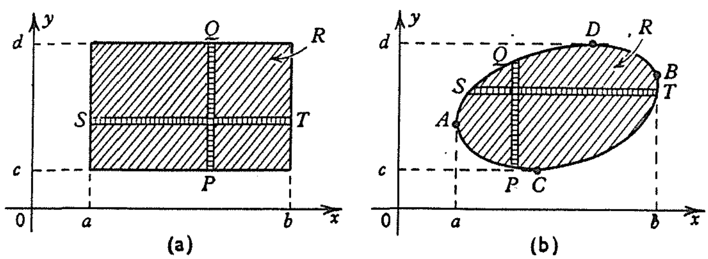
$$I = \lim_{m\to\infty} \sum_{r=1}^{m} \left\{ \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} f(\xi_r, \eta_s)(y_s - y_{s-1}) \right] (x_r - x_{r-1}) \right\} \tag{83}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left\{ \int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\, dy \right\} dx. \tag{84}$$

(ii) Διά δοθεῖσαν τιμήν τοῦ y εἰς τό διάστημα c ≤ y ≤ c, πρῶτον ἀθροίζομεν τάς στοιχειώδη ἐμβαδά ἐντός τῆς ὁριζοντίας λωρίδος ST (ἰδέ Σχ. 17.15 (α) καί ἐν συνεχείᾳ ἀθροίζομεν ὡς πρός y δι'ὅλας τάς δυνατάς λωρίδας τῆς R. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τό

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left\{ \left[\lim_{m\to\infty} \sum_{r=1}^{m} f(\xi_r, \eta_s)(x_r - x_{r-1}) \right] (y_s - y_{s-1}) \right\}. \tag{85}$$

$$= \int_{y=c}^{y=d} \left\{ \int_{x=a}^{x=b} f(x, y)\, dx \right\} dy. \tag{86}$$



Σχ. 17.15.

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ ἐκλογή τοῦ ἄν ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς f(x,y) θά γίνῃ πρῶτον ὡς πρός y καί ἐν συνεχείᾳ ὡς πρός x, ὡς εἰς τήν (84), ἤ ἀντιστρόφως, ὡς εἰς τήν (86), καθορίζεται ἐκ τοῦ ποία ἐκ τῶν δύο διαδικασιῶν εἶναι ἁπλουστέρα.

Ἐάν τώρα ἡ περιοχή ὁλοκληρώσεως R δέν εἶναι ὀρθογώνιον ἀλλά περιοχή φρασσομένη ὑπό κλειστῆς καμπύλης C (ἰδέ Σχ. 17.15(β)) τότε ἀκολουθοῦμεν τήν ἑξῆς μέθοδον.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ R ὁρίζεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων

$$y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \text{ διά } a \leqq x \leqq b,$$

$$x_1(y) \leqq x \leqq x_2(y) \text{ διά } c \leqq y \leqq d,$$

ὅπου αἱ y_1, y_2, x_1, x_2 εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν. Τότε ἀθροίζοντες πρῶτον κατά μῆκος τῆς κατακορύφου λωρίδος PQ καί ἐν συνεχείᾳ ἐφ'ὅλων τῶν δυνατῶν κατακορύφων λωρίδων τῆς R, λαμβάνομεν τήν ἀνάλογον τῆς (84)

$$I = \int_R f(x, y)\, dR = \int_{x=a}^{x=b} \left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx. \tag{87}$$

Ὁμοίως ἀθροίζοντες πρῶτον κατά μῆκος τῆς ὁριζοντίου λωρίδος ST καί ἐν συνεχείᾳ ἐφ'ὅλων τῶν δυνατῶν ὁριζοντίων λωρίδων τῆς R, λαμβάνομεν τήν ἀνάλογον τῆς (86)

$$I = \int_R f(x, y)\, dR = \int_{y=c}^{y=d} \left\{ \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy. \tag{88}$$

Ἐν γένει, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐντός τῆς R καί ὅτι τό σύνορον τῆς R εἶναι μία ἁπλῆ καμπύλη, τά ὁλοκληρώματα (87) καί (88) εἶναι τά αὐτά.

Τελικῶς σημειώνομεν ὅτι ἡ γραφή ἡ ὁποία ἀποφεύγει τήν χρῆσιν ἀγκυλῶν εἰς τάς (87) καί (88) εἶναι νά γράφωμεν τήν (87) π.χ. ὡς

$$\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Ἡ γραφή αὐτή θά χρησιμοποιηθῇ ἐπί τό πλεῖστον εἰς τά ἑπόμενα.

17.9. Ἰδιότητες Διπλῶν Ὁλοκληρωμάτων

Ὑποθέτομεν εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον (ἐκτός ἐάν λεχθῇ τό ἀντίθετον) ὅτι τά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι πάντοτε πεπερασμένα οὕτως ὥστε ἡ R εἶναι φραγμένη περιοχή. Τό πρόβλημα τῆς συγκλίσεως ἑνός διπλοῦ ὁλοκληρώματος ὅταν ἡ R δέν εἶναι φραγμένη εἶναι ἕν πολύ περισσότερον δύσκολον πρόβλημα ἀπό τό τοῦ συνήθους ὡρισμένου ὁλοκληρώματος κατά Riemann μέ ἀπέραντον περιοχήν ὁλοκλη -

ρώσεως, καί ὡς ἐκ τούτου δέν θά συζητηθῇ ἐνταῦθα.

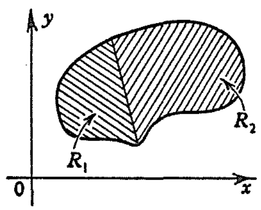
Ἐάν ἡ f(x,y) καί ἡ g(x,y) εἶναι δύο συνεχεῖς καί μονότιμοι συναρτήσεις εἰς τήν R, τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα δύνανται νά ἀποδειχθοῦν χρησιμοποιοῦντες τούς βασικούς ὁρισμούς τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος, δοθέντας εἰς τήν (81) :

$$(a)\ \iint_R \{f(x,y)+g(x,y)\}\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy, \tag{89}$$

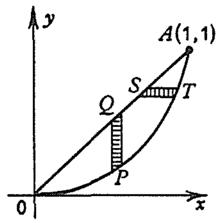
$$(b)\ \iint_R cf(x,y)\,dx\,dy = c\iint_R f(x,y)\,dx\,dy,\ (c = \text{σταθερά}) \tag{90}$$

$$(c)\ \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{91}$$

ὅταν ἡ R διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη R_1 καί R_2 (ἰδέ Σχ. 17.16).



Σχ. 17.16.



Σχ. 17.17.

17.10. Παραδείγματα Διπλῶν Ὁλοκληρωμάτων

Παράδειγμα 12. Ὑπολογίσατε τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$I = \iint_R (2x^2+y)\,dx\,dy, \tag{92}$$

ὅπου R εἶναι ἡ περιοχή ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς εὐθείας $y = x$ καί τῆς καμπύλης $y = x^2$ (ἰδέ Σχ. 17.17).

Μ έ θ ο δ ο ς 1. Πρῶτον ὁλοκληρώνομεν ὡς πρός t κατά μῆκος τῆς λωρίδος PQ θεωροῦντες τήν x ὡς σταθεράν, καί ἐν συνεχείᾳ ὁλοκληρώνομεν ὡς πρός x οὕτως ὥστε ἡ PQ κινῆται ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά καλύπτουσα ολόκληρον τήν περιοχήν R. Κατ'αὐ τόν τόν τρόπον (κατά τήν (87))

$$I=\int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=x^2}^{y=x} (2x^2+y)\,dy \tag{93}$$

$$I=\int_{x=0}^{x=1} dx \left[2x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} \tag{94}$$

$$=\int_0^1 \left(2x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{2}\right) dx=\frac{1}{6}. \tag{95}$$

Μ έ θ ο δ ο ς 2. Κατ'αὐτήν ολοκληρώνομεν πρῶτον ὡς πρός x κατά μῆκος τῆς λωρίδος ST θεωροῦντες τήν y ὡς σταθεράν καί ἐν συν εχεία ολοκληρώνομεν ὡς πρός y οὕτως ὥστε ἡ ST νά κινῆται κατακορύφως καλύπτουσα ολόκληρον τήν περιοχήν R. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν (ἐπειδή x = y καί x = $\sqrt{y}$ εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν συνοριακῶν καμπυλῶν τῆς R μέ τήν y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν) ἔχομεν (κατά τήν (88))

$$I=\int_{y=0}^{y=1} dy \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} (2x^2+y)\,dx \tag{96}$$

$$=\int_{y=0}^{y=1} dy \left[\frac{2x^3}{3}+xy\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \tag{97}$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{5y^{3/2}}{3}-\frac{2y^3}{3}-y^2\right) dy=\frac{1}{6} \tag{98}$$

ὡς εὕρομεν καί βάσει τῆς Μεθόδου 1.

Παράδειγμα 13. Ὑπολογίσατε

$$I=\int_0^1 dy \int_0^{\cos^{-1} y} \sec x\,dx, \quad (\cos^{-1} y<\pi/2), \tag{66}$$

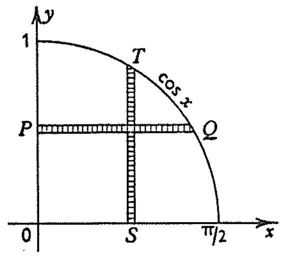
ἀλλάσσοντες τήν σειράν ολοκληρώσεως.

Εἰς προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ διευκολύνει πάντοτε ἡ σκιαγράφησις τῆς περιοχῆς ολοκληρώσεως. Ἐπειδή ἡ x μεταβάλλεται ἀπό 0 μέχρις $\cos^{-1}y$ καί ἡ y μεταβάλλεται ἀπό 0 μέχρις 1,εἶναι προφανές ὅτι ἡ περιοχή ολοκληρώσεως περιορίζεται ὑπό τῶν εὐθειῶν x=

= 0, y = 0 καί τῆς καμπύλης y = cosx (ἰδέ Σχ. 17.18). Ἐκ τῆς (99), ὡς ἔχει, ἡ ὁλοκλήρωσις ὡς πρός x πρέπει νά γίνη πρῶτον κατά μῆκος τῆς λωρίδος PQ. Ἵνα ἀλλάξωμεν τήν σειράν ὁλοκληρώσεως πρῶτον ὁλοκληρώνομεν ὡς πρός y κατά μῆκος τῆς λωρίδος ST καί δεύτερον ὁλοκληρώνομεν ὡς πρός x κινοῦντες τήν ST ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά καλύπτοντες οὕτω ὁλόκληρον τήν περιοχήν. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἡ (99) γίνεται

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi/2} dx \int_{y=0}^{y=\cos x} \sec x \, dy \tag{100}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big[y \sec x \Big]_{y=0}^{y=\cos x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{101}$$



Σχ. 17.18.

Ἡ ἀλλαγή τῆς σειρᾶς ὁλοκληρώσεως εἶναι συνήθως ἕνας χρήσιμος τρόπος ἀποφυγῆς πολυπλόκων ὁλοκληρωμάτων, ὡς εὐκόλως ἐπαληθεύεται ἐδῶ δι'ὁλοκληρώσεως τῆς (99) ὅπως εἶναι.

Παράδειγμα 14. Ὡς ἀνεφέρθη ἐνωρίτερον ἡ ἀλλαγή τῆς σειρᾶς ὁλοκληρώσεως ἑνός διπλοῦ ὁλοκληρώματος δέν εἶναι πάντοτε ἐπιτρεπτή καί ἐξαρτᾶται (μεταξύ ἄλλων) ἀπό τό κατά πόσον ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως f(x,y) ἔχει ἀσυνεχείας εἰς τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως R. Πρός διευκρίνισιν τούτου,· δίδομεν τό κατωτέρω παράδειγμα

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy, \tag{102}$$

ὅπου ἡ περιοχή ὁλοκληρώσεως R εἶναι ἡ ὀρθογώνιος ἐπιφάνεια ἡ περιοριζομένη ὑπό τῶν εὐθειῶν x = 0, x = 1, y = 0, y = 1. Θέτοντες x+y = u, εὐκόλως εὑρίσκομεν $I = \frac{1}{2}$. Τώρα ἀλλάσσοντες τήν σειράν ὁλοκληρώσεως εἰς τήν (102) ἔχομεν

$$I' = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx, \tag{103}$$

τό ὁποῖον ὅταν x+y = u μᾶς δίδει $I' = -\frac{1}{2}$. Συνεπῶς $I \neq I'$. Σημειωτέον ὅμως ὅτι ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις

$$f(x, y)=\frac{x-y}{(x+y)^3} \tag{104}$$

ἔχει ἀσυνέχειαν ἐπί τοῦ συνόρου τῆς R εἰς τό σημεῖον (0,0) καί τό ἀποτέλεσμα αὐτό δέν εἶναι ἐντελῶς ἀπροσδόκητον.

Παράδειγμα 15. Διπλᾶ ὁλοκληρώματα συνήθως χρησιμεύουν εἰς τόν ὑπολογισμόν ἐμβαδῶν καί ὄγκων. Ἐπί παραδείγματι, τό ὁλοκλήρωμα

$$\iint_R dx\, dy \tag{105}$$

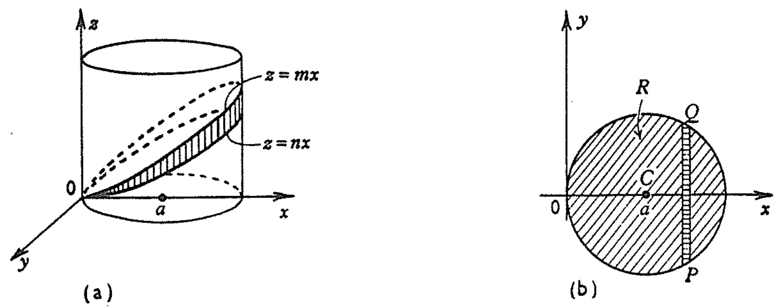
προφανῶς ἀντιπροσωπεύει τό ἐμβαδόν τῆς R, καθ'ὅσον τό dxdy εἶναι οὐσιαστικῶς τό ἐμβαδόν ἑνός τυπικοῦ ἀπειροστοῦ ὀρθογωνίου στοιχείου εἰς τήν R. Ὁμοίως ἐάν ἡ f(x,y) εἶναι συνεχής καί μονότιμος συνάρτησις τῶν x καί y, ὁ ὄγκος ὑπό τήν ἐπιφάνειαν z=f(x,y) εἰς τρισδιάστατον Καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων (ἰδέ Κεφ. 9, § 9.1) κατακορύφως ὕπερθεν μιᾶς περιοχῆς R τοῦ xy-ἐπιπέδου ἰσοῦται μέ

$$\iint_R z\, dx\, dy=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \tag{106}$$

(ὄγκοι ὑπεράνω τοῦ xy-ἐπιπέδου λογίζονται ὡς θετικοί καί οἱ κάτωθεν αὐτοῦ ἀρνητικοί).

Πρός διασάφησιν τῆς χρήσεως διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, θεωρήσωμεν τό ἀκόλουθον παράδειγμα : ὁ κύλινδρος $x^2+y^2 = 2\alpha x$ (α = σταθερόν) τέμνεται ὑπό δύο ἐπιπέδων z = mx καί z = nx (m,n σταθεραί)· εὕρετε τόν ὄγκον τῆς σφηνός μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων καί τοῦ κυλίνδρου (ἰδέ Σχ. 17.19 (α)).

Αὐτό ἐπιτυγχάνεται καλύτερον εἰς δύο στάδια. Πρῶτον ὑπολογίζομεν τόν ὄγκον ὁ ὁποῖος κεῖται κατακορύφως ὑπεράνω τῆς κυκλικῆς περιοχῆς R τοῦ xy-ἐπιπέδου, τόν ὁριζόμενον ὑπό $x^2+y^2 = 2\alpha x$ (κέντρον (α,0)) καί κάτωθεν τοῦ ἐπιπέδου z = mx. Ἀπό τό ἀποτέλεσμα αὐτό ἀφαιροῦμεν τό ἀντίστοιχον ἀποτέλεσμα διά τόν ὄγκον ὁ ὁποῖος κεῖται ὕπερθεν τῆς περιοχῆς R καί κάτωθεν τοῦ z = nx. Ἡ οὕτως εὑρισκομένη διάφορά ἀντιπροσωπεύει τόν ζητούμενον ὄγκον τῆς σφη-



Σχ.. 17.19.

νός. Ἐργαζόμενοι οὕτω, ἔχομεν

$$I_1 = \iint_R mx\,dx\,dy \tag{107}$$

$$= 2m \int_{x=0}^{x=2a} dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{(2ax-x^2)}} x\,dy, \tag{108}$$

(ὁλοκληροῦντες πρῶτον ὡς πρός y κατά μῆκος τοῦ PQ ὡς δεικνύεται εἰς τό σχ. 17.19 (β)).

Ὅθεν

$$I_1 = 2m \int_0^{2a} x\sqrt{(2ax-x^2)}\,dx \tag{109}$$

$$= 2m \int_0^{2a} x\sqrt{\{a^2-(a-x)^2\}}\,dx \tag{110}$$

$$= 2m \int_{-a}^{a} (a-u)\sqrt{(a^2-u^2)}\,du, \tag{111}$$

ὅπου $u = a-x$. Θέτοντες $u = a\sin\theta$, ἡ (111) εὐκόλως ὑπολογίζεται καί

$$I_1 = \pi m a^3. \tag{112}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$I_2 = \iint_R nx\,dx\,dy = \pi n a^3. \tag{113}$$

Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ὄγκος τῆς σφηνός εἶναι $\pi(m-n)a^3$ (ὑποθέτοντες m > n).

17.11. Θεώρημα τοῦ Green

Θεώρημα 1. (Θεώρημα τοῦ Green). Ἔστωσαν P(x,y) καί Q(x,y) δύο συναρτήσεις πεπερασμέναι καί συνεχεῖς εἰς τό ἐσωτερικόν καί ἐπί τοῦ συνόρου C μιᾶς περιοχῆς R τοῦ xy-ἐπιπέδου. Ἐάν αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς ἐντός καί ἐπί τῶν συνόρων τῆς R, τότε

$$\iint_R \left\{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right\} dx\, dy = -\oint_C \{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\}. \tag{114}$$

Ἡ κλάσις τῶν περιοχῶν R εἰς τάς ὁποίας τό θεώρημα τοῦ Green εἶναι ἐφαρμόσιμον εἶναι πολύ μεγάλη καί οὕτως δέν θά ἀσχοληθῶμεν μέ περιπτώσεις ὅπου δέν ἐφαρμόζεται. Μολαταῦτα, χάριν ἁπλότητος, θά ἀποδείξωμεν τήν (114) μόνον διά μίαν περιοχήν R ὅπου τό σύνορόν της C εἶναι μία ἁπλῆ ὁμαλή κλειστή καμπύλη (ἰδέ σχ. 17.15 (b)). Τώρα κατά τήν (87)

$$\iint_R \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy \tag{115}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \Big[P(x, y)\Big]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \tag{116}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \{P(x, y_2(x))\, dx - P(x, y_1(x))\, dx\} \tag{117}$$

$$= -\int_a^b P(x, y_1(x))\, dx - \int_b^a P(x, y_2(x))\, dx \tag{118}$$

$$= -\oint_C P(x, y)\, dx. \tag{119}$$

Ὁμοίως ἀπό τήν (88)

$$\iint_R \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{y=c}^{y=d} dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \tag{120}$$

$$= \int_{y=c}^{y=d} \left[Q(x, y) \right]_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} dy \tag{121}$$

$$= \int_c^d \{Q(x_2(y), y)\, dy - Q(x_1(y), y)\, dy\} \tag{122}$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y)\, dy + \int_d^c Q(x_1(y), y)\, dy \tag{123}$$

$$= \oint_C Q(x, y)\, dy. \tag{124}$$

Ὅθεν ἀφαιροῦντες τήν (124) ἀπό τήν (119) λαμβάνομεν τήν (114).

Μία εἰδική καί σημαντική περίπτωσις τοῦ Θεωρήματος τοῦ Green λαμβάνεται ἐάν θέσωμεν P(x,y) = y, Q(x,y) = -x. Τοιουτοτρόπως ἡ (114) δίδει

$$2\iint_R dx\, dy = -\oint_C (y\, dx - x\, dy), \tag{125}$$

ἤ

$$A = \iint_R dx\, dy = \frac{1}{2}\oint_C (x\, dy - y\, dx), \tag{126}$$

ὅπου A εἶναι τό ἐμβαδόν τό περικλειόμενον ὑπό τῆς C.

Ὁμοίως αἱ (119) καί (124) δίδουν

$$A = \iint_R dx\, dy = -\oint_C y\, dx \tag{127}$$

καί

$$A = \iint_R dx\, dy = \oint_C x\, dy, \tag{128}$$

ἀντιστοίχως. (Τά ἀποτελέσματα αὐτά ἐδόθησαν χωρίς ἀπόδειξιν εἰς τήν § 17.3 (42)).

Τό ἑπόμενον παράδειγμα διευκρινίζει τήν χρῆσιν τοῦ Θεωρήματος τοῦ Green.

Παράδειγμα 16. Πρός ὑπολογισμόν τοῦ

$$I = \oint_C \{(3x-y)\,dx+(x+2y)\,dy\} \tag{129}$$

περί τό σύνορον τῆς ἐλλείψεως $x^2+4y^2 = 9$ γράφομεν (ἐπειδή $P = 3x-y$, $Q = x+2y$).

$$\oint_C \{(3x-y)\,dx+(x+2y)\,dy\} = -\iint_R (-1-1)\,dx\,dy \tag{130}$$

$$= 2\iint_R dx\,dy = 2A, \tag{131}$$

ὅπου A εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐλλείψεως. Ἐπειδή ἡ ἔλλειψις ἔχει ἡμιάξονας $a = 3$, $b = \frac{3}{2}$, ἔχομεν

$$A = \pi ab = \frac{9\pi}{2}, \tag{132}$$

καί ἐξ αὐτοῦ

$$I = 9\pi. \tag{133}$$

17.12. Μετασχηματισμοί εἰς Πολικάς Συντεταγμένας διά Διπλᾶ Ὁλοκληρώματα

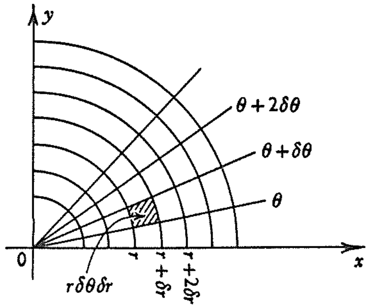
Εἰς τόν χειρισμόν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἐπί μιᾶς περιοχῆς R τῆς ὁποίας τό σύνορον C ἐκφράζεται εἰς πολικάς συντεταγμένας (r,θ) (ὅπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) εἶναι συνήθως εὐκολώτερον νά διαιρέσωμεν τήν R εἰς στοιχειώδη μή ὀρθογώνια ἐμβαδά δR διά γραμμῶν σταθεροῦ r καί θ (ἰδέ Σχ. 17.20). Τοιουτοτρόπως τό στοιχειῶδες ἐμβαδόν δR τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἐμβαδόν $\delta x\delta y$ ὀρθογωνίου διά Καρτεσιανάς συντεταγμένας δίδεται κατά προσέγγισιν ὑπό τῆς

$$\delta R \simeq r\,\delta\theta\,\delta r.$$

Συνεπῶς ἐάν I ἀντιπροσωπεύη τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα συναρτήσεως $f(x,y)$ ἐπί μιᾶς περιοχῆς R_{xy} τοῦ xy-ἐπιπέδου τότε συναρτήσει πολικῶν συντεταγμένων

$$I = \iint_{R_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr, \tag{134}$$

ὅπου $R_{r\theta}$ εἶναι ἡ περιοχή τοῦ rθ-ἐπιπέδου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό R_{xy}. Ἡ ὀρθότης τῆς (134), ἡ ὁποία ἔχει ἐξαχθῆ ἀπό μίαν καθα-



Σχ. 12.20.

ρῶς διαισθητικήν ἄποψιν, θά δειχθῇ εἰς τήν ἐπομένην παράγραφον . Ἐπί τοῦ παρόντος, λαμβάνομεν ὡς δεδομένην τήν ἰσχύν της καί δεικνύομεν τήν χρῆσιν της διά μερικῶν παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 17. Ὑπολογίσατε τό

$$I = \iint_R \{1-\sqrt{(x^2+y^2)}\}\, dx\, dy, \tag{135}$$

ὅπου R ἡ περιοχή ἡ περιωρισμένη ὑπό τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = 1$. Μετασχηματίζοντες εἰς πολικάς συντεταγμένας ἔχομεν, ἐπειδή $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$$I = \iint_{R_{r\theta}} (1-r)r\, d\theta\, dr \tag{136}$$

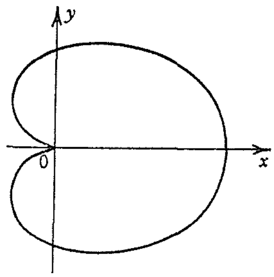
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=1} (1-r)r\, dr = (2\pi)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}. \tag{137}$$

Παράδειγμα 18. Ὑπολογίσατε τό

$$I = \iint_R x\, dx\, dy, \tag{138}$$

ὅπου R εἶναι ἡ περιοχή ἡ περιωρισμένη ὑπό τῆς καμπύλης $r = 2\alpha(1+\cos\theta)$ (ἰδέ Σχ. 17.21).

Ἐκφράζοντες τό I εἰς πολικάς συντεταγμένας ἔχομεν



Σχ. 17.21.

$$I=\iint_R r\cos\theta\, r\,d\theta\,dr=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\int_{r=0}^{r=2a(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\,dr, \tag{139}$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{\cos\theta}{3}\Big[r^3\Big]_{r=0}^{r=2a(1+\cos\theta)}d\theta, \tag{140}$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta=10\pi a^3. \tag{141}$$

Παράδειγμα 19. Ἕν ἐνδιαφέρον ὁλοκλήρωμα τό ὁποῖον δέν δύναται νά ὑπολογισθῆ διά στοιχειωδῶν μεθόδων εἶναι τό

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{142}$$

Μία μέθοδος ἀντιμετωπίσεως αὐτοῦ εἶναι νά γράψωμεν

$$I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \tag{143}$$

$$=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy=\iint_{R_{xy}}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \tag{144}$$

ὅπου ἡ περιοχή ὁλοκληρώσεως R_{xy} εἶναι ὁλόκληρον τό πρῶτον τεταρτημόριον τοῦ xy-ἐπιπέδου.

Μετασχηματίζοντες τήν (144) εἰς πολικάς συντεταγμένας, εὑρίσκομεν

$$I^2 = \iint_{R_{r\theta}} e^{-r^2} r\, d\theta\, dr \tag{145}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2} r\, dr = \int_0^{\pi/2} \left[-\tfrac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta \tag{146}$$

$$= \pi/4. \tag{147}$$

Ὅθεν τελικῶς

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{148}$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ R_{xy} καί $R_{r\theta}$ εἶναι ἀπεριόριστοι (μή φραγμέναι), πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν συμβαίνει μέ τάς περιοχάς εἰς τάς ὁποίας ἀνεφέρθημεν ἀνωτέρω. Διά τοῦτο εἶναι προτιμώτερον νά ἐνργήσωμεν προσεκτικώτερον ὡς ἀκολούθως :

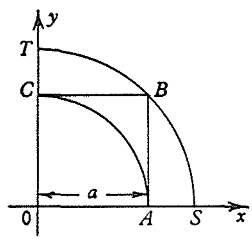
Γράφοντες

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-x^2}\, dx \tag{149}$$

ἔχομεν

$$I^2 = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a}\int_0^{a} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy. \tag{150}$$

Προφανῶς τό $\int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ εἶναι ἁπλῶς τό ὁλοκλήρωμα τῆς $e^{-(x^2+y^2)}$ ἐπί τοῦ τετραγώνου OABC πλευρᾶς α (ἰδέ Σχ. 12.22). Τώρα ἐπειδή ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις εἶναι θετική δι'ὅλα τά τά σημεῖα, τό ὁλοκλήρωμα αὐτό πρέπει νά ἔχῃ μίαν τιμήν κειμένην μεταξύ τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος ἐπί τοῦ τομέως OAC καί τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος λαμβανομένου ἐπί τοῦ τομέως OST. Ὅθεν



Σχ. 17.22.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta \int_{r=0}^{r=a} e^{-r^2} r\, dr < \int_0^{a}\int_0^{a} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$< \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta \int_{r=0}^{r=a\sqrt{2}} e^{-r^2} r\, dr. \tag{151}$$

Καθώς τό α → ∞, τά ὁλοκληρώματα ἐπί τῶν δύο τομέων ἀμφότερα τείνουν εἰς

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr,$$

καί συνεπῶς τό αὐτό ἰσχύει καί διά τό ὁλοκλήρωμα ἐπί τοῦ τετραγώνου OABC.

17.13. Ἀλλαγή Μεταβλητῶν εἰς Διπλᾶ Ὁλοκληρώματα

Ὁ μετασχηματισμός διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἀπό ὀρθογωνίους Καρτεσιανάς συντεταγμένας εἰς πολικάς συντεταγμένας, δοθείς εἰς τήν τελευταίαν παράγραφον, ἐβασίσθη ἐξ ὁλοκλήρου ἐπί γεωμετρικοῦ συλλογισμοῦ. Τώρα δίδομεν μίαν γενικήν ἀναλυτικήν μέθοδον μετασχηματισμοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀπό ἕν σύστημα ὀρθογωνίων Καρτεσιανῶν συντεταγμένων εἰς οἱονδήποτε ἄλλο σύστημα. Πράγματι, θά ἀποδείξωμεν ὅτι ἐάν αἱ x καί y συνδέωνται μέ αὐθαιρέτους συντεταγμένας u καί υ διά συναρτήσεων μετά συνεχῶν μερικῶν παραγώγων οὕτως ὥστε

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{152}$$

τότε

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R_{uv}} f[x(u, v), y(u, v)] \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv, \tag{153}$$

ὅπου R_{uv} εἶναι ἡ περιοχή ὁλοκληρώσεως εἰς τό uυ-ἐπίπεδον ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως R_{xy} εἰς τό xy-ἐπίπεδον. Ἡ ἔκφρασις $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ $\left(\text{ἐνίοτε συμβολιζομένη ὑπό } J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right)$ καλεῖται Ἰακωβιανή τοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς (152) καί ὁρίζεται ὡς

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \tag{154}$$

αἱ κάθετοι | | εἰς τήν (153) δεικνύουν ὅτι πρέπει νά ληφθῇ τό μέτρον (ἤ ἀπόλυτος τιμή) τῆς Ἰακωβιανῆς.

Διά νά ἀποδείξωμεν τήν (153), πρῶτον θέτομεν

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \tag{155}$$

ὅπου ἡ $F(x,y)$ ὁρίζεται ἐντός καί ἐπί τοῦ συνόρου τῆς R_{xy}. Ἀπό τό Θεώρημα τοῦ Green ἔχομεν

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R_{xy}} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_{C_{xy}} F(x, y)\, dy, \tag{156}$$

ὅπου C_{xy} εἶναι ἡ περικλείουσα καμπύλη (ὑποτιθεμένη ἁπλῆ) τῆς R_{xy}. Τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς (156) γράφεται καί ὡς ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἰς τό uυ-ἐπίπεδον ὡς ἑξῆς

$$\oint_{C_{xy}} F(x, y)\, dy = \pm \oint_{C_{uv}} F[x(u, v), y(u, v)] \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right), \tag{157}$$

ἡ ἐμφάνισις τῶν δύο προσήμων (+) ἤ (-) ὀφείλεται εἰς τό ὅτι ὅταν ἡ C_{xy} διανύεται κατά τήν θετικήν φοράν, ἡ $C_{uυ}$ δύναται νά διανύεται κατά τήν θετικήν ἤ ἀρνητικήν φοράν. Ἡ (157) τώρα γράφεται

$$\oint_{C_{xy}} F(x, y)\, dy = \pm \oint_{C_{uv}} [P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv], \tag{158}$$

ὅπου

$$P(u, v) = F[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial y}{\partial u} \tag{159}$$

καί

$$Q(u, v) = F[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{160}$$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Green

$$\oint_{C_{uv}} \{P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv\} = \iint_{R_{uv}} \left\{\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v}\right\} du\, dv, \tag{161}$$

ἡ ὁποία δι' ἀντικαταστάσεως τῶν (159) καί (160) εἰς τό δεύτερον μέλος τῆς (161) δίδει

$$\begin{aligned} &\oint_{C_{uv}} \{P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv\} \\ &\qquad = \iint_{R_{uv}} \left\{\frac{\partial}{\partial x} F[x(u, v), y(u, v)]\right\} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv, \end{aligned} \tag{162}$$

ὅπου ἡ $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ὁρίζεται ἀπό τήν (154).

Τελικῶς χρησιμοποιοῦντες τήν (155) λαμβάνομεν

$$\oint_{C_{uv}} \{P(u,v)\,du + Q(u,v)\,dv\} = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),\, y(u,v)] \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv, \qquad (163)$$

ἐκ δέ τῶν (156) καί (158) ἕπεται ἡ

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \pm \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),\, y(u,v)] \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv. \qquad (164)$$

Τώρα θέτοντες f(x,y) = 1, τό ἀριστερόν μέλος τῆς (164) δίδει τό ἐμβαδόν τῆς R_{xy} τό ὁποῖον εἶναι κατ'οὐσίαν θετικόν. Ὡς ἐκ τούτου, ἐάν ἡ Ἰακωβιανή εἶναι πάνοτε θετική εἰς τό R_{uv}, τό (+) πρόσημον πρέπει νά ληφθῇ εἰς τήν (164). Ὁμοίως ἐάν ἡ Ἰακωβιανή εἶναι πάντοτε ἀρνητική εἰς τήν R_{uv}, τό (-) πρόσημον πρέπει νά ληφθῇ. Ἀμφότερα τά ἀνωτέρω περιλαμβάνονται ἐάν ἡ (164) γραφῇ ὡς

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),\, y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv, \qquad (165)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Εἶναι προφανές, ὅτι τό ἀπειροστόν στοιχειῶδες ἐμβαδόν dxdy εἰς τό xy ἐπίπεδον καθίσταται

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv. \qquad (166)$$

Παράδειγμα 20. Δοθέντων τῶν μετασχηματισμῶν

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad (167)$$

ἔχομεν

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r. \qquad (168)$$

Συνεπῶς τό στοιχειῶδες ἐμβαδόν εἰς τό rθ-ἐπίπεδον τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τό dxdy τοῦ xy-ἐπιπέδου εἶναι, δυνάμει τῆς (166),

$$r\,dr\,d\theta \qquad (169)$$

ὡς εὑρέθη ἐνωρίτερον εἰς τήν 17.12.

Ὅθεν, γενικῶς

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \qquad (170)$$

Παράδειγμα 21. Δοθέντων τῶν μετασχηματισμῶν

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 4uv \qquad (171)$$

εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\,.\,4u + 2v\,.\,4v = 8(u^2+v^2). \qquad (172)$$

Συνεπῶς

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f(u^2-v^2, 4uv)\,.\,8(u^2+v^2)\,du\,dv. \qquad (173)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 17.

1. Ὑπολογίσατε τά κατωτέρω ὁλοκληρώματα

(a) $\int_C (x^2+2y)\,dx$ ἀπό (0,1) ἕως (2,3), ὅπου C εἶναι ἡ εὐθεῖα $y = x+1$,

(b) $\int_C x\,dy$ ἀπό (0,0) ἕως (π,0), ὅπου C εἶναι ἡ καμπύλη

2. Ὑπολογίσατε τό

$$\int_C \{x^2y\,dx + (x^2-y^2)\,dy\}$$

ἀπό (0,0) ἕως (1,4) ὅπου (i) C εἶναι ἡ καμπύλη $y = 4x^2$, (ii) C εἶναι ἡ εὐθεῖα $y = 4x$.

3. Δείξατε ὅτι τό

$$\int_C \{2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy\}$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς καμπύλης C καί ὑπολογίσατε αὐτό ἀπό

$(0,0)$ ἕως $(1, \frac{\pi}{2})$.

4. Ὑπολογίσατε τό

$$\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

περί τήν καμπύλην $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, (a = σταθερά).

5. Ὑπολογίσατε τό

$$\int_C (x^2 - xy)\,ds$$

ἀπό $(0,4)$ ἕως $(4,0)$, ὅπου C εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2 = 16$.

6. Ὑπολογίσατε τό

$$\int_C (y^2\,dx + xy\,dy + zx\,dz)$$

ἀπό $A(0,0,0)$ ἕως $B(1,1,1)$ ὅπου (i) C εἶναι ἡ εὐθεῖα ἀπό A ἕως B, (ii) C εἶναι ἡ τεθλασμένη γραμμή ἀπό A ἕως B ἡ ἀποτελουμένη ἀπό τμήματα παράλληλα πρός τούς ἄξονας x, y καί z.

7. Δείξατε ὅτι, ἐάν $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ καί $R(x,y,z)$ εἶναι συνεχεῖς καί μονότιμοι συναρτήσεις μέ συνεχεῖς καί μονοτίμους μερικάς παραγώγους, τότε ἡ συνθήκη ἵνα τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_C [P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz]$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς C εἰς μίαν ἁπλῶς συνεκτικήν περιοχήν R εἶναι ἡ

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x.\,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}$$

διά κάθε σημεῖον τῆς R.

Ἐξ αὐτοῦ δείξατε ὅτι τό

$$\int_C \left(\frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz \right)$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς καί ὑπολογίσατε αὐτό ἀπό (0,0,1) ἕως (1,1,1).

8. (i) Ὑπολογίσατε τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\oint_C \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2+1} \right),$$

ὅπου C εἶναι τό σύνορον τοῦ μικροτέρου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = 1$ ὡς προκύπτει ἐκ τῆς τομῆς του μέ τήν χορδήν $x+y = 1$.

(ii) Δείξατε ὅτι τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{PQ} (yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς ὁλοκληρώσεως καί ὑπολογίσατε αὐτό ὅταν τά P καί Q εἶναι τά σημεῖα (1,1,2) καί (3,2,1), ἀντιστοίχως. **(L.U.)**

9. Ὑπολογίσατε τά

(a) $\iint (x^2-4xy-y^2)^2\,dx\,dy$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = a^2$.

(b) $\iint x\,dx\,dy$ ἐπί τοῦ πρώτου τεταρτημορίου τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10. Διά καταλλήλου μετασχηματισμοῦ τῶν μεταβλητῶν x καί y εἰς ἕν ἄλλο ζεῦγος μεταβλητῶν, ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx\,dy}{\{1+\sqrt{(x^2+y^2)}\}^5} \qquad \text{(C.U.)}$$

11. Θέτοντες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ἀποδείξατε ὅτι

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2-2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$(0 \leqq \alpha < \pi).$$ (C.U.)

12. Εἰς ἑκάστην τῶν κατωτέρω, (α) ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα,(β) σχεδιάσατε τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως, (γ) γράψατε τό ὁλοκλήρωμα μέ τήν τάξιν ὁλοκληρώσεως ἀντεστραμμένην, (δ) ὑπολογίσατε ἐκ νέου καί συγκρίνατε μέ τό (α) :

$$\text{(i)} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy, \qquad \text{(ii)} \int_0^a dx \int_0^x (x^2+y^2)\, dy,$$

$$\text{(iii)} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} xy^2\, dy, \qquad \text{(iv)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \cos\theta\, dr.$$

13. Δείξατε, διά διαγράμματος, τήν περιοχήν ἐπί τῆς ὁποίας τό ἀκόλουθον ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται

$$\int_0^a dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)}}.$$

Μετασχηματίσατε εἰς πολικάς συντεταγμένας καί ἐξ αὐτοῦ δείξατε ὅτι ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι

$$\frac{a}{b}\sinh^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$ (L.U.)

14. Δι'ἀντικαταστάσεως

$$x = a\sin\theta\cos\phi,$$

$$y = b\sin\theta\sin\phi,$$

ἤ δι'ἑτέρας μεθόδου, ὑπολογίσατε τό

$$\iint \frac{x^2y\, dx\, dy}{\sqrt{\{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)\}}}$$

ἐντός τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

καί εἰς τό θετικόν τεταρτημόριον. (C.U.)

15. (i) Μετασχηματίσατε εἰς πολικάς συντεταγμένας καί ὑπολογίσατε τό

$$\int_0^{a/\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{(a^2-x^2)}} \sqrt{(x^2+y^2)}\, dy.$$

(ii) Ἀντιστρέψατε τήν τάξιν ὁλοκληρώσεως καί ἐξ αὐτοῦ ὑπολογίσατε τό

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x} \frac{x}{y}\, dy. \qquad \text{(L.U.)}$$

16. Δείξατε χρησιμοποιοῦντες ἕν διάγραμμα τήν περιοχήν ἐπί τῆς ὁποίας τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} \frac{x+y}{x^2} e^{x+y}\, dx$$

ἐλήφθη· ἐφαρμόσατε τόν μετασχηματισμόν $u = x+y$, $\upsilon = \frac{y}{x}$ εἰς τό ὁλοκλήρωμα αὐτό καί διά τῆς μεθόδου αὐτῆς ἤ ἄλλης ὑπολογίσατε αὐτό. **(L.U.)**

17. Ἀποδείξατε ὅτι ὁ ὄγκος V ὁ ἐγκλειόμενος ὑπό τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2$ καί τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2 = \alpha y$ δίδεται ὑπό τῆς

$$V = 2\iint \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\, dx\, dy,$$

τοῦ ὁλοκληρώματος λαμβανομένου ἐπί τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = \alpha y$ Μετασχηματίσατε τό ὁλοκλήρωμα εἰς πολικάς συντεταγμένας καί ἐξ αὐτοῦ δείξατε ὅτι

$$V = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right). \qquad \text{(L.U.)}$$

18. Δείξατε, χρησιμοποιοῦντες τό θεώρημα τοῦ Green, ὅτι ἐάν ἡ $V(x,y)$ ὁρίζεται καί ἔχη συνεχεῖς πρώτας καί δευτέρας μερικάς παραγώγους ἐντός καί ἐπί τοῦ συνόρου C μιᾶς περιοχῆς R, τότε

$$\oint_C \frac{dV}{dn}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dx\, dy,$$

ὅπου $\frac{dV}{dn}$ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς V ὡς πρός τήν πρός τά ἔξω κάθετον εἰς τυχόν σημεῖον τῆς C καί s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου ἐπί τῆς C ἀπό τινος αὐθαιρέτου σημείου.

Δείξατε ἐπίσης ὅτι ἐάν $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$,

$$\oint_C V\frac{dV}{dn}\,ds=\iint_R\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

καί ὅτι ἐάν $\frac{dV}{dn}=0$ κατά μῆκος τῆς C, τότε ἡ V εἶναι σταθερά ἐντός καί ἐπί τοῦ συνόρου τῆς R.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ ΣΥΓΓΕΝΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

18.1. Ἡ Συνάρτησις Γάμμα

Ὅπως ἀκριβῶς μέ τάς ἐλλειπτικάς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἀνεπτύχθησαν εἰς τό Κεφ. 16, ἡ συνάρτησις γάμμα συνήθως ὁρίζεται ὑφ' ἑνός ὁλοκληρώματος. Ὅπως θά ἴδωμεν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον, ὁρισμοί ὄχι μέσῳ ὁλοκληρωμάτων εἰσαχθέντες ὑπό τῶν Euler καί Weierstrass εἶναι συχνά χρήσιμοι. Ἐπί τοῦ παρόντος ὁρίζομεν τήν συνάρτησιν Γάμμα Γ(x) διά τοῦ

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \tag{1}$$

ὅπου, διά τήν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος, ἡ $x > 0$ (ἰδέ Κεφ. 4 , § 4.8). Ὁλοκληρώνοντες τήν (1) κατά μέρη λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt &= \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= x\Gamma(x), \quad (x > 0).\end{aligned} \tag{2}$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν ἀναγωγικήν σχέσιν ὅταν $x = n$, ὅπου n εἶναι θετικός ἀκέραιος $\geqslant 1$, ἔχομεν

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma(1), \tag{3}$$

ἡ ὁποία, ἐφ'ὅσον κατά τήν (1),

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1, \tag{4}$$

δίδει τό σημαντικόν ἐξαγόμενον

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{5}$$

Ἡ συνάρτησις Γ δύναται ὡς ἐκ τούτου νά θεωρηθῇ ὡς γενίκευσις τῆς παραγοντικῆς συναρτήσεως εἰς τήν ὁποίαν ἀνάγεται ὅταν ἡ x εἶναι θετικός ἀκέραιος.

Ἡ τιμή τῆς $\Gamma(\frac{1}{2})$ ἀπαιτεῖται συχνά καί δύναται νά εὑρεθῇ εὐθέως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt \tag{6}$$

θέτοντες $t = u^2$ καί ὁλοκληρώνοντες. Συνεπῶς χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμα τοῦ Παραδ. 19, Κεφ. 17, λαμβάνομεν

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Ἐν συνεχείᾳ χρησιμοποιοῦντες τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα λαμβάνομεν τάς τιμάς τῆς συναρτήσεως δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ $x = \frac{n}{z}$, n θετικός ἀκέραιος, βάσει τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως (2).

Ἐπί παραδείγματι,

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{8}$$

καί

$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{15}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9}$$

Ἡ ἀναγωγική σχέσις (2) χρησιμοποιεῖται ἐπίσης καί διά τόν ὁρισμόν τῆς συναρτήσεως Γάμμα δι'ἀρνητικάς τιμάς τῆς x. Πράγματι γράφοντες τήν (2) ὡς

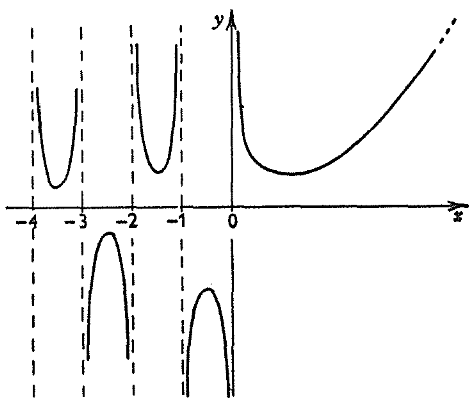
$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{10}$$

λαμβάνομεν π.χ.,

$$\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{(-\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}. \tag{11}$$

Ἐπίσης ἕπεται ἐκ τῆς (10) ὅτι ἡ Γ(x) ἀπειρίζεται διά x = 0 καί ὡσαύτως δι'ὅλας τάς ἀρνητικάς ἀκεραίας τιμάς τοῦ x. Ἀξίζει νά τονισθῇ ὅτι αἱ τιμαί τῆς Γ(x) δι'ἀρνητικάς τιμάς τοῦ x δέν δίδονται ἐκ τῆς ὁλοκληρωματικῆς σχέσεως (1) ἀλλά ἐκ τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως (10). Τό διάγραμμα τῆς Γ(x) διά θετικάς καί ἀρνητικάς τιμάς τοῦ x δεικνύεται εἰς τό Σχ. 18.1. (Διά πίνακας τῆς Γ-συναρτήσεως ἰδέ Jahnke and Emde "Πίνακες Συναρτήσεων". Dover Publications, 1945).

Θά δείξωμεν πῶς μερικά ὁλοκληρώματα δύνανται νά ὑπολογισθοῦν τῇ βοηθείᾳ Γ-συναρτήσεων.



Σχ. 18.1.

Παράδειγμα 1. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty x^{5\cdot 2} e^{-x^2}\, dx \tag{12}$$

θέτομεν $x^2 = t$ καί λαμβάνομεν

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\cdot 1}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma(3{\cdot}1) = \frac{2{\cdot}1}{2}\,\Gamma(2{\cdot}1) = \frac{(2{\cdot}1)(1{\cdot}1)}{2}\Gamma(1{\cdot}1)$$

$$= \frac{1}{20}(2{\cdot}1)(1{\cdot}1)\Gamma(0{\cdot}1). \tag{13}$$

Ἐπειδή ἀπό τούς πίνακας Γ(0.1) = 9.5135, εὑρίσκομεν I = 1.10 ἀκριβές ὡς πρός δύο δεκαδικά ψηφία.

Παράδειγμα 2. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό

$$I=\int_0^1 \sqrt{\left\{\log_e\left(\frac{1}{x}\right)\right\}}\,dx \tag{14}$$

θέτομεν $x = e^{-t}$ καί λαμβάνομεν χρησιμοποιοῦντες τήν (8)

$$I=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{15}$$

Παράδειγμα 3. Ἐάν

$$I=\int_0^{\pi/2}(\tan^3\theta+\tan^5\theta)\,e^{-\tan^2\theta}\,d\theta \tag{16}$$

τότε, θέτοντες $\tan^2\theta = t$, λαμβάνομεν

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}. \tag{17}$$

18.2. Ἐναλλακτικαί Μορφαί τῆς Γ(x)

Ἕνας ἄλλος ὁρισμός τῆς συναρτήσεως Γ(x) ὀφειλόμενος εἰς τόν Euler εἶναι

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right\}. \tag{18}$$

Ἡ ἔκφρασις αὐτή ἰσχύει διά θετικάς καί ἀρνητικάς τιμάς τοῦ x καί δεικνύει εὐκρινῶς τά ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς Γ(x) εἰς τά x = = 0, -1, -2,... καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Δύναται ἐπίσης νά θεωρηθῇ ἰσοδύναμος τοῦ ὁρισμοῦ (1) διά x > 0. Ἀπό τήν (18) εὑρίσκομεν καί πάλιν

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{nx}{(x+n+1)}\cdot\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{nx}{x+n+1}\right\}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right\}\\&=x\Gamma(x).\end{aligned} \tag{19}$$

Ὁ ὁρισμός τοῦ Euler δύναται ἐπίσης νά γραφῇ κάπως διαφορετικά

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \left\{ n^x \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{x}{m}\right)^{-1} \right\}, \tag{20}$$

ἤ

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n\to\infty} \left\{ n^{-x} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{x}{m}\right) \right\}, \tag{21}$$

ὅπου

$$\prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{x}{m}\right) = (1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right). \tag{22}$$

Πολλαπλασιάζοντες τό δεξιόν μέλος τῆς (21) ἐπί 1 ὑπό τήν μορφήν

$$1 = \left(\lim_{n\to\infty} e^{[1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/n)]x}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} e^{-x/m}\right) \tag{23}$$

οὕτως ὥστε

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\left(\lim_{n\to\infty} e^{[1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/n)-\log_e n]x}\right)\left\{\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\}. \tag{24}$$

Ὅμως ἀπό τό Κεφ. 5, § 5.3,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}-\log_e n\right) = \gamma, \tag{25}$$

ὅπου γ εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Euler (≃ 0,577), καί ἡ (24) γίνεται

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\}, \tag{26}$$

ὅπου τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{m=1}^{\infty}$ ὁρίζεται ὡς $\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n}$.

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις τῆς Γ-συναρτήσεως εἶναι γνωστή ὡς ὁρισμός κατά Weierstrass.

18.3. Ἡ Συνάρτησις Βῆτα

Ἡ συνάρτησις Βῆτα B(m,n) ὁρίζεται ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{27}$$

τό ὁποῖον συγκλίνει ἐάν m > 0, n > 0. Εἶναι κατ'ἀνάγκην συμμετρική ὡς πρός m καί n καθ'ὅσον θέτοντες 1-x = u ἔχομεν

$$B(n, m) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\, dx = -\int_1^0 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, du$$

$$= B(m, n). \tag{28}$$

Μία ἐναλλακτική μορφή τῆς συναρτήσεως Βῆτα λαμβανομένη ἐκ τῆς (27) θέτοντες x = $\sin^2\theta$ εἶναι ἡ

$$B(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta, \tag{29}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἀναγωγικός τύπος μεταξύ B(m,n) καί B(m-1,n-1). Ὁλοκληρώνοντες κατά μέρη λαμβάνομεν

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-3}\theta\, d\theta, \tag{30}$$

καί συνεπῶς

$$B(m, n) = 2\,\frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-3}\theta\, d\theta$$

$$= 2\,\frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-3}\theta\, d\theta$$

$$= 2\,\frac{(n-1)(m-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-3}\theta \cos^{2m-3}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}\quad B(m-1, n-1). \tag{31}$$

Ὅταν οἱ m καί n εἶναι ἀμφότεροι θετικοί ἀκέραιοι, ἐφαρμογή τῆς (31) κατ᾽ἐπανάληψιν δίδει

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\, B(1, 1), \tag{32}$$

ὅπου ἀπό τήν (27), B(1,1) = 1. (Ὁμοίως ἀπό τήν (29) εὑρίσκομεν $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$).

18.4. Σχέσις μεταξύ τῶν Συναρτήσεων Γάμμα καί Βῆτα

Ἐκ τῶν

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}\, dt, \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}\, ds. \tag{33}$$

λαμβάνομεν

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}\,dt\int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}\,ds \tag{34}$$

$$=\iint t^{m-1}s^{n-1}e^{-(s+t)}\,ds\,dt, \tag{35}$$

ὅπου τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἀναφέρεται εἰς τό πρῶτον τεταρτημόριον τοῦ (s,t) ἐπιπέδου. Τώρα θέτοντες $t = u^2$, $s = \upsilon^2$ καί χρησιμοποιοῦντες τήν Ἰακωβιανήν τοῦ μετασχηματισμοῦ (ἰδέ Κεφ. 17 , 17.13)

$$ds\,dt=\left(\frac{\partial s}{\partial v}\cdot\frac{\partial t}{\partial u}-\frac{\partial s}{\partial u}\cdot\frac{\partial t}{\partial v}\right)du\,dv=4uv\,du\,dv, \tag{36}$$

δυνάμεθα νά μετασχηματίσωμεν τήν (35) εἰς τήν

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\iint u^{2m-1}v^{2n-1}e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv. \tag{37}$$

Χρησιμοποιοῦντες πολικάς συντεταγμένας οὕτως ὥστε $u = r\cos\theta$, $\upsilon = r\sin\theta$ καί

$$du\,dv=J\left(\frac{u,v}{r,\theta}\right)dr\,d\theta=r\,dr\,d\theta, \tag{38}$$

ἔχομεν

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\iint r^{2m+2n-1}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\, e^{-r^2}\,dr\,d\theta \tag{39}$$

$$=4\int_0^\infty r^{2m+2n-1}e^{-r^2}\,dr\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta \tag{40}$$

$$=2\int_0^\infty y^{m+n-1}e^{-y}\,dy\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta \tag{41}$$

$$=\Gamma(m+n)B(m,n). \tag{42}$$

Ὅθεν τελικῶς

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{43}$$

Τά ἀκόλουθα παραδείγματα δεικνύουν τήν χρῆσιν τῆς συναρτήσεως Βῆτα εἰς τόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 4. Ἵνα ὑπολογίσωμεν τό

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \tag{44}$$

ἀντικαθιστῶμεν $x^4 = u$, ὁπότε ἡ (44) γίνεται

$$I = \tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^{-3/4}}{\sqrt{(1-u)}}\,du = \tfrac{1}{4}B(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}. \tag{45}$$

καί ἐπειδή $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ἡ (45) γίνεται

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}. \tag{46}$$

Παράδειγμα 5. Ἵνα ὑπολογίσωμεν τό

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\,d\theta,$$

θέτομεν $\sin^2\theta = u$ καί ἔχομεν

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^{-1/4}}{\sqrt{(1-u)}}\,du = \tfrac{1}{2}B(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{5}{4})}. \tag{47}$$

Ἐπειδή $\Gamma(5/4) = 1/4\Gamma(1/4)$ καί $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ἡ (47) γίνεται

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\,d\theta = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \simeq 1{\cdot}198. \tag{48}$$

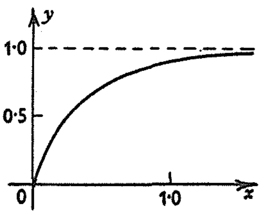
18.5. Ἡ Συνάρτησις Σφάλματος

Ἡ συνάρτησις σφάλματος erf(x) ὁρίζεται ὑπό

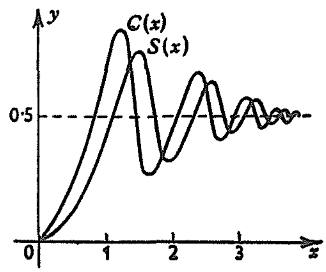
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du \tag{49}$$

καί προφανῶς ἀντιπροσωπεύει (παραλείποντες τόν παράγοντα $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$) τό ἐμβαδόν ὑπό τήν καμπύλην e^{-u^2} ἀπό $u = 0$ μέχρι $u = x$˙ παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι $\operatorname{erf}(0) = 0$ καί ὅτι $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ (ἐπειδή, κατά τήν (7) $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$). Τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως σφάλματος δεικνύεται εἰς τό Σχ. 18.2.

Στενῶς συνδεδεμέναι μέ τήν συνάρτησιν αὐτήν εἶναι αἱ συναρτήσεις C(x) καί S(x) (ὁλοκληρώματα Fresnel) ὁριζόμενα ὑπό τῶν



Σχ. 18.2.



Σχ. 18.3.

$$C(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du, \tag{50}$$

καί

$$S(x)=\int_0^x \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du. \tag{51}$$

Συνεπῶς

$$C(x)-iS(x)=\int_0^x e^{-i(\pi/2)u^2}\,du. \tag{52}$$

'Εάν ὑποτεθῆ ὅτι ἡ

$$\int_0^\infty e^{-au^2}\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{53}$$

ἀληθεύει ὅταν ὁ α εἶναι μιγαδικός, δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν C(∞) καί S(∞) γράφοντες

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}u^2\,du-i\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}u^2\,du=\int_0^\infty e^{-i(\pi/2)u^2}\,du&=\frac{1}{\sqrt{(2i)}}\\ &=\tfrac{1}{2}(1-i).\end{aligned} \tag{54}$$

Συγκρίνοντες τά πραγματικά καί φανταστικά μέρη ἑκάστου μέλους τῆς (54) ἔχομεν

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}u^2\,du=\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}u^2\,du=\frac{1}{2}. \tag{55}$$

Διαγράμματα τῶν C(x) καί S(x) δεικνύονται εἰς τό Σχ. 18.3.

18.6. Ὁ Τύπος τοῦ Stirling

Θά εὕρωμεν τώρα μίαν προσέγγισιν τῆς συναρτήσεως Γ(x+1) διά μεγάλας τιμάς τοῦ x. Θεωρήσωμεν τήν

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt \tag{56}$$

καί ἔστω $t = x+\tau\sqrt{x}$. Τότε

$$\Gamma(x+1) = \int_{-\sqrt{x}}^\infty (x+\tau\sqrt{x})^x e^{-(x+\tau\sqrt{x})} \,.\, \sqrt{x}\, d\tau, \tag{57}$$

ἤ

$$\frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}} = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-\tau\sqrt{x}}\left(1+\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)^x d\tau = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-\tau\sqrt{x}+x\log_e[1+(\tau/\sqrt{x})]}\, d\tau. \tag{58}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἀναπτύσσοντες τόν λογαριθμικόν ὅρον ἔχομεν

$$\frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\tau\sqrt{x}+x[(\tau/\sqrt{x})-(\tau^2/2x)+\dots]} d\tau$$

$$+\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\tau\sqrt{x}+x\log_e[1+(\tau/\sqrt{x})]} d\tau, \tag{59}$$

ἡ ὁποία διά μεγάλας τιμάς τῆς x γράφεται ὡς

$$\frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}} \simeq \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\, d\tau = \sqrt{(2\pi)}. \tag{60}$$

Ἐάν τώρα x = n, ὅπου n εἶναι θετικός ἀκέραιος τότε, ἐπειδή Γ(n+1) = n!, λαμβάνομεν

$$n! \simeq \sqrt{(2\pi)}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}. \tag{61}$$

Αὐτός εἶναι ὁ τύπος τοῦ Stirling διά n! ὅταν τό n εἶναι μεγάλος ἀριθμός. Ἡ εὕρεσις τῆς ἄλλης μορφῆς τοῦ τύπου

$$n! = \sqrt{(2\pi)}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}(1+\delta_n), \tag{62}$$

ὅπου $\delta_n \to 0$ τοῦ $n \to \infty$, ἀπαιτεῖ λεπτοτέραν τεχνικήν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 18.

1. Ἐάν Γ(1,1) = 0,951, εὕρετε τάς Γ(4,1) καί Γ(-3,9).

2. Ἀποδείξατε ὅτι

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\,dt}{(1+t)^{m+n}} = B(m, n), \quad (m, n > 0),$$

καί ἐξ αὐτοῦ δείξατε ὅτι

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\,d\theta = \tfrac{1}{2}B(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}).$$

3. Δείξατε ὅτι

(α) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sech}^8 x\,dx = \tfrac{16}{35},$ (β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \tfrac{1}{3}B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}),$

(γ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$

4. Δείξατε ὅτι ἡ τιμή τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$\iint x^{2/3} y^{2/5}\,dx\,dy$$

λαμβανομένου ἐπί τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = \alpha^2$ εἶναι

$$\frac{a^{46/15}\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{7}{10})}{\Gamma(\frac{38}{15})}$$ (L.U)

5. Δοθέντος ὅτι διά μή ἀκεραίας καί διαφόρους τοῦ μηδενός τιμάς τοῦ x

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right),$$

δείξατε, χρησιμοποιοῦντες τόν ὁρισμόν τοῦ Euler διά τήν Γ(x) ὅτι

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

6. Ἀπό τόν ὁρισμόν τοῦ Euler τῆς Γ(x) δείξατε ὅτι

$$\frac{d}{dx}\{\log_e \Gamma(x+1)\} = \lim_{n\to\infty}\left(\log_e n - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots - \frac{1}{x+n+1}\right),$$

καί ἐξ αὐτοῦ ὅτι

$$\gamma = -\left\{\frac{d}{dx}\Gamma(x+1)\right\}_{x=0} = \int_{\infty}^{0} (\log_e t)e^{-t}\,dt.$$

7. Δείξατε, χρησιμοποιοῦντες τήν συνάρτησιν Βῆτα, ὅτι

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2 = 4\sqrt{(\pi)}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

ὅπου

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)}}$$

εἶναι ἕν πλῆρες ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους.

8. Ἐάν

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{and} \quad \phi(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ἐπαληθεύσατε τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα

(α) $\phi(x) = x - \dfrac{x^3}{3\,.\,1!} + \dfrac{x^5}{5\,.\,2!} - \dfrac{x^7}{7\,.\,3!} + \ldots,$

(β) $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} + \displaystyle\int_{\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt,$

(γ) $\displaystyle\int_{\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2x}\,e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int_{\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,e^{-t^2}\,dt.$

Ἐξ αὐτῶν ἤ ἄλλως συμπεράνατε ὅτι

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{3}{2^3x^5} - \ldots\right). \qquad \text{(L.U.)}$$

9) Θέτοντες x = y εἰς τήν σχέσιν

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du,$$

δείξατε ὅτι

$$\frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\tau)^{x-1}\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau = 2^{1-2x}\,\frac{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}.$$

'Εξ αὐτοῦ χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμα

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

(γνωστόν ὡς "τύπος διπλασιασμοῦ"), δείξατε ὅτι

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \pi\sqrt{2}.$$

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ

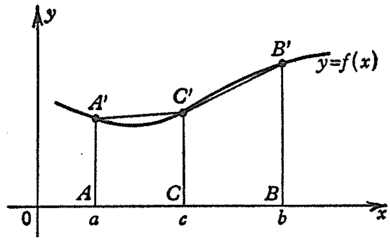
19.1. Ὁ κανών τοῦ Τραπεζίου

Ἀνεφέρθη εἰς προηγούμενα κεφάλαια ὅτι ὁ ὑπολογισμός ἑνός ὁλοκληρώματος συναρτήσει γνωστῶν συναρτήσεων εἶναι πολλάκις ἀδύνατος. Προσέτι, εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις δύναται νά ὁρισθῇ μόνον διά συνόλου τιμῶν διδομένων εἰς πίνακα. Διά νά ἀντιμετωπίσωμεν τάς δυσκολίας αὐτάς καθίσταται ἀναγκαία μία ἀριθμητική μέθοδος δίδουσα κατά προσέγγισιν τήν τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος. Προφανῶς μία τῶν ἁπλουστέρων μεθόδων νά ἐπιτύχωμεν αὐτό εἶναι νά ἑρμηνεύσωμεν τό ὁλοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ γραφικῶς (ἰδέ Κεφ. 4. Τ.1) ὡς ἐμβαδόν μεταξύ τῆς καμπύλης $y = f(x)$, τοῦ ἄξονος τῶν x καί τῶν εὐθειῶν $x = \alpha$, $x = b$ καί νά ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν τοῦτο ὅσον ἀκριβέστερον δυνατόν. Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ἡ καμπύλη $y = f(x)$, ὡς δεικνύεται εἰς τό Σχ. 19.1 . Ἐν συνεχείᾳ, διά νά εὕρωμεν μίαν προσέγγισιν τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ φέρομεν τάς εὐθείας $A'C'$ καί $C'B'$, καί ὑπολογίζομεν τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τραπεζίων $ACC'A'$ καί $CBB'C'$ Ἐάν τώρα ὡς σημεῖον C ἐκλεγῇ τό μέσον τοῦ διαστήματος (α,b), οὕτως ὥστε $AC = CB$, τότε

$$\text{ἐμβαδόν}\, ACC'A' = \frac{h}{2}(AA'+CC') = \frac{h}{2}\left\{f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \tag{1}$$

καί

$$\text{ἐμβαδόν}\, CBB'C' = \frac{h}{2}(CC'+BB') = \frac{h}{2}\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \tag{2}$$



Σχ. 19.1.

῞Οθεν προσθέτοντες τάς (1) καί (2) ἔχομεν

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left\{f(a)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \tag{3}$$

῾Ο ἀνωτέρω τύπος, συνήθως γνωστός ὡς κανών τοῦ τραπεζίου, δίδει μίαν καλήν προσέγγισιν τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος ὅταν ἡ καμπύλη y = f(x) παρεκκλίνη ἐλαφρῶς ἀπό τάς εὐθείας A΄C΄, C΄B΄. ῞Οταν ὅμως αἱ παρεκκλίσεις εἶναι σημαντικαί τότε διά νά ἐπιτύχωμεν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν συνηθίζεται νά διαιροῦμεν τό ἐμβαδόν ὑπό τήν καμπύλην εἰς μεγαλύτερον (ἄρτιον) ἀριθμόν τραπεζίων μικροτέρου πλάτους καί ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζομεν τήν (3) δι᾽ἕκαστον ζεῦγος. ῾Ως παράδειγμα τοῦ κανόνος τοῦ τραπεζίου, θεωροῦμεν τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ἑνός ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ ὁποίου ἡ τιμή εἶναι ἀκριβῶς γνωστή.

Παράδειγμα 1. ᾿Εάν

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_1^3 \frac{dx}{x^2}, \tag{4}$$

τότε διαιροῦντες τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως εἰς δύο μέρη ἕκαστον πλάτους h(=1) ἔχομεν ἐκ τῆς (3)

$$I \simeq \frac{1}{2}\{f(1)+2f(2)+f(3)\} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{4}+\frac{1}{9}\right) = 0{\cdot}81. \tag{5}$$

Αὕτη πρέπει νά συγκριθῇ μέ τήν ἀκριβῆ τιμήν 2/3. Μία καλυτέρα προσέγγισις δύναται νά προκύψῃ διά διαιρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ ὑπό τήν καμπύλην εἰς τέσσερα μέρη ἕκαστον πλάτους h(=1/2) καί ἐφαρμογῆς τῆς (3) εἰς ἕκαστον ζεῦγος. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν

$$I = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\{f(1)+2f(1{\cdot}5)+f(2)\}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\{f(2)+2f(2{\cdot}5)+f(3)\} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1+\frac{2}{2{\cdot}25}+\frac{1}{4}\right\}+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}+\frac{2}{6{\cdot}25}+\frac{1}{9}\right\}, \tag{7}$$

$$= 0{\cdot}70.$$

19.2. Ὁ Κανών τοῦ Simpson

Μία καλυτέρα προσέγγισις τοῦ ἐμβαδοῦ,ὡς φαίνεται εἰς τό Σχ.19.1, δύναται νά ληφθῇ ὡς ἀκολούθως. Ὑποθέσωμεν ὅτι x = c εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου C οὕτως ὥστε α = c-h, b = c+h. Ἐν συνεχείᾳ γράφοντες x = c+y, ἀναπτύσσοντες κατά Taylor καί ὁλοκληρώνοντες ἕκαστον ὅρον ἰδιαιτέρως λαμβάνομεν

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} f(c+y)\,dy \tag{8}$$

$$= \int_{-h}^{h}\left\{f(c)+yf^{(1)}(c)+\frac{y^2}{2!}f^{(2)}(c)+\ \dots\ +\frac{y^r}{r!}f^{(r)}(c)+\ \dots\right\}dy \tag{9}$$

$$= 2h\left\{f(c)+\frac{h^2f^{(2)}(c)}{3!}+\frac{h^4f^{(4)}(c)}{5!}+\ \dots\ +\frac{h^{2r}f^{(2r)}(c)}{(2r+1)!}+\ \dots\right\}, \tag{10}$$

ὅπου, γενικῶς, $f^{(r)}(c)$ εἶναι ἡ τιμή τοῦ $\frac{d^r f}{dx^r}$ εἰς τό σημεῖον x = = c.

Τώρα, ἐφ'ὅσον ἀπό τήν σειράν Taylor ἔχομεν

$$f(c+h) = f(c)+hf^{(1)}(c)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(c)+\ \dots\ +\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(c)+\ \dots \tag{11}$$

$$f(c-h) = f(c)-hf^{(1)}(c)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(c)+\ \dots\ +\frac{(-1)^r h^r}{r!}f^{(r)}(c)+\ \dots, \tag{12}$$

ἕπεται ὅτι ἰσχύει καί ἡ

$$f(c+h)+f(c-h) = 2\left\{f(c)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(c)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c)+\ \dots\right.$$

$$\left.+\frac{h^{2r}}{(2r)!}f^{(2r)}(c)+\ \dots\right\}. \tag{13}$$

Ὅθεν παραλείποντες ὅρους περιλαμβάνοντας h^4 καί ὑψηλοτέρας δυνάμεις τοῦ h εἰς τήν (10) καί (13) καί ἀπαλείφοντες τήν $f^{(2)}(c)$, εὑρίσκομεν τόν τύπον τοῦ Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq 2h\left\{f(c)+\frac{h^2}{3!}f^{(2)}(c)\right\} \tag{14}$$

$$\simeq 2h\left\{f(c)+\frac{h^2}{3!}\left(\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}\right)\right\}, \tag{15}$$

$$=\frac{h}{3}\{f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\}, \tag{16}$$

$$=\frac{h}{3}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \tag{17}$$

Τό εἰσερχόμενον σφάλμα κατά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος προσεγγιστικῶς κατ'αὐτόν τόν τρόπον εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἐάν

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}+E, \tag{18}$$

τότε

$$E \simeq -\frac{h^4}{180}[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)], \tag{19}$$

ὅπου, ὅπως καί προηγουμένως, $f^{(3)}(b)$ καί $f^{(3)}(\alpha)$ ἀντιπροσωπεύουν τάς τιμάς τοῦ $\frac{d^3f}{dx^3}$ ὅταν x = b καί x = α, ἀντιστοίχως.

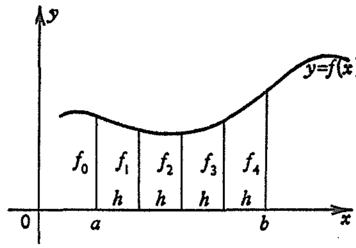
Ὅπως καί μέ τόν κανόνα τοῦ Τραπεζίου, συνήθως λαμβάνομεν μίαν περισσότερον ἀκριβῆ τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος διαιροῦντες τό ἐμβαδόν ὑπό τήν καμπύλην μεταξύ x = α καί x = b εἰς μεγαλύτερον ἀριθμόν (ἄρτιον) λωρίδων καί ἐφαρμόζοντες τήν (17) εἰς ἕκαστον διαδοχικόν ζεῦγος. Τοιουτοτρόπως ἐάν $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}, f_n$ εἶναι αἱ τιμαί τῆς f(x) εἰς τά x = α, α+h, α+2h,...α+(k-1)h, α+kh(=b), ὅπου k εἶναι ἄρτιος ἀκέραιος, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\{f_0+f_n+4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1}) +2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})\}. \tag{20}$$

Ἐπί παραδείγματι, ὁ κανών τοῦ Simpson μέ πέντε τεταγμένας (ἤτοι τέσσερεις λωρίδες) εἶναι

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\{f_0+f_4+4(f_1+f_3)+2f_2\} \tag{21}$$

(ἰδέ Σχ. 19.2).



Σχ. 19.2.

19.3. Ἐφαρμογαί τοῦ Κανόνος τοῦ Simpson

Παράδειγμα 2. Θεωροῦμεν τόν ὑπολογισμόν ἀριθμητικῶς τοῦ ὁλοκληρώματος

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)}} \tag{22}$$

χρησιμοποιοῦντες τόν κανόνα τοῦ Simpson μέ πέντε τεταγμένας. Ὡς ὡρίσθη εἰς τό Κεφ. 16, § 16.1, τό ὁλοκλήρωμα εἶναι τό πλῆρες ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους K(1/√2) τοῦ ὁποίου ἡ τιμή (ἐκ πίνακος ληφθεῖσα) εἶναι 1,854. Διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ κανόνος τοῦ Simpson διαιροῦμεν τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως (0,π/2) εἰς τέσσερα μέρη οὕτως ὥστε h = π/8 καί ὑπολογίζομεν τήν ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν $f(\theta) = (1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)^{-1/2}$ εἰς τά πέντε σημεῖα θ = = 0, π/8, π/4, 3π/8 καί π/2.

Αἱ τιμαί δίδονται κατωτέρω

θ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(\theta)$	1·000	1·0387	1·1547	1·3206	1·4142

Ὅθεν χρησιμοποιοῦντες τήν (21) ἔχομεν

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)}}$$

$$\simeq \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{8}\{1+1{\cdot}4142+4(1{\cdot}0387+1{\cdot}3206)+2(1{\cdot}1547)\} \tag{23}$$

$$\doteq \frac{\pi}{24}\times 14{\cdot}1608,$$

$$= 1{\cdot}854. \tag{24}$$

Παράδειγμα 3. Δοθέντων τῶν ἀκολούθων ἐννέα ζευγῶν τιμῶν (x,y)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2·061	2·312	2·819	3·106	3·670	4·721	6·103	7·950	9·942

δυνάμεθα εὐκόλως νά ὑπολογίσωμεν $\int_1^9 y\,dx$ χρησιμοποιοῦντες τήν (20) 'Επειδή n = 1 ἔχομεν

$$\int_1^9 y\,dx \simeq \frac{1}{3}\{2{\cdot}061+9{\cdot}942+4(2{\cdot}312+3{\cdot}106+4{\cdot}721+7{\cdot}950)$$
$$+2(2{\cdot}819+3{\cdot}670+6{\cdot}103)\} = 36{\cdot}514. \tag{25}$$

19.4. Μέθοδος 'Αναπτύξεως εἰς Σειράν

Ὅταν μία συνάρτησις f(x) δύναται νά ἀναπτυχθῆ ὡς δυναμοσειρά τῆς x, τότε ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν ἐπί μέρους ὅρων αὐτῆς εἶναι ἐπιτρεπτή (ἰδέ Κεφ. 5, § 5.10) καί ὁ ὑπολογισμός τοῦ $\int f(x)\,dx$ ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα σειρᾶς. Αὐτό ἐπεξηγεῖται ὑπό τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 4. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό

$$I \doteq \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{26}$$

χρησιμοποιοῦμεν τήν ἀνάπτυξιν κατά Maclaurin

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \tag{27}$$

καί γράφομεν

$$I=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ \dots\right)dx \tag{28}$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}-\frac{x^7}{35280}+\ \dots\right]_0^1 \tag{29}$$

$$=\left[1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\ \dots\right]\simeq 0{\cdot}946. \tag{30}$$

Μεγαλυτέρα ἀκρίβεια δύναται νά ἐπιτευχθῇ δι'ἀθροίσεως περισσοτέρων ὅρων τῆς σειρᾶς.

Παράδειγμα 5. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό

$$I=\int_0^2\sqrt{(8+x^3)}\,dx \tag{31}$$

ἀναπτύσσομεν τήν ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν χρησιμοποιοῦντες τό διωνυμικόν θεώρημα καί ἔχομεν

$$I=2\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{\left\{1+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right\}}\,dx \tag{32}$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^2\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^5+\ \dots\right\}dx. \tag{33}$$

Ὅθεν ὁλοκληρώνοντες ὅρον πρός ὅρον ἔχομεν

$$I=2\sqrt{2}\left[x+\frac{x^4}{64}-\frac{x^7}{3584}+\ \dots\right]_0^2 \tag{34}$$

$$=2\sqrt{2}\left[2+\frac{1}{4}-\frac{1}{28}+\ \dots\right]\simeq 6{\cdot}25. \tag{35}$$

Παράδειγμα 6. Τό ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα τοῦ Παραδείγματος 2 δύναται ἐπίσης νά ὑπολογισθῆ διά τῆς μεθόδου ἀναπτύξεως κατά σειράν. Ἵνα ἐπιτύχωμεν αὐτό ἀναπτύσσομεν τήν ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν βάσει τοῦ διωνυμικοῦ θεωρήματος καί λαμβάνομεν

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^2\right. \tag{36}$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^3+\ldots\Big\}\, d\theta. \tag{37}$$

Ὅθεν ὁλοκληρώνοντες ὅρον πρός ὅρον καί χρησιμοποιοῦντες τόν τύπον τοῦ Wallis

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\, dx=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3\,.\,1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\,.\,2}\,.\,\frac{\pi}{2}, \tag{38}$$

ὅπου n εἶναι ἄρτιος ἀκέραιος, ἔχομεν

$$I=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{8}+\frac{9}{256}+\frac{25}{2048}+\ldots\right\}. \tag{39}$$

Λαμβάνοντες μόνον τούς πρώτους τέσσερεις ὅρους εὑρίσκομεν $I\simeq 1{,}843$, τό ὁποῖον εἶναι ἀρκετά πλησίον τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς 1,845 (κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ). Εἰς τό παράδειγμα αὐτό ἡ ὅρον πρός ὅρον ὁλοκλήρωσις πρέπει νά δικαιολογηθῆ ἐπειδή ἡ σειρά εἰς τήν (37) δέν εἶναι δυναμοσειρά ὡς πρός θ. Ἐπειδή ὅμως δι'αὐτό χρειαζόμεθα τήν ἔννοιαν τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως (ἰδέ Κεφ. 5, § 5.11) θά ἀποδεχθῶμεν τήν ὀρθότητα τοῦ ἀνωτέρω χωρίς ἀπόδειξιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 19.

1. Ὑπολογίσατε τά ἀκόλουθα ὁλοκληρώματα μέ ἀκρίβειαν τριῶν δεκαδικῶν ψηφίων χρησιμοποιοῦντες τόν κανόνα τοῦ Simpson μέ πέντε τεταγμένας.

$(a)\ \int_0^{\pi/2}\sqrt{(\sin\theta)}\, d\theta,$ $\quad(b)\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{(4+\sin^2\theta)}\, d\theta,$

$(c)\ \int_0^{0\cdot 8}e^{-x^2}\, dx,$ $\quad(d)\ \int_2^3\frac{dx}{1+x^4},$

$(e)\ \int_0^{\pi/2}\cos(\cos\theta)\, d\theta,$ $\quad(f)\ \int_0^{\pi}\sqrt{(3+\cos\theta)}\, d\theta.$

Ἐπίσης ὑπολογίσατε τά (β), (γ), (ε) καί (ζ) μέ τήν αὐτήν ἀκρίβειαν χρησιμοποιοῦντες τήν μέθοδον ἀναπτύξεως κατά σειράν.

2. Ἐκφράσατε τό

$$\int_0^{\theta} (\cos x)^{3/2}\, dx$$

ὡς δυναμοσειράν τοῦ θ μέχρι καί τοῦ ὅρου θ^5. Ὅθεν ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα μέ ἀκρίβειαν τριῶν δεκαδικῶν ψηφίων ὅταν θ = 2/3 ἀκτίνια. (C.U.)

3. Χρησιμοποιοῦντες τόν κανόνα τοῦ Simpson ὑπολογίσατε τό

$$\int_0^2 y\, dx$$

ἀπό τά ἀκόλουθα ζεύγη τιμῶν τῶν (x,y)

x	0	0·25	0·50	0·75	1·00	1·25	1·50	1·75	2·00
y	1·31	2·41	3·04	2·97	2·16	1·80	0·75	0·13	0·04

4. Ὁ τύπος Euler - Maclaurin δίδει (χρησιμοποιοῦντες τόν συμβολισμόν τοῦ τύπου Simpson (18)).

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\left\{\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+ \dots +f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right\}$$

$$-\sum_{\substack{\text{odd}\\ r}}\left\{\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}B_{r+1}(f_n^{(r)}-f_0^{(r)})\right\},$$

ὅπου B_r εἶναι οἱ ἀριθμοί Bernoulli ὁρισθέντες εἰς τό Κεφ. 5, Πρόβλημα 12, καί ὅπου $f_n^{(r)}$, $f_0^{(r)}$ εἶναι αἱ τιμαί τῶν $\frac{d^r f}{dx^r}$ ὑπολογιζόμεναι διά x = b καί x = α, ἀντιστοίχως.

Λαμβάνοντες h = 1 καί παραμελοῦντες ὅρους μέ ἀριθμούς Bernoulli πέραν τοῦ B_4, ὑπολογίσατε τό

$$\int_4^8 \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Συγκρίνατε τό ἀποτέλεσμα αὐτό μέ τήν ἀκριβῆ τιμήν τοῦ ὁλο - κληρώματος.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20.

ΣΕΙΡΑΙ FOURIER

20.1. Εἰσαγωγή

Εἰς τό Κεφάλαιον 6 εἴδομεν πῶς ὡρισμέναι συναρτήσεις δύνανται νά ἀναπτυχθοῦν εἰς δυναμοσειράς διά τῶν ἀναπτυγμάτων Taylor καί Maclaurin. Αἱ συναρτήσεις αὐταί πρέπει νά εἶναι συνεχεῖς καί ἀπειράκις παραγωγίσιμοι εἰς τό διάστημα συγκλίσεως τῆς δυναμοσειρᾶς. Θά δείξωμεν τώρα ὅτι συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἐνδέχεται νά μή εἶναι οὔτε παραγωγίσιμοι οὔτε συνεχεῖς εἰς ὡρισμένα σημεῖα ἑνός διαστήματος δύνανται νά παρασταθοῦν ὑπό τριγωνομετρικῆς σειρᾶς τῆς μορφῆς

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ \dots\ +b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ \dots$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx+b_r\sin rx), \qquad (1)$$

ὅπου ὁ r λαμβάνει ἀκεραίας τιμάς καί αἱ a_0, a_r, b_r εἶναι σταθεραί. Ἐφ'ὅσον ἡ (1) παραμένει ἀμετάβλητος μετά τήν ἀντικατάστασιν τῆς x ὑπό x+2kπ, ὅπου k εἶναι ἕνας ἀκέραιος, αὕτη ἀντιπροσωπεύει κατ'ἀνάγκην περιοδικήν συνάρτησιν τῆς x περιόδου 2π (ἰδέ Κεφ. 1, § 1.3,Τ.1). Συνεπῶς κατά τήν συζήτησιν τοιούτων σειρῶν δυνάμεθα νά περιορισθῶμεν εἰς τυχόν διάστημα πλάτους 2π· ἐκλέγομεν ἐδῶ τό διάστημα

$$-\pi < x \leqq \pi. \qquad (2)$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f(x) εἶναι μία αὐθαιρέτως ὁρισθεῖσα συνάρτησις εἰς τό διάστημα (2). Τότε ἐάν οἱ συντελεσταί a_0, a_r, b_r τῆς (1) ὁρισθοῦν ὑπό τῶν

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx, \quad (r = 1, 2, 3 \ldots), \tag{4}$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx, \quad (r = 1, 2, 3 \ldots), \tag{5}$$

ἡ προκύπτουσα σειρά καλεῖται σειρά Fourier τῆς f(x) οἱ δέ συντελεσταί αὐτῆς καλοῦνται συντελεσταί Fourier. Τό ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς Fourier δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ἴσον μέ τήν συνάρτησιν ἐκ τῆς ὁποίας ἐξήχθη, αἱ δέ συνθῆκαι ὑπό τάς ὁποίας ἡ σειρά Fourier τῆς f(x) συγκλίνει πρός τήν f(x) ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι

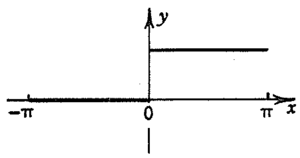
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx + b_r\sin rx) \tag{6}$$

ἐξαρτῶνται πολύ ἀπό τήν μορφήν τῆς ὑπό ἐξέτασιν συναρτήσεως. Κατωτέρω δίδομεν ὑπό μορφήν θεωρήματος ἱκανάς συνθήκας (τάς συνθήκας τοῦ Dirichlet) τάς ὁποίας ἡ f(x) πρέπει νά ἱκανοποιῇ οὕτως ὥστε ἡ (6) νά ἰσχύῃ.

Θεώρημα 1. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f(x) εἶναι ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $-\pi < x \leq \pi$ καί ἐπεκτείνεται δι'ἄλλας τιμάς τοῦ x συμφώνως τῆς περιοδικῆς σχέσεως $f(x+2k\pi) = f(x)$, ὅπου k εἶναι ἀκέραιος. Τότε, ἐάν εἰς τό $-\pi < x \leq \pi$, ἡ f(x) εἶναι μονότιμος καί συνεχής ἐκτός εἰς πεπερασμένον πλῆθος σημείων καί ἔχῃ μόνον πεπερασμένον ἀριθμόν μεγίστων καί ἐλαχίστων, τότε ἡ σειρά Fourier συγκλίνει πρός τήν f(x) εἰς ὅλα τά σημεῖα τοῦ διαστήματος ὅπου ἡ f(x) εἶναι συνεχής. Εἰς σημεῖον πεπερασμένης ἀσυνεχείας, ἔστω $x = x_0$, ἡ Fourier συγκλίνει εἰς τήν τιμήν

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)\}, \tag{7}$$

ή όποία είναι άπλῶς ή μέση τιμή τῶν δύο όριακῶν τιμῶν τῆς $f(x)$ ὅταν τό x τείνη είς τό x_0 έκ δεξιῶν καί έξ άριστερῶν. Πρός διευκρίνισιν τῆς (7), θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(x)$ όριζομένην ὡς $f(x) = 0$ διά $-\pi < x < 0$ καί $f(x) = 1$ διά $0 < x < \pi$. Τότε τό $x_0 = 0$ εἶναι ἕν σημεῖον πεπερασμένης άσυνεχείας (ίδέ Σχ. 20.1) καί ὡς έκ τούτου



Σχ. 20.1.

$$\tfrac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)\} = \tfrac{1}{2}(1+0) = \tfrac{1}{2}. \tag{8}$$

Συναρτήσεις αί όποῖαι ίκανοποιοῦν τάς συνθήκας τοῦ Dirichlet (ὡς διετυπώθησαν είς τό Θεώρημα 1) καλοῦνται τμηματικῶς όμαλαί συναρτήσεις.

20.2. Συντελεσταί τῶν σειρῶν Fourier

Κατωτέρω θά δικαιολογήσωμεν τήν μορφήν τῶν συντελεστῶν τῶν σειρῶν Fourier ὡς δίδονται είς τάς (3), (4) καί (5). Διά νά έπιτύχωμεν αὐτό χρησιμοποιοῦμεν τά κατωτέρω άποτελέσματα τά όποῖα εὑρίσκονται δι'άπ'εὐθείας όλοκληρώσεως.

Ἐάν r καί s εἶναι θετικοί άκέραιοι ἤ μηδέν, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \cos sx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{ὅταν } r \neq s, \\ 2\pi & \text{ὅταν } r = s = 0, \\ \pi & \text{ὅταν } r = s > 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin sx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{ὅταν } r \neq s, \\ 0 & \text{ὅταν } r = s = 0, \\ \pi & \text{ὅταν } r = s > 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \cos sx \, dx = 0 \quad \text{δι'ὅλα τά } r \text{ καί } s, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{ὅταν } r > 0, \\ 2\pi & \text{ὅταν } r = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \, dx = 0 \quad \text{δι'ὅλα τά } r. \tag{13}$$

Τώρα πολλαπλασιάζομεν τήν σειράν (6)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx+b_r\sin rx) \tag{14}$$

ἐπί cos sx καί ὁλοκληρώνομεν ἀπό x = −π ἕως x = π. Τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos sx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\left\{\sum_{r=1}^{\infty}a_r\cos rx\right\}dx$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\left\{\sum_{r=1}^{\infty}b_r\sin rx\right\}dx. \tag{15}$$

Μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι δυνάμεθα νά ἐναλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν πράξεων τῆς ὁλοκληρώσεως καί τῆς ἀθροίσεως καί ἐν συνεχείᾳ νά ὁλοκληρώσωμεν τήν σειράν ὅρον πρός ὅρον (πρβλ. παρατηρήσεις ἀφορώσας τήν ὁμαλήν σύγκλισιν, Κεφ. 5, § 5.11), ἔχομεν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos sx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\,dx+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{a_r\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\cos rx\,dx\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{b_r\int_{-\pi}^{\pi}\sin rx\cos sx\,dx\right\}. \tag{16}$$

Χρησιμοποιοῦντες τάς ἰδιότητας τῶν ὁλοκληρωμάτων δοθείσας εἰς τάς (9) ἕως (13) συμπεραίνομεν ὅτι ὅταν s = 0, τό μοναδικόν μή μηδενιζόμενον ὁλοκλήρωμα εἰς τό δεύτερον μέλος τῆς (16) εἶναι τό πρῶτον. Ἄρα ἡ (16) δίδει

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\,.\,2\pi \quad \text{ἤ} \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{17}$$

ὅπως εἰς τήν (3). Ὅταν τό s εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός τό μόνον μή μηδενιζόμενον ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (16)εὑρίσκεται εἰς τόν πρῶτον ἄθροισμα ὅταν s = r. Ὅθεν χρησιμοποιοῦντες τάς (9) καί (16) λαμβάνομεν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx=a_r\int_{-\pi}^{\pi}\cos rx\cos rx\,dx=\pi a_r, \tag{18}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ (4).

Διά νά ὑπολογίσωμεν τούς συντελεστάς Fourier b_r πολλαπλασιάζομεν τήν (14) ἐπί sinsx καί ὁλοκληρώνομεν ἀπό x = −π ἕως x = π. 'Εργαζόμενοι ὅπως καί διά τούς α_r εὐκόλως εὑρίσκομεν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx = b_r\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin rx\,dx = \pi b_r, \tag{19}$$

ἡ ὁποία δίδει τήν (5).

Σημειωτέον ὅτι οἱ συντελεσταί Fourier α_0 καί α_r διδόμενοι ὑπό τῶν (3) καί (4) δύνανται νά ἐκφρασθοῦν περισσότερον συνεπτυγμένως ὑπό ἑνός τύπου

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx, \tag{20}$$

ὅπου r = 0, 1, 2, ...

Εἰς τήν συναγωγήν τῶν συντελεστῶν Fourier ὡς ἀνωτέρω εἴχομεν σιωπηρῶς ὑποθέσει ὅτι ἡ f(x) εἶναι συνεχής εἰς τό διάστημα $-\pi < x < \pi$. 'Εάν ἡ f(x) εἶναι ἀσυνεχής διά $x = x_0$, τότε οἱ συντελεσταί Fourier πρέπει νά ὑπολογισθοῦν δι'ἀθροίσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς τά διαστήματα συνεχείας τῆς f(x). 'Επί παραδείγματι, ἡ α_r δίδεται ὑπό τῆς

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_0} f(x)\cos rx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx \tag{21}$$

μέ παρομοίας ἐκφράσεις διά τά b_r καί α_0.

Τελικῶς ὅταν ἡ f(x) εἶναι ἤ ἀρτία ἤ περιττή συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα $-\pi < x \leq \pi$, τότε οἱ συντελεσταί Fourier ἁπλοποιοῦνται συμφώνως πρός τάς ἰδιότητας τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς τό Κεφ. 4, § 4.3. Ἔχομεν

(α) $f(x)$ ἀρτία $f(x) = f(-x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{22}$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx, \tag{23}$$

$$(r = 1, 2, 3\ \ldots)$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx = 0, \text{ δι'ὅλα τά } r. \tag{24}$$

"Οθεν εάν ἡ f(x) εἶναι μία ἀρτία συνάρτησις, τότε ἡ ἀντίστοιχος σειρά Fourier ἀνάγεται εἰς σειράν συνημιτόνου.

(β) $f(x)$ περιττή $f(x) = -f(-x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \tag{25}$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx = 0 \text{ δι'ὅλα τά } r \tag{26}$$

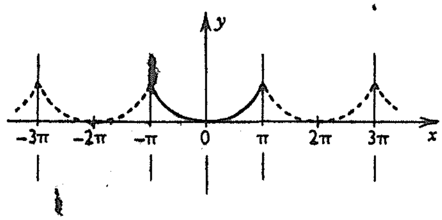
$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx. \tag{27}$$

$$(r = 1, 2, 3 \ldots).$$

"Οθεν ἐάν ἡ f(x) εἶναι μία περιττή συνάρτησις τότε ἡ ἀντίστοιχος σειρά μετατρέπεται εἰς σειράν ἡμιτόνου.

20.3. Ἀνάπτυξις κατά Fourier

Παράδειγμα 1. Εὕρετε τήν σειράν Fourier ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μή περιοδικήν συνάρτησιν $f(x) = x^2$ εἰς τό διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$. Πρῶτον ἐπεκτείνομεν τήν f(x) περιοδικῶς (ὡς ἐπιβάλλεται ἐκ τῶν συνθηκῶν Dirichlet) ὁρίζοντες $f(x+2k\pi) = f(x)$ (ἰδέ Σχ. 20.2). Ἐν συνεχείᾳ ἐπειδή ἡ $f(x) = x^2$ εἶναι ἀρτία συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα $-\pi < x < \pi$ ἔχομεν, κατά τάς (22), (23) καί (24),



Σχ. 20.2.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}, \tag{28}$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos rx\,dx \quad (r = 1, 2, 3 \ldots) \tag{29}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2 \sin rx}{r}\right]_0^\pi - \frac{2}{r}\int_0^\pi x \sin rx \, dx\right\} \tag{30}$$

$$= \frac{4 \cos r\pi}{r^2} = \frac{4}{r^2}(-1)^r, \tag{31}$$

καί $\qquad b_r = 0$ δι'ὅλα τά r. $\hfill$ (32)

Ὅθεν ἡ ἀντίστοιχος σειρά Fourier δίδεται, δυνάμει τῆς (6), ὑπό τῆς

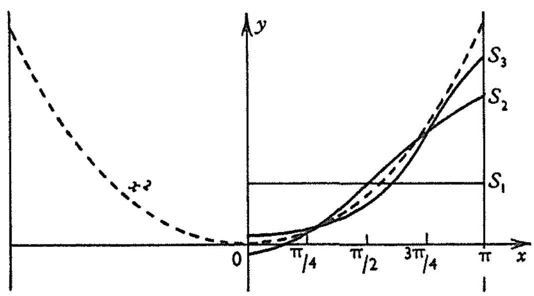
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \ldots\right) \tag{33}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos rx}{r^2}. \tag{34}$$

Ἡ σύγκλισις τῆς (34) πρός τό x^2 γίνεται εὐκολώτερον ἀντιληπτή γραφικῶς σχεδιάζοντες τά πρῶτα μερικά ἀθροίσματα, ἔστω

$$S_1 = \frac{\pi^2}{3}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x, \quad S_3 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x. \tag{35}$$

Αὐτά δεικνύονται εἰς τό Σχ. 20.3.



Σχ. 20.3.

Ἐπειδή ἡ f(x) εἶναι συνεχής εἰς ὅλα τά σημεῖα τοῦ διαστήματος $-\pi \leq x \leq \pi$, ἡ (34) ἰσχύει παντοῦ εἰς τό διάστημα. Ἐκτός τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ὅμως ἡ (34) (ἡ ὁποία εἶναι περιοδική ὡς πρός x ὡς δεικνύεται ὑπό τοῦ Σχ. 20.2) δέν ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν x^2.

Τά ἀθροίσματα σειρῶν συνήθως δύνανται νά ληφθοῦν ἐκ τῶν ἀναπτύξεων κατά Fourier λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν εἰδικάς τιμάς τῆς x ἐντός τοῦ διαστήματος ὁρισμοῦ. 'Επί παραδείγματι, θέτοντες x=$\pm$ π εἰς τήν (34) ἔχομεν

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{r^2}+\dots\right) \tag{36}$$

ἤ

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}. \tag{37}$$

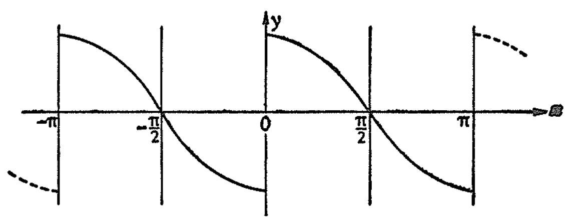
'Ομοίως, θέτοντες x = 0, εὑρίσκομεν

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{r^2} \tag{38}$$

Παράδειγμα 2. Εὕρετε τήν σειράν ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν f(x) ὁριζομένην ὑπό

$$f(x)=\begin{cases}-\cos x & \text{διά } -\pi\leqq x<0\\ \cos x & \text{διά } 0<x\leqq\pi.\end{cases}$$

'Η συνάρτησις αὐτή εἶναι περιοδική ὡς πρός x (ἰδέ Σχ. 20.4) καί συνεπῶς ἱκανοποιεῖ τήν σχέσιν περιοδικότητος f(x+2kπ) = f(x) ὡς ἀπαιτεῖ τό Θεώρημα 1. 'Επιπροσθέτως αὐτή



Σχ. 20.4.

εἶναι περιττή συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα -π $\leqq$ x $\leqq$ π καί εἰς τό διάστημα αὐτό ἔχει πεπερασμένην ἀσυνέχειαν διά x = 0. Ὅθεν

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx=0, \tag{39}$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\cos x)\cos rx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x \cos rx\,dx = 0$$

δι'ὅλα τά x (40)

καί

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\cos x)\sin rx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x \sin rx\,dx \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r+1)x}{r+1} + \frac{\cos(r-1)x}{r-1}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r+1)x}{r+1} + \frac{\cos(r-1)x}{r-1}\right]_{0}^{\pi} \tag{42}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{r+1}}{r+1} + \frac{1-(-1)^{r-1}}{r-1}\right] \tag{43}$$

Διά περιττάς τιμάς τοῦ r ἀπό τήν (43) λαμβάνομεν $b_r = 0$ ἐνῶ δι' ἀρτίας τιμάς τοῦ r, ἐπίσης ἐκ τῆς (43), λαμβάνομεν

$$b_r = \frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{r^2-1}\right), \quad (r = 2, 4, 6 \ldots). \tag{44}$$

Ὅθεν ἡ ζητουμένη σειρά Fourier εἶναι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1.3}\sin 2x + \frac{2}{3.5}\sin 4x + \frac{3}{5.7}\sin 6x + \ldots\right) \tag{45}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{\text{ἄρτια}\\ r}}^{\infty} \frac{r}{r^2-1}\sin rx. \tag{46}$$

Ἡ σειρά αὐτή ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν f(x) εἰς τό $-\pi \leq x \leq \pi$ ὅπου ἡ f(x) εἶναι συνεχής. Ὅταν ὅμως x = 0, ἡ σειρά ἔχει ἄθροισμα ἴσον τοῦ μηδενός συμφώνως μέ τήν (7), ἐφ'ὅσον

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)\} = \tfrac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\{\cos\delta - \cos(-\delta)\} \tag{47}$$

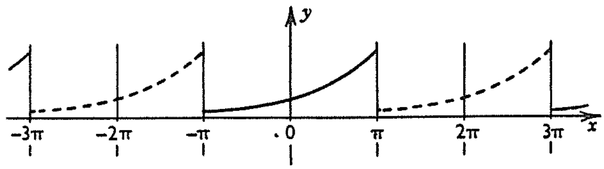
$$= \tfrac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Ὅπως ἀκριβῶς εἰς τό τελευταῖον παράδειγμα, δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν (46) διά νά λάβωμεν τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς. Πράγματι θέτοντες x = π/4 ἔχομεν

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{3}{5.7} + \frac{5}{9.11} - \ldots\right) \tag{48}$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\frac{1}{1.3}-\frac{3}{5.7}+\frac{5}{9.11}-\dots \tag{49}$$

Παράδειγμα 3. Εὕρετε τήν σειράν Fourier ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν f(x) = e^x εἰς τό διάστημα $-\pi < x < \pi$. Ὅπως εἰς τό Παράδειγμα (1), πρῶτον ἐπεκτείνομεν τήν συνάρτησιν περιοδικῶς (ἰδέ Σχ. 20.5) ὡς ἀπαιτεῖ τό Θεώρημα 1.



Σχ. 20.5.

Πεπερασμένας ἀσυνεχείας ἔχομεν ὅταν $x = \pm\pi$. Ὑπολογίζοντες τούς συντελεστάς τῆς σειρᾶς Fourier ἔχομεν

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx=\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{\pi}; \tag{50}$$

$$a_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos rx\, dx=\frac{1}{\pi(1+r^2)}\Big[e^x(\cos rx+r\sin rx)\Big]_{-\pi}^{\pi} \tag{51}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^r}{1+r^2}(e^\pi-e^{-\pi}), \tag{52}$$

$$b_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin rx\, dx=\frac{1}{\pi(1+r^2)}\Big[e^x(\sin rx-r\cos rx)\Big]_{-\pi}^{\pi} \tag{53}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{r+1}r}{1+r^2}(e^\pi-e^{-\pi}). \tag{54}$$

Ὅθεν εἰς τό διάστημα $-\pi < x < \pi$

$$e^x=\frac{\sinh\pi}{\pi}+\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\cos rx}{1+r^2}$$

$$+\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}r\sin rx}{1+r^2} \tag{55}$$

$$=\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\cos rx}{1+r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}r\sin rx}{1+r^2}\right\}. \tag{56}$$

Εἰς τά σημεῖα πεπερασμένων ἀσυνεχειῶν $x = \pm\pi$ γνωρίζομεν ὅτι ἡ σειρά Fourier πρέπει νά συγκλίνη εἰς τό

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\{e^{\pi+\delta}+e^{-\pi-\delta}\}=\cosh\pi, \tag{57}$$

(χρησιμοποιοῦντες τήν σχέσιν περιοδικότητος).

Ὅθεν

$$\cosh\pi=\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2r}}{1+r^2}\right\} \tag{58}$$

ἤ

$$\frac{\pi}{2}\coth\pi=\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^2}. \tag{59}$$

20.4. Σειραί Συνημιτόνου καί Ἡμιτόνου

Μερικάς φοράς ἔχομεν νά ἀναπτύξωμεν μίαν συνάρτησιν f(x) εἰς σειράν Fourier εἰς τό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$. Αὐτό γίνεται διά χρησιμοποιήσεως εἴτε ἡμιτονικῆς σειρᾶς εἴτε συνημιτονικῆς σειρᾶς, ἀναλόγως τῶν ἀπαιτήσεων.

(α) Συνημιτονικαί σειραί

Ὑποθέτομεν ὅτι f(x) ὁρίζεται αὐθαιρέτως εἰς τό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$. Ἐν συνεχείᾳ ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν F(x) οὕτως ὥστε

$$\left.\begin{aligned} &F(x)\equiv f(x), \quad 0\leqq x\leqq \pi,\\ &F(x)\equiv f(-x), \quad -\pi\leqq x\leqq 0,\\ \text{καί}\quad &\\ &F(x+2\pi k)=F(x). \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Τότε ἡ F(x) εἶναι, προφανῶς, ἀρτία περιοδική συνάρτησις τῆς x εἰς τό διάστημα $-\pi \leqq x \leqq \pi$ καί εἶναι ταυτόσημος μέ τήν f(x) εἰς τό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$. Ὅθεν, κατά τάς (22) - (24), ἡ σειρά Fourier τῆς F(x) εἰς τό διάστημα $-\pi \leqq x \leqq \pi$ εἶναι ἡ συνημιτονική σειρά

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_r\cos rx+\ldots, \tag{61}$$

ὅπου

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\,dx \tag{62}$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos rx\, dx \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{63}$$

'Αλλά είς τό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$, ή $F(x)$ εἶναι ταυτόσημος (ἐξ ὁρισμοῦ) μέ τήν $f(x)$ καί συνεπῶς είς τό διάστημα αὐτό

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_r \cos rx + \ldots , \tag{64}$$

ὅπου

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx, \tag{65}$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos rx\, dx \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{66}$$

(β) Ἡ μ ι τ ο ν ι κ α ί Σ ε ι ρ α ί

Ἔστω ὅτι τώρα ὁρίζομεν τήν $F(x)$ οὕτως ὥστε

$$\left.\begin{aligned} &F(x) \equiv f(x) \quad \text{in} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ &F(x) \equiv -f(-x) \quad \text{in} \quad -\pi < x < 0, \\ &\text{καί} \\ &F(x + 2\pi k) = F(x). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Τότε ή $F(x)$εἶναι μία περιττή περιοδική συνάρτησις τῆς x είς $-\pi < x \leqq \pi$ καί εἶναι ταυτόσημος μέ τήν $f(x)$ είς $0 \leqq x \leqq \pi$. Ὅθεν, κατά τάς (25) - (27), ή σειρά Fourier τῆς $F(x)$ είς τό $-\pi < x \leqq \pi$ εἶναι

$$F(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_r \sin rx + \ldots , \tag{68}$$

ὅπου

$$b_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin rx\, dx \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{69}$$

'Αλλ'ἐφ'ὅσον ή $F(x)$ εἶναι ταυτόσημος μέ τήν $f(x)$ είς τό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$ ἔχομεν τήν ἡμιτονικήν σειράν

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_r \sin rx + \ldots , \tag{70}$$

ὅπου

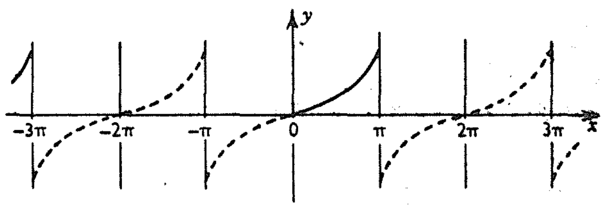
$$b_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin rx\,dx \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{71}$$

Παράδειγμα 4. Εὕρετε τήν ἡμιτονικήν σειράν Fourier ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν $f(x) = x^2$ εἰς τό διάστημα $0 \leq x < \pi$.

Ἐδῶ συμφώνως πρός τό (b) ἀνωτέρω, ἡ $f(x)$ πρέπει νά ἐπεκταθῇ περιοδικῶς διά τῆς περιττῆς συναρτήσεως $F(x)$ ὅπου

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= x^2, \quad 0 \leq x < \pi, \\ F(x) &= -x^2, \quad -\pi < x \leq 0, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

καί $F(x+2\pi k) = F(x)$, (ἰδέ Σχ. 20.6).



Σχ. 20.6.

Ὅθεν, ἐκ τῶν (70) καί (71), ἡ ζητουμένη σειρά εἶναι ἡ

$$x^2 = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_r \sin rx + \ldots, \tag{73}$$

ὅπου

$$b_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin rx\,dx, \quad (r = 1, 2, 3 \ldots), \tag{74}$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{r+1}}{r} + \frac{4}{\pi r^3}\{(-1)^r - 1\}. \tag{75}$$

Συνεπῶς ἡ σειρά γίνεται

$$x^2 = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{4}{1^3}\right)\sin x - \frac{\pi^2}{2}\sin 2x + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{3^3}\right)\sin 3x \right.$$
$$\left. - \frac{\pi^2}{4}\sin 4x + \left(\frac{\pi^2}{5} - \frac{4}{5^3}\right)\sin 5x \ldots\right\}. \tag{76}$$

20.5. Ἀλλαγή Διαστήματος

Ἀντί νά ἀναπτύξωμεν μίαν συνάρτησιν εἰς τό διάστημα $-\pi < x \leq \pi$ (ἤ εἰς τυχόν διάστημα πλάτους 2π) εἶναι μερικάς φοράς ἐπιθυμητόν νά λάβωμεν ἀνάπτυγμα ἰσχῦον εἰς τό διάστημα $-\ell < x \leq \ell$, ὅπου ℓ εἶναι δοθείς ἀριθμός. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f(x) εἶναι τμηματικῶς ὁμαλή συνάρτησις εἰς τό $-\ell < x \leq \ell$ καί ὁρίζεται ἐκτός τοῦ διαστήματος ὑπό τῆς περιοδικῆς σχέσεως $f(x+2\ell k) = f(x)$, ὅπου k εἶναι ἕνας ἀκέραιος.

Τότε θέτοντες $z = \pi x/\ell$ ἔχομεν

$$f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z), \tag{77}$$

ὅπου ἡ F(z) εἶναι τώρα μία περιοδική συνάρτησις ὡς πρός z περιόδου 2π. Ὅθεν εἰς τό $-\pi < z \leq \pi$ ἔχομεν

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rz + b_r \sin rz), \tag{78}$$

ὅπου

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos rz \, dz, \quad (r = 0, 1, 2 \ldots) \tag{79}$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin rz \, dz, \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{80}$$

Συνεπῶς, θέτοντες $z = \frac{\pi x}{\ell}$ εἰς τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα, ἔχομεν

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos\frac{\pi x r}{l} + b_r \sin\frac{\pi x r}{l}\right) \tag{81}$$

ὅπου

$$a_r = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi x r}{l} \, dx, \quad (r = 0, 1, 2 \ldots) \tag{82}$$

καί

$$b_r = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi x r}{l} \, dx, \quad (r = 1, 2, 3 \ldots). \tag{83}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι χρησιμοποιοῦντες τά ἀποτελέσματα τῆς § 20.4, λαμβάνομεν τήν συνημιτονικήν καί ἡμιτονικήν σειράν συναρτήσεως εἰς τό διάστημα $0 < x \leq \ell$.

Παράδειγμα 5. Εὕρετε τήν σειράν Fourier ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τήν συνάρτησιν $f(x) = x$ εἰς τό διάστημα $-1 < x < 1$.

'Από τάς (82) καί (83)

$$a_r = \int_{-1}^{1} x \cos \pi r x \, dx = 0 \tag{84}$$

δι'όλα τά r(=0,1,2,...), καί

$$b_r = \int_{-1}^{1} x \sin \pi r x \, dx \tag{85}$$

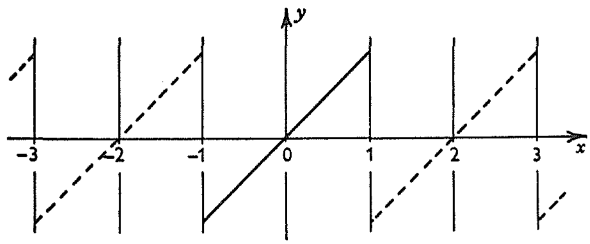
$$= -\frac{2}{\pi r}(-1)^r. \tag{86}$$

Όθεν εἰς τό διάστημα $-1 < x < 1$ ἔχομεν

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \dots\right), \tag{87}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \frac{\sin \pi r x}{r}. \tag{88}$$

Διά $x = \pm 1$ πεπερασμέναι ἀσυνέχειαι λαμβάνουν χώραν (λόγῳ τῆς περιοδικῆς ἐπεκτάσεως τῆς f(x) διά τῆς σχέσεως f(x+2) = f(x), ἰδέ Σχ. 20.7).



Σχ. 20.7.

Όθεν εἰς τά σημεῖα αὐτά ἡ σειρά δέν ἀντιπροσωπεύει τό x ἀλλά συγκλίνει εἰς τήν τιμήν

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)\} = \tfrac{1}{2}\{1+(-1)\} = 0. \tag{89}$$

20.6. Ὁλοκλήρωσις καί Παραγώγισις Σειρῶν Fourier.

Εἰς τό Κεφ. 5, § 5.11 ἀνεφέρθησαν συντόμως μερικαί ἐκ τῶν δυσκολιῶν αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶνται κατά τήν ὅρον πρός ὅρον παραγώγισιν καί ὁλοκλήρωσιν σειρῶν συναρτήσεων μέ ἀπείρους τό πλῆθος ὅρους. Δίδομεν τώρα χωρίς ἀπόδειξιν ἕν σπουδαῖον θεώρημα ἀφορῶν τήν ὅρον πρός ὅρον ὁλοκλήρωσιν σειρᾶς Fourier.

Θεώρημα 2. Ἡ σειρά Fourier μιᾶς συναρτήσεως f(x) δύναται πάντοτε νά ὁλοκληρωθῆ ὅρον πρός ὅρον δίδουσα μίαν νέαν σειράν ἡ ὁποία συγκλίνει εἰς τό ὁλοκλήρωμα τῆς f(x).

Ἤτοι, θεωροῦντες ἕν διάστημα ὁρισμοῦ, ἔστω $-\pi < x \leq \pi$ τότε διά $-\pi < x_1 < x_2 \leq \pi$ ἔχομεν

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} a_0(x_2 - x_1) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)\,dx, \tag{90}$$

ὅπου αἱ a_0, a_r καί b_r ὁρίζονται ὑπό τῶν (3),(4) καί (5). Ἐπί παραδείγματι, ἐπειδή ἡ ἀνάπτυξις κατά Fourier τῆς f(x) = x εἰς τό διάστημα $-\pi < x < \pi$ εἶναι

$$x = 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots)$$

$$= -2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\sin rx}{r}, \tag{91}$$

ἔχομεν, ὁλοκληρώνοντες ὅρον πρός ὅρον ἀπό 0 ἕως x

$$\frac{x^2}{2} = -2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots\right]_0^x \tag{92}$$

ἤ

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos rx}{r^2} + 2\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\right). \tag{93}$$

Τώρα ἐκ τῆς (38)

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{94}$$

Ὅθεν ἡ (93) γίνεται

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos rx}{r^2}. \tag{95}$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι ὀρθόν καθ'ὅσον εἶναι ἡ σειρά Fourier τῆς x^2 (ἰδέ Παράδειγμα 1). Ἐν γένει ὅμως ὅρον πρός ὅρον ὁλοκλήρωσις μιᾶς σειρᾶς Fourier δέν δίδει σειράν Fourier λόγῳ τῆς παρουσίας τοῦ ὅρου $\frac{1}{2}\alpha_0(x_2-x_1)$ εἰς τήν (90).

Ἐν συνεχείᾳ παρατηροῦμεν ὅτι ἐν ἀντιθέσει πρός τήν ὅρον πρός ὅρον ὁλοκλήρωσιν ἡ παραγώγισις ὅρον πρός ὅρον δέν εἶναι πάντοτε ἐπιτρεπτή ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι ἡ ἐκ παραγωγίσεως σειρά δέν συγκλίνει ἐν γένει πρός τήν παράγωγον τῆς συναρτήσεως. Διότι, ἄν καί εἰς τό $-\pi < x < \pi$

$$x = 2(\sin x-\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x \ldots), \tag{96}$$

δέν ἀληθεύει ὅτι ἡ ἐκ παραγωγίσεως σειρά

$$2(\cos x-\cos 2x+\cos 3x- \ldots) \tag{97}$$

ἰσοῦται μέ τήν μονάδα. Ἀντιθέτως μάλιστα ἡ (97) ἀποκλίνει δι'ὅλα τά x ἐπειδή $\lim\limits_{r\to\infty} \cos rx \neq 0$.

Μολαταῦτα ἡ ὅρον πρός ὅρον παραγώγισις σειρᾶς Fourier εἶναι ἐπιτρεπτή ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ συνθῆκαι τοῦ ἑπομένου θεωρήματος πληροῦνται.

Θεώρημα 3. Ἐάν ἡ $f(x)$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τῆς x δι'ὅλα τά x καί εἶναι περιοδική (περιόδου 2π) ἐκτός τοῦ διαστήματος $-\pi < x < \pi$, τότε ἡ ὅρον πρός ὅρον παραγώγισις τῆς σειρᾶς Fourier τῆς $f(x)$ ὁδηγεῖ εἰς τήν σειράν Fourier τῆς $f'(x)$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἱκανοποιοῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ Dirichlet.

Πρός ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, ὑποθέτομεν ὡς συνήθως ὅτι εἰς τό διάστημα $-\pi < x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx), \tag{98}$$

ὅπου τά a_0, a_r, b_r ὁρίζονται ὑπό τῶν (3), (4) καί (5). Ἐν συνεχείᾳ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρά Fourier τῆς $f'(x)$ εἶναι

$$f'(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx). \tag{99}$$

Τότε

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\{f(\pi)-f(-\pi)\} = 0 \tag{100}$$

(ἐπειδή $f(\pi) = f(-\pi)$),

$$\alpha_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos rx\,dx = \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx = rb_r, \qquad (101)$$

$$(r = 1, 2, 3 \ldots)$$

καί

$$\beta_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin rx\,dx = -\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx = -ra_r, \qquad (102)$$

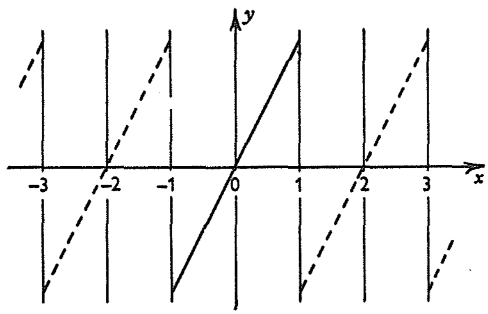
$$(r = 1, 2, 3 \ldots).$$

Συνεπῶς ἡ (99) γίνεται

$$f'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-ra_r \sin rx + rb_r \cos rx), \qquad (103)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ σειρά τήν ὁποίαν θά ἐλαμβάνομεν διά παραγωγίσεως τῆς (98) ὅρον πρός ὅρον.

Συμφώνως πρός τό θεώρημα αὐτό βλέπομεν ὅτι ἐπειδή ἡ $f(x) = x^2$ (ὅταν ἐπεκταθῆ περιοδικῶς) εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τῆς x δι'ὅλας τάς τιμάς τῆς x (ἰδέ Σχ. 20.2) ἡ σειρά Fourier τῆς x^2 δύναται νά παραγωγισθῆ ὅρον πρός ὅρον δίδουσα τήν σειράν Fourier τῆς 2x.



Σχ. 20.8.

Ὅμως ἐπειδή ἡ $f(x) = x$ (κατόπιν ἐπεκτάσεως) δέν εἶναι συνεχής συνάρτησις τῆς x δι'ὅλας τάς τιμάς τῆς x (ἰδέ Σχ. 20.8) ἡ σειρά Fourier αὐτῆς (ὡς παρετηρήσαμεν ἤδη εἰς τάς (96) καί (97)) δέν δύναται νά παραγωγισθῆ ὅρον πρός ὅρον καί νά μᾶς δώση τήν σειράν Fourier τῆς παραγώγου αὐτῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 20.

1. Δείξατε ὅτι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{\text{even} \\ r}}^{\infty} \frac{\cos rx}{r^2-1}.$$

2. Δοθέντος ὅτι

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for} \quad -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{for} \quad x = 0, \\ +1 & \text{for} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

δείξατε ὅτι εἰς τό $-\pi < x < \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right).$$

3. Εὕρετε τήν σειράν Fourier περιόδου 2π ἡ ὁποία δίδει μίαν συνάρτησιν ἴσην τοῦ μηδενός διά $-\pi < x < 0$ καί ἴσην τοῦ $\cosh x$ ὅταν $0 < x < \pi$. Θεωροῦντες τάς τιμάς τῆς σειρᾶς εἰς τά σημεῖα ἀσυνεχείας συμπεράνατε ὅτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right),$$

καί

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1\right).$$

(C.U.)

4. Δείξατε ὅτι ἡ ἀνάπτυξις κατά Fourier τῆς

$$f(x) = \begin{cases} 1+(x/\pi) & \text{ὅταν} \quad -\pi \leq x \leq 0, \\ 1-(x/\pi) & \text{ὅταν} \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

εἰς τήν περιοχήν $-\pi \leq x \leq \pi$ εἶναι

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

Ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2}.$$

5. Δείξατε ὅτι εἰς τήν περιοχήν $-\pi < x < \pi$

$$\sinh kx = \frac{2}{\pi}\sinh k\pi \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\left(\frac{r}{r^2+k^2}\right)\sin rx,$$

ὅπου k εἶναι μία σταθερά.

6. Δείξατε ὅτι, ἐάν $-\pi \leqq x \leqq \pi$ καί k ὄχι ἀκέραιος, ἔχομεν

$$\cos kx = \frac{2k}{\pi}\sin k\pi\left\{\frac{1}{2k^2}+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{(r^2-k^2)}\right\}.$$

Θέτοντες $x = \pi$ καί $k\pi = \theta$, δείξατε ὅτι

$$\cot\theta = \frac{1}{\theta}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\theta}{r^2\pi^2-\theta^2}.$$

7. Ἐκφράσατε τήν συνάρτησιν $f(x) = 1+x$ ὡς ἡμιτονικήν σειράν ἰσχύουσαν εἰς τήν περιοχήν $0 < x \leqq \pi$.

8. Ἐάν, εἰς τό διάστημα $0 < x < \pi$, ἡ $f(x)$ ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & x = \pi/2, \\ -1, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

δείξατε ὅτι

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots\right).$$

9. Ἀναπτύξατε τήν συνάρτησιν

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqq x \leqq \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2 \leqq x < \pi, \end{cases}$$

(α) εἰς ἡμιτονικήν σειράν καί (β) εἰς συνημιτονικήν σειράν ἰσχύουσαν εἰς τό διάστημα $0 \leqq x < \pi$. Σχεδιάσατε τά διαγράμματα τῶν συναρτήσεων τάς ὁποίας ἀντιπροσωπεύουν αἱ ἐν λόγῳ σειραί εἰς τήν περιοχήν $-2\pi < x < 2\pi$. **(L.U.)**

10. Δείξατε ὅτι ὅταν $0 \leqq x \leqq \pi$

$$\sin x = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{1.3}\cos 2x-\frac{1}{3.5}\cos 4x-\frac{1}{5.7}\cos 6x - \dots\right\}.$$

Σχεδιάσατε τήν καμπύλην τήν ὁποίαν ἡ σειρά ἀντιπροσωπεύει διά τιμάς τοῦ x ἀπό $-\pi/2$ ἕως $3\pi/2$.

Δείξατε ὅτι

$$\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\dots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}. \qquad \text{(L.U.)}$$

11. Ἐάν f(x) εἶναι μία περιττή συνάρτησις τῆς x περιόδου 2π καί

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqq x\leqq \pi/3;\\ \pi/3, & \pi/3\leqq x\leqq 2\pi/3,\\ \pi-x, & 2\pi/3\leqq x\leqq \pi,\end{cases}$$

δείξατε ὅτι ἡ σειρά Fourier τῆς f(x) δύναται νά ἐκφρασθῇ ὑπό τήν μορφήν

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin nx,$$

ὅπου n εἶναι ἕνας περιττός ἀκέραιος καί ὑπολογίσατε τούς πρώτους τρεῖς μή μηδενικούς ὅρους. (L.U.)

12. Εὕρετε τήν ἡμιτονικήν σειράν Fourier τῆς f(x) εἰς τήν περιοχήν $0 \leqq x \leqq \pi$ ὅταν $f(x) = x$, $0 \leqq x \leqq \pi/2$ καί $f(x) = \pi-x$, $\pi/2 \leqq x \leqq \pi$. Κατασκευάσατε διάγραμμα δεικνῦον τήν μορφήν τῆς συναρτήσεως τήν ὁποίαν δίδει ἡ σειρά εἰς τήν περιοχήν $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$. (L.U.)

13. Ἐάν ἡ f(x) ὁρίζεται αὐθαιρέτως εἰς τό διάστημα $0 < x < \pi$ καί ἡ ἐπέκτασις αὐτῆς εἰς τό $-\pi < x < \pi$ ὑπό τῆς συναρτήσεως F(x) ὅπου

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<\pi,\\ -f(x+\pi), & -\pi<x<0,\end{cases}$$

δείξατε ὅτι ἡ σειρά Fourier τῆς f(x) εἰς τό διάστημα $0<x<\pi$ περιλαμβάνει (ἐκτός ἑνός σταθεροῦ ὅρου) μόνον συνημίτονα καί ἡμίτονα ἀρτίων πολλαπλασίων τῆς x.

14. Ἡ συνάρτησις y(x) ὁρίζεται εἰς τήν περιοχήν $-1 \leqq x \leqq 1$ ὑπό

$$y=\begin{cases} 1/2\varepsilon & \text{in} \quad -\varepsilon<x<\varepsilon,\\ 0 & \text{in} \quad -1\leqq x<-\varepsilon, \quad \text{and} \quad \varepsilon<x\leqq 1.\end{cases}$$

Δείξατε ὅτι τό ἀνάπτυγμα κατά Fourier τῆς y εἰς τήν περιοχήν $-1 \leq x \leq 1$ δίδεται ὑπό τῆς

$$y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\varepsilon}{n\pi\varepsilon} \cos n\pi x. \qquad \text{(C.U.)}$$

15. Δείξατε ὅτι ὁ γενικός ὅρος εἰς τήν ἡμιτονικήν σειράν Fourier διά τό ἡμιδιάστημα $0 < x < \ell$ διά τήν $1+x/\ell$ εἶναι ὁ

$$\frac{2}{n\pi}(1 - 2\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Θεωροῦντες τήν συνάρτησιν τοῦ x τήν ἀντιπροσωπευομένην ὑπό τῆς σειρᾶς εἰς τήν περιοχήν $\ell < x < 2\ell$ καί τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς ὅταν $x = 3\ell/2$, ἀποδείξατε ὅτι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots . \qquad \text{(L.U.)}$$

16. Ἕκαστον σύνολον συναρτήσεων $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots \phi_n(x)$, ἔχον τήν ἰδιότητα

$$\int_a^b \phi_r(x)\phi_s(x)\, dx = \begin{cases} A, & \text{for } r = s, \\ 0, & \text{for } r \neq s, \end{cases}$$

ὅπου $r, s = 1, 2, \dots$ καί A εἶναι μία σταθερά, καλεῖται ὀρθογώνιον σύστημα συναρτήσεων εἰς τήν περιοχήν $a \leq x \leq b$. Ἐάν, πρός τούτοις, αἱ συναρτήσεις ἱκανοποιοῦν τήν συνθήκην

$$\int_a^b [\phi_r(x)]^2\, dx = 1, \quad \text{δι'ὅλα τά } r$$

τότε καλοῦνται κανονικοποιημέναι ὡς πρός τήν 1 καί τό σύνολον αὐτῶν καλεῖται ὀρθοκανονικόν. Ἐπαληθεύσατε ὅτι τό σύνολον τῶν συναρτήσεων

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots$$

εἶναι ὀρθοκανονικόν εἰς τήν περιοχήν $0 \leq x \leq 2\pi$.

17. Ἐάν ἡ f(x) εἶναι μία συνάρτησις ἱκανοποιοῦσα τάς συνθήκας τοῦ Dirichlet εἰς τό διάστημα $-\infty < x < \infty$, τότε τό θεώρημα (τύπος) διά τό ὁλοκλήρωμα Fourier λέγει ὅτι τό ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\cos\lambda(x-x')\,dx'\right\}d\lambda$$

συγκλίνει εἰς τήν f(x) εἰς ὅλα τά σημεῖα ὅπου f(x) εἶναι συνεχής καί εἰς τόν μέσον (ἀριθμητικόν) τῶν δύο τιμῶν τῆς f(x) εἰς σημεῖον πεπερασμένης ἀσυνεχείας.

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ f(x) εἶναι συνεχής εἰς ἕν διάστημα δείξατε, ἀναπτύσσοντες τό cosλ(x-x΄) ὡς ἄθροισμα δύο ὅρων, ὅτι εἰς τό διάστημα αὐτό

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\{\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x\}\,d\lambda,$$

ὅπου

$$\alpha(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\cos\lambda x'\,dx',$$

$$\beta(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\sin\lambda x'\,dx'.$$

Ὅθεν δείξατε ὅτι ἐάν f(x΄) εἶναι μία ἀρτία συνάρτησις οὕτως ὥστε

$$f(x')=f(-x')$$

τότε

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} f(x')\cos\lambda x'\,dx'\right\}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

καί ὅτι ἐάν f(x΄) εἶναι περιττή συνάρτησις οὕτως ὥστε f(x΄)= =-f(-x΄) τότε

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} f(x')\sin\lambda x'\,dx'\right\}\sin\lambda x\,d\lambda.$$

Τά τελευταῖα δύο ὁλοκληρώματα εἶναι γνωστά ὡς ὁλοκληρώματα Fourier τοῦ συνημιτόνου καί ἡμιτόνου, ἀντιστοίχως. Χρησιμοποιοῦντες τό ὁλοκλήρωμα Fourier τοῦ συνημιτόνου, δείξατε ὅτι διά x > 0

$$e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+k^2}\,d\lambda,$$

ὅπου k εἶναι μία θετική σταθερά.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 21.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

21.1. Εἰσαγωγή

Ἐξίσωσις περιέχουσα διαφορικούς συντελεστάς (παραγώγους) καλεῖται διαφορική ἐξίσωσις. Τοιαῦται ἐξισώσεις διακρίνονται εἰς δύο κατηγορίας, συνήθεις καί μερικάς διαφορικάς ἐξισώσεις. Αἱ συνήθεις διαφορικαί ἐξισώσεις περιέχουν μόνον μίαν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν (καί ὅθεν μόνον συνήθεις διαφορικούς συντελεστάς) καί αἱ μερικαί διαφορικαί ἐξισώσεις περιέχουν δύο ἤ περισσοτέρας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς (καί ὅθεν μερικάς παραγώγους). Κατά ταῦτα, ἐν γένει οἱαδήποτε συνάρτησις τῶν x,y καί τῶν παραγώγων τῆς y μέχρι τάξεώς τινος τοιαύτη ὥστε

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right) = 0 \tag{1}$$

ὁρίζει συνήθη διαφορικήν ἐξίσωσιν ὡς πρός y (ὡς ἐξηρτημένην μεταβλητήν) συναρτήσει τῆς x (ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς). Ἐπί παραδείγματι, αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{dy}{dx} = 3y, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \sin x, \tag{3}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = x, \tag{4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+6\sqrt{\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\right\}}=0, \tag{5}$$

εἶναι ὅλαι συνήθεις διαφορικαί ἐξισώσεις, ἐνῶ αἱ ἐξισώσεις

$$yx\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}=u,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

εἶναι μερικαί διαφορικαί ἐξισώσεις ὡς πρός u (ὡς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς) συναρτήσει τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καί y. Εἰς τό κεφάλαιον αὐτό (καί τό ἑπόμενον) θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ τήν λύσιν ὡρισμένων μορφῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἐνῶ μέ τήν λύσιν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων θά ἀσχοληθῶμεν εἰς τό Κεφ. 24.

Θά ὁρίσωμεν δύο σπουδαίους ὅρους - τήν τάξιν καί τόν βαθμόν - οἱ ὁποῖοι ἀφοροῦν συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις. Ἡ τάξις διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τάξις παραγώγου ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τήν ἐξίσωσιν. Ἐπί παραδείγματι, αἱ ἐξισώσεις (2), (3), (4) καί (5) εἶναι πρώτης, δευτέρας, πρώτης καί τρίτης τάξεως, ἀντιστοίχως. Ὁ βαθμός διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ δύναμις εἰς τήν ὁποίαν ὑψώνεται ἡ ὑψηλοτέρας τάξεως παράγωγος ὅταν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ρητῆς μορφῆς (δηλ. ἀφοῦ γίνη ἀπαλοιφή τῶν κλασματικῶν δυνάμεων). Ἐπί παραδείγματι, αἱ ἐξισώσεις (2), (3) καί (4) εἶναι πρώτου, πρώτου καί τρίτου βαθμοῦ ἀντιστοίχως. Ἡ ἐξίσωσις (5) ὅμως εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ἐπειδή ὅταν γραφῆ μέ ἀκεραίας μόνον δυνάμεις γίνεται

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2=36\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\right\}, \tag{7}$$

ὅπου ἡ ἀνωτέρας τάξεως παράγωγος $\frac{d^3y}{dx^3}$ ἐμφανίζεται εἰς τήν δευτέραν δύναμιν.

Ἑκάστη διαφορική ἐξίσωσις τάξεως n καλεῖται γραμμική ἐάν εἶναι γραμμική ὡς πρός τήν ἐξηρτημένην μεταβλητήν y καί τάς παραγώγους

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

(π.χ. αἱ (2) καί (3)). Ὅταν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δέν πληροῦται, τότε ἡ ἐξίσωσις καλεῖται μή γραμμική· (ἐπί παραδείγματι αἱ (4) καί (5)). Ἡ λύσις μή γραμμικῶν ἐξισώσεων συνήθως παρουσιάζει δυσκολίας καί ὡς ἐκ τούτου θά ἀσχοληθῶμεν κυρίως μέ τήν λύσιν γραμμικῶν ἐξισώσεων. Μολαταῦτα, ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν § 21.9 (δ) μερικαί μορφαί μή γραμμικῶν ἐξισώσεων δύνανται ἤ νά μετασχηματισθοῦν εἰς γραμμικάς διά καταλλήλου ἀλλαγῆς μεταβλητῆς ἤ ἄλλως λύονται συναρτήσει ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων (βλ. Πρόβλημα 21).

21.2. Σχηματισμός Συνήθων Διαφορικῶν Ἐξισώσεων.

Ἐν γένει ἐάν ἡ y ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς x ἡ ὁποία περιέχει n αὐθαιρέτους σταθεράς, τότε n παραγωγίσεις ἐπαρκοῦν διά τήν ἀπαλοιφήν τῶν σταθερῶν καί ἀνάγουν τήν σχέσιν μεταξύ y καί x εἰς συνήθη διαφορικήν ἐξίσωσιν τάξεως n. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν

$$y^2 = 4a(x+a), \quad (\alpha = \text{σταθερά}) \tag{8}$$

τότε, παραγωγίζοντας μίαν φοράν ἔχομεν

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a. \tag{9}$$

Συνεπῶς δι'ἀπαλοιφῆς τῆς α εἰς τήν (8) χρησιμοποιοῦντες τήν (9) εὑρίσκομεν τήν πρώτης τάξεως (μή γραμμικήν) ἐξίσωσιν

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{10}$$

Ὁμοίως, ἐάν

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x} \tag{11}$$

(A,B σταθεραί) τότε

$$\frac{dy}{dx} = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x}, \tag{12}$$

καί

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{-x} + 9Be^{-3x}. \tag{13}$$

Ὅθεν λύοντες ὡς πρός A καί B τάς (12) καί (13) καί ἀντικαθιστῶν τες εἰς τήν (11), εὑρίσκομεν τήν δευτέρας τάξεως (γραμμικήν) ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0. \tag{14}$$

Προφανῶς αἱ σχέσεις (8) καί (11) δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς λύσεις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (10) καί (14) αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἐξ αὐτῶν.

Ἀντιστρέφοντες τούς ἀνωτέρω συλλογισμούς, εἶναι λογικόν νά ὁρίσωμεν τήν γενικήν λύσιν διαφορικῆς ἐξισώσεως τάξεως n ὡς τήν λύσιν τήν περιέχουσαν n αὐθαιρέτους σταθεράς. Μολαταῦτα ὁ ὁρισμός αὐτός δέν εἶναι πάντοτε ἐντελῶς ἱκανοποιητικός (ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν §21.4) καί διά τοῦτο εἶναι καλύτερον νά εἴπωμεν τό ἀντίστροφον ὅτι (ἀνεξαιρέτως) μία λύσις μιᾶς n τάξεως ἐξισώσεως μή περιέχουσα n αὐθαιρέτους σταθεράς δέν δύναται νά εἶναι γενική λύσις.

Εἰς πολλά προβλήματα φυσικῆς ἡ λύσις διαφορικῆς ἐξισώσεως πρέπει νά ἱκανοποιῇ ὡρισμένας συγκεκριμένας συνθήκας. Αἱ συνθῆκαι αὐταί, συνήθως γνωσταί ὡς ἀρχικαί συνθῆκαι ἤ συνοριακαί συνθῆκαι, καθορίζουν τάς τιμάς τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν εἰς τήν λύσιν. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν ἡ (11) (ἡ ὁποία εἶναι γενική λύσις τῆς (14)) ἱκανοποιῇ τάς συνοριακάς συνθήκας

$$y=1 \text{ at } x=0, \text{ and } \frac{dy}{dx}=3 \text{ at } x=0 \tag{15}$$

τότε εὑρίσκομεν A+B = 1 καί -A-3B = 3 καί ἐξ αὐτῶν A = 3, B = -2.

21.3. Ἐξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς, δύνανται, ἐν γένει, νά γραφοῦν, ὡς

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y), \tag{16}$$

ὅπου F(x,y) εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις. Πλήν ὅμως παρά τήν φαινομενικήν ἁπλότητα τῆς ἐξισώσεως ἀναλυτικαί λύσεις δύνανται συνήθως νά εὑρεθοῦν μόνον ἐάν ἡ F(x,y) ἔχῃ ειδικάς ἁπλᾶς μορφάς. Τέσσα -

ρες ἁπλαῖ μορφαί ἀναφέρονται κατωτέρω.

α) Χ ω ρ ι ζ ό μ ε ν α ι μ ε τ α β λ η τ α ί .

'Εάν

$$F(x, y) = f(x)g(y), \tag{17}$$

ὅπου f(x) καί g(y) εἶναι συναρτήσεις τῆς x μόνον καί y μόνον, ἀντιστοίχως, τότε ἡ (16) γίνεται

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{18}$$

'Επειδή αἱ μεταβληταί x καί y εἶναι χωρισμέναι ἔχομεν, ὁλοκληρώνοντες τήν (18),

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx, \tag{19}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τήν y ἐμμέσως συναρτήσει τῆς x.

Παράδειγμα 1. 'Επιλύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1} \tag{20}$$

δοθείσης τῆς συνοριακῆς συνθήκης y = 1 διά x = 0.

Γράφοντες τήν (20) οὕτως ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι οἱ περιέχοντες τήν y εἶναι τό ἕν μέλος καί ὅλοι οἱ περιέχοντες τό x εἰς τό ἄλλο καί ὁλοκληρώνοντες, ἔχομεν

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}, \tag{21}$$

ἤ

$$\log_e (y+1) = \log_e (x-1) + \log_e C, \tag{22}$$

ὅπου C εἶναι ἡ αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. "Οθεν

$$\frac{y+1}{x-1} = C. \tag{23}$$

Τώρα ἐάν y = 1 διά x = 0, τότε ἐκ τῆς (23) εὑρίσκομεν

$$C = -2. \tag{24}$$

'Αντικαθιστῶντες τήν τιμήν τῆς C εἰς τήν (23) ἡ ζητουμένη λύσις τῆς (20) ἡ πληροῦσα τήν δοθεῖσαν συνοριακήν συνθήκην εἶναι λοιπόν

$$y=2(1-x)-1. \tag{25}$$

β)' Ἡ ὁ μ ο γ ε ν ή ς Ἐ ξ ί σ ω σ ι ς .

Ἐάν

$$F(x, y)=\frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \tag{26}$$

ὅπου f(x,y) καί g(x,y) εἶναι ὁμογενεῖς συναρτήσεις ὡς πρός x καί y τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, ἔστω n, (βλ. Κεφ. 9, § 9.8), τότε ἡ (16) γίνεται

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x, y)}{g(x, y)}=\frac{x^n\bar{f}\left(\frac{y}{x}\right)}{x^n\bar{g}\left(\frac{y}{x}\right)}=\phi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{27}$$

ὅπου $\bar{f}$, $\bar{g}$ καί φ εἶναι συναρτήσεις τοῦ $\frac{y}{x}$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτή συνήθως καλεῖται ὁμογενής πρώτης τάξεως διαφορική ἐξίσωσις καί δύναται πάντοτε νά ἀναχθῇ εἰς ἐξίσωσιν χωριζομένων μεταβλητῶν διά τῆς ἀντικαταστάσεως

$$y=vx, \tag{28}$$

ὅπου υ εἶναι συνάρτησις τῆς x. Πράγματι, παραγωγίζοντες τήν (28), ἔχομεν

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \tag{29}$$

ἡ ὁποία, μετά τῆς (28), ἐπιτρέπει εἰς τήν (27) νά γραφῇ ὡς

$$v+x\frac{dv}{dx}=\phi(v). \tag{30}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς τῶν χωριζομένων μεταβλητῶν καί δύναται νά ὁλοκληρωθῇ κατ'εὐθεῖαν δίδουσα

$$\int\frac{dv}{\phi(v)-v}=\int\frac{dx}{x}, \tag{31}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἡ υ (καί ὅθεν ἡ y) δύναται νά εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς x.

Παράδειγμα 2. Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$2xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{32}$$

δοθέντος ὅτι y = 0 διά x = 1.

Γράφοντες τήν (32) ὡς

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right), \tag{33}$$

καί χρησιμοποιοῦντες τήν (28) ἔχομεν

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}+v\right). \tag{34}$$

Ὅθεν

$$2x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v} \tag{35}$$

καί ἐξ αὐτῆς

$$\int\frac{2v}{1-v^2}\,dv=\int\frac{dx}{x}. \tag{36}$$

Ἄρα

$$-\log_e(1-v^2)=\log_e x+\log_e C, \tag{37}$$

ὅπου C εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Ἡ (37) ὑπό ἄλλην μορφήν χωρίς λογαρίθμους γράφεται

$$y^2-x^2=-\frac{x}{C}. \tag{38}$$

Τώρα ἐπειδή y = 0 διά x = 1 πρέπει νά ἔχωμεν

$$C=1. \tag{39}$$

Ἡ λύσις τῆς (32) ἡ ἱκανοποιοῦσα τήν συνοριακήν συνθήκην εἶναι λοιπόν

$$x^2-y^2=x. \tag{40}$$

Μερικαί μή ὁμογενεῖς ἐξισώσεις δύνανται νά τεθοῦν ὑπό τήν μορφήν τῶν ὁμογενῶν δι'ἁπλῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν. Ἐπί παραδείγματι, ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{fx+gy+h}, \tag{41}$$

ὅπου α,b,c,f,g καί h εἶναι δοθεῖσαι σταθεραί, γίνεται θέτοντες

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+X,\\ y &= y_0+Y,\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

(ὅπου x_0 κάί y_0 εἶναι σταθεραί)

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+ax_0+by_0+c}{fX+gY+fx_0+gy_0+h}. \tag{43}$$

'Εάν τά x_0 καί y_0 ἐκλεγοῦν οὕτως ὥστε

$$\left.\begin{aligned} ax_0+by_0+c &= 0,\\ fx_0+gy_0+h &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

τότε

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{fX+gY}=\frac{a+b(Y/X)}{f+g(Y/X)}, \tag{45}$$

ἡ ὁποία εἶναι ὁμογενοῦς μορφῆς.

Μολαταῦτα, ἡ (44) τότε μόνον καθορίζει τά x_0 καί y_0 ὅταν $ag-bf \neq 0$ (βλ. Κεφ. 10). 'Εάν $ag-bf = 0$ τότε $f/a = g/b = k$ καί ἡ (41) γίνεται

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{k(ax+by)+h}. \tag{46}$$

Ὅθεν θέτοντες $u = ax+by$ ἡ (46) γίνεται

$$\frac{du}{dx}=a+b\left(\frac{u+c}{ku+h}\right), \tag{47}$$

ἡ ὁποία ἔχει λάβει τήν μορφήν τῶν χωριζομένων μεταβλητῶν.

Παράδειγμα 3. Διά νά λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y-5} \tag{48}$$

χρησιμοποιοῦμεν τήν (42) καί λαμβάνομεν

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y+x_0+y_0+3}{X-Y+x_0-y_0-5}. \tag{49}$$

Ὅθεν θέτοντες

$$\left.\begin{aligned} x_0+y_0+3 &= 0,\\ x_0-y_0-5 &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

ἡ (49) λαμβάνει τήν μορφήν τῆς ὁμογενοῦς

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y} \tag{51}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἡ Y δύναται νά εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς X. Τελικῶς ἵνα ἐκφράσωμεν τήν y συναρτήσει τῆς x παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (50) ὅτι $x_0 = 1$, $y_0 = -4$ καί ὅθεν ἐκ τῆς (42) $x = 1+X$, $y = -4+Y$.

Παράδειγμα 4. Ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{1-x-y} \tag{52}$$

εἶναι τοιαύτη ὥστε ὅταν $x = x_0+X$, $y = y_0+Y$, τά x_0 καί y_0 (ἐκ τῆς (44)) νά μήν ὑπάρχουν. Ὅθεν θέτοντες $x+y = u$ ἔχομεν

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=\frac{u}{1-u} \tag{53}$$

ἤ

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{1-u}. \tag{54}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή εἶναι τῆς μορφῆς τῶν διαχωρισίμων μεταβλητῶν καί δύναται νά ὁλοκληρωθῇ κατ'εὐθεῖαν δίδουσα

$$\int(1-u)\,du=\int dx \tag{55}$$

ἤ

$$u-\frac{u^2}{2}=x+C, \tag{56}$$

ὅπου C εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Ὡς ἐκ τούτου, ἐπειδή $u = x+y$, ἡ (56) γίνεται

$$y-\frac{(x+y)^2}{2}=C, \tag{57}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ λύσις τῆς (52).

(γ) Ἡ Ἀ κ ρ ι β ή ς Ἐ ξ ί σ ω σ ι ς. Ἐάν

$$F(x, y)=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{58}$$

ὅπου P καί Q εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τῶν x καί y, τότε ἡ γε - νική πρώτης τάξεως ἐξίσωσις (16) λαμβάνει τήν μορφήν

$$Q(x, y)\frac{dy}{dx}+P(x, y)=0. \tag{59}$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἀναλόγως τῶν μορφῶν τῶν P(x,y) καί Q(x,y) εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθῇ τό ἀριστερόν μέλος τῆς ἐξισώσεως ὡς ὁλική παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως, ἔστω u(x,y). Ἐκ τοῦ Κεφ. 9, § 9.6 , ἔχομεν

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{60}$$

Συνεπῶς (συγκρίνοντες τάς (59) καί (60)) παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν

$$\left.\begin{aligned} P(x, y)&=\frac{\partial u}{\partial x},\\ Q(x, y)&=\frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

ἡ (59) δύναται νά γραφῇ ὡς

$$\frac{du}{dx}=0, \tag{62}$$

ἡ λύσις τῆς ὁποίας εἶναι

$$u(x, y) = \text{σταθερά} \tag{63}$$

Παραγωγίζοντες τήν (61) (καί ὑποθέτοντες ὅτι αἱ P καί Q ἔχουν συνεχεῖς πρώτας παραγώγους) ἔχομεν

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{64}$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη εἶναι ἀναγκαία καί ἱκανή ἵνα ἡ (59) δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς ὁλικόν διαφορικόν. Διευκρινίζομεν τήν λύσιν ἀκριβῶν ἐξισώσεων διά τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 5. Ἡ ἐξίσωσις

$$(8y-x^2y)\frac{dy}{dx}+(x-xy^2)=0 \tag{65}$$

εἶναι ἀκριβής ἐπειδή $P(x,y) = x-xy^2$, $Q(x,y) = 8y-x^2y$ καί

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{66}$$

Διά νά εὕρωμεν τήν u(x,y) χρησιμοποιοῦμεν τήν (61) ἡ ὁποία δίδει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = x - xy^2. \tag{67}$$

Συνεπῶς, ὁλοκληρώνοντες ὡς πρός x, ἔχομεν

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2}(1-y^2)+\phi(y), \tag{68}$$

ὅπου φ(y) εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ y. Τώρα ἐπειδή ἐκ τῆς (61)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 8y - x^2 y \tag{69}$$

παρατηροῦμεν διά παραγωγίσεως τῆς (68) ὡς πρός y καί συγκρίνον - τες μέ τήν (69) ὅτι

$$8y - x^2 y = -x^2 y + \frac{d\phi}{dy}. \tag{70}$$

Ὅθεν

$$\phi = 4y^2 + c, \tag{71}$$

ὅπου c εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Τελικῶς αἱ (68) καί (71) ὁμοῦ δίδουν

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2}(1-y^2)+4y^2+c \tag{72}$$

καί ἡ λύσις τῆς (65) εἶναι λοιπόν (ἐκ τῆς (63))

$$\frac{x^2}{2}(1-y^2)+4y^2 = \text{σταθερά} \tag{73}$$

(ἡ σταθερά c ἔχει συμπεριληφθῆ εἰς τόν σταθερόν ὅρον τοῦ δεξιοῦ μέλους).

Παράδειγμα 6. Ἡ ἐξίσωσις

$$2x \log_e x \frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{74}$$

δέν εἶναι ἀκριβής ἐπειδή P(x,y) = y, Q(x,y) = $2x\log_e x$ καί

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

'Εάν ὅμως ἡ (74) πολλαπλασιασθῇ ἐπί y/x εὑρίσκομεν

$$2y \log_e x \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = 0, \tag{75}$$

ἡ ὁποία, ἐπειδή

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y \log_e x), \tag{76}$$

εἶναι ἀκριβής. Συνεπῶς ἀκολουθοῦντες τήν μέθοδον τοῦ τελευταίου παραδείγματος ἡ λύσις τῆς (75) (καί ἐξ αὐτῆς τῆς (74)) εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ἡ

$$u(x,y) = y^2 \log_e x = \text{σταθερά}. \tag{77}$$

'Ο παράγων y/x, ὁ χρησιμοποιηθείς ἀνωτέρω διά νά καταστήση τήν (74) ἀκριβῆ καλεῖται ὁλοκληρωτικός παράγων.

Γενικώτερον, ἐάν ἡ ἐξίσωσις

$$Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y) = 0 \tag{78}$$

δέν εἶναι ἀκριβής, τότε ὑπάρχει ὁλοκληρωτικός παράγων μ(x,y) ὁ ὁποῖος τήν μετατρέπει εἰς ἀκριβῆ, ἄν καί ἡ εὕρεσις τῆς μορφῆς τοῦ μ ἐνδέχεται νά εἶναι δυσχερής. 'Υποθέσωμεν ὅτι ἡ (78) πολλαπλασιάζεται ἐπί μ(x,y) δίδουσα

$$\mu(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx} + \mu(x,y)P(x,y) = 0. \tag{79}$$

Τότε (γράφοντες P,Q καί μ ἀντί P(x,y), Q(x,y) καί μ(x,y), ἀντιστοίχως) ἡ (79) εἶναι ἀκριβής ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ μ ἱκανοποιεῖ τήν μερικήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) \tag{80}$$

ἤ

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}=0. \tag{81}$$

Ἐκτός ἐάν αἱ P καί Q ἔχουν ἐξαιρετικῶς ἁπλᾶς μορφάς, ἡ (81) εἶναι συνήθως δύσκολον νά λυθῇ. Ὁ προσδιορισμός ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος εἶναι εἰς τό σημεῖον αὐτό ζήτημα δοκιμῆς καί σφάλματος.

Παράδειγμα 7. Ἡ ἐξίσωσις

$$x\frac{dy}{dx}-y=0 \tag{82}$$

δέν εἶναι ἀκριβής. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ὁλοκληρωτικός παράγων μ τοιοῦτος ὥστε ἡ

$$\mu x\frac{dy}{dx}-\mu y=0 \tag{83}$$

νά εἶναι ἀκριβής. Τότε

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu x)=\frac{\partial}{\partial y}(-\mu y) \tag{84}$$

ἤ

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x}+y\frac{\partial \mu}{\partial y}+2\mu=0. \tag{85}$$

Ἑκάστη λύσις τῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως θά εἶναι κατάλληλος ὁλοκληρωτικός παράγων. Εὐκόλως δέ ἐπαληθεύεται ὅτι αἱ

$$\mu=\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2+y^2},\frac{1}{x^2-y^2} \tag{86}$$

εἶναι ὅλαι λύσεις τῆς (85) καί ἐξ αὐτοῦ ὅλαι εἶναι δυνατοί ὁλοκληρωτικοί παράγοντες. Ἐπί παραδείγματι λαμβάνοντες μ = $1/x^2$, ἡ (83) γίνεται

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0, \tag{87}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβής. Ἐπειδή ἡ (87) δύναται νά γραφῇ ὡς $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=0$, ἡ λύσις τῆς (82) εἶναι λοιπόν

$$y/x = \text{σταθερά}. \tag{88}$$

Ὁμοίως, λαμβάνοντες $\mu = \frac{1}{(x^2-y^2)}$, ἡ (83) γίνεται

$$\frac{x}{x^2-y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2-y^2}=0, \tag{89}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβής. Ἐπειδή ἡ (89) δύναται νά γραφῇ ὡς

$$\frac{d}{dx}\log_e(x^2-y^2)=0$$

καί πάλιν εὑρίσκομεν y/x = σταθερά ὡς εἰς τήν (88).

(δ) Ἡ Γραμμική Ἐξίσωσις.

Ἐάν

$$F(x,y)=Q(x)-P(x)y, \tag{90}$$

ὅπου $P(x)$ καί $Q(x)$ εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις ὡς πρός x (ἤ σταθεραί), τότε ἡ (16) γίνεται

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \tag{91}$$

Ἡ ἐξίσωσις ταύτη (γνωστή ὡς ἡ γενική γραμμική ἐξίσωσις πρώτης τάξεως) δύναται νά λυθῇ τῇ βοηθείᾳ ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος.Πράγματι, πολλαπλασιάζοντες τήν (91) ἐπί μίαν αὐθαίρετον συνάρτησιν $R(x)$ (τόν ὁλοκληρωτικόν παράγοντα), ἔχομεν

$$R(x)\frac{dy}{dx}+R(x)P(x)y=Q(x)R(x). \tag{92}$$

Ἐάν ἡ $R(x)$ ἐκλεγῇ οὕτως ὥστε τό ἀριστερόν μέλος τῆς (92) νά ἰσοῦται πρός $\frac{d}{dx}\{R(x)y\}$, τότε

$$\frac{d}{dx}\{R(x)y\}=R(x)\frac{dy}{dx}+y\frac{dR(x)}{dx}=R(x)\frac{dy}{dx}+R(x)P(x)y. \tag{93}$$

Ὅθεν συγκρίνοντες τούς ὅρους τῆς (93) ἔχομεν

$$y\frac{dR(x)}{dx}=R(x)P(x)y, \tag{94}$$

ἡ ὁποία κατόπιν ὁλοκληρώσεως δίδει (ὑποτιθεμένου ὅτι $y \neq 0$)

$$R(x)=e^{\int P(x)\,dx}. \tag{95}$$

Ἐπειδή ἡ $P(x)$ εἶναι γνωστή συνάρτησις, ἡ μορφή τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος καθορίζεται μονοσημάντως ὑπό τῆς (95).

Τελικῶς ἐκ τῶν (92) καί (93)

$$\frac{d}{dx}\{R(x)y\} = Q(x)R(x), \tag{96}$$

καί ἐξ αὐτῆς

$$R(x)y = \int Q(x)R(x)\,dx. \tag{97}$$

Δεδομένης τῆς R(x) ὑπό τῆς (95), ἡ (97) δίδει τήν γενικήν λύσιν τῆς (91).

Παράδειγμα 8. Νά λυθῆ ἡ

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y = x^2 \tag{98}$$

δοθέντος ὅτι y = 1/6 διά x = 1.

'Εδῶ ὁ ὁλοκληρωτικός παράγων R δίδεται ὑπό τῆς

$$R(x) = e^{\int(3/x)dx} = e^{3\{\log_e x\}} = e^{\log_e x^3} = x^3. \tag{99}$$

"Οθεν ἐκ τῆς (97) ἡ λύσις τῆς (98) εἶναι

$$x^3y = \int x^2 \,.\, x^3\,dx = \frac{x^6}{6}+c, \tag{100}$$

ἤ

$$y = \frac{x^3}{6}+\frac{c}{x^3}. \tag{101}$$

Μέ y = 1/6 διά x = 1, εὑρίσκομεν c = 0 καί ἐξ αὐτοῦ ἡ ζητουμένη λύσις τῆς (98) εἶναι

$$y = \frac{x^3}{6}. \tag{102}$$

21.4. Γραμμικαί 'Εξισώσεις

'Η προαναφερθεῖσα πρώτης τάξεως γραμμική ἐξίσωσις εἶναι ἰδιαιτέρα περίπτωσις τῆς γενικῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως τάξεως n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ \dots\ +a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y = f(x), \tag{103}$$

ὅπου $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$,...$\alpha_n(x)$ καί f(x) εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τῆς x ἤ σταθεραί. 'Η ἐξίσωσις αὐτή καλεῖται ὁμογενής ὅταν f(x)=0 καί μή ὁμογενής ὅταν f(x) $\neq$ 0. 'Ως θά ἴδωμεν κατωτέρω, εἶναι χρήσιμον είς τήν έπίλυσιν μή όμογενῶν έξισώσεων τῆς μορφῆς (103) νά έξετάζωμεν τήν άντίστοιχον όμογενῆ (ἤ άνηγμένην) έξίσωσιν ἡ όποία προκύπτει ὅταν θέσωμεν $f(x) = 0$. 'Επί παραδείγματι, ἡ όμογενής έξίσωσις ἡ άντιστοιχοῦσα είς τήν

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y=\sin x \tag{104}$$

εἶναι

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y=0. \tag{105}$$

'Υποθέσωμεν τώρα ὅτι y_1 καί y_2 εἶναι δύο άνεξάρτητοι (βλ. Κεφ.10, § 10.6, Τ.1) λύσεις τῆς όμογενοῦς έξισώσεως (103), ἤτοι τῆς

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0. \tag{106}$$

Τότε προφανῶς, ὁ γραμμικός συνδυασμός

$$y=c_1y_1+c_2y_2, \tag{107}$$

ὅπου c_1 καί c_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί, εἶναι έπίσης λύσις καθ' ὅσον δι'άντικαταστάσεως τῆς (107) είς τό άριστερόν μέλος τῆς (106) ἔχομεν

$$\left(a_0(x)\frac{d^ny_1}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\frac{dy_1}{dx}+a_n(x)y_1\right)$$
$$+\left(a_0(x)\frac{d^ny_2}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\frac{dy_2}{dx}+a_n(x)y_2\right). \tag{108}$$

'Η άνωτέρω ἔκφρασις εἶναι έκ ταυτότητος μηδέν καθ'ὅσον έκάστη παρένθεσις εἶναι μηδέν έπειδή αἱ y_1 καί y_2 εἶναι λύσεις τῆς (106). 'Ομοίως δυνάμεθα νά δείξωμεν ὅτι έάν $y_1, y_2, \dots y_n$ εἶναι n άνεξάρτητοι λύσεις τῆς (106), τότε ὁ γραμμικός συνδυασμός

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n, \tag{109}$$

ὅπου $c_1, c_2, \dots c_n$ εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί, εἶναι έπίσης λύσις τῆς (106). 'Επειδή ἡ (109) περιέχει n σταθεράς εἶναι λογικόν (έφαρμόζοντες τάς ίδέας τῆς § 21.2) νά λάβωμεν αὐτήν ὡς τήν γενικήν λύσιν τῆς n τάξεως διαφορικῆς έξισώσεως (106).

'Ορίζομεν τώρα τήν γενικήν λύσιν τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως (103) ὡς τό ἄθροισμα τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως καί τυχούσης μερικῆς λύσεως τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως. Δηλαδή, ἐάν Y εἶναι μία μερική λύσις τῆς (103), τότε ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + Y. \tag{110}$$

Προφανῶς ἡ φράσις "γενική λύσις" εἶναι ὑπερφορτωμένη ἐδῶ καί διά νά ἀποφύγωμεν τήν σύγχυσιν συνηθίζεται ὅταν ἀσχολούμεθα μέ μή ὁμογενεῖς ἐξισώσεις νά καλοῦμεν τήν γενικήν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως "συμπληρωματικήν συνάρτησιν" καί τήν μερικήν λύσιν Y τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως "μερικόν ὁλοκλήρωμα". Ὅθεν διά μή ὁμογενεῖς ἐξισώσεις ἰσχύει ἡ

Γενική λύσις = Συμπληρωματική Συνάρτησις+Μερικόν 'Ολοκλήρωμα

21.5. Γραμμικαί 'Ομογενεῖς 'Εξισώσεις μέ Σταθερούς Συντελεστάς

'Η γενική γραμμική ἐξίσωσις μέ τήν ὁποίαν ἠσχολήθημεν εἰς τήν τελευταίαν παράγραφον εἶναι δύσκολον νά λυθῇ καί χρειάζεται ειδικάς τεχνικάς (βλ. Κεφ. 22 καί ἐπίσης § 21.9 (α)). Ὅμως μία σπουδαία καί εἰδική περίπτωσις εἶναι ὅταν οἱ συντελεσταί $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ εἶναι σταθεραί, ὅτε ἡ ἐξίσωσις καλεῖται ἐξίσωσις μέ σταθερούς συντελεστάς. Εἰς τήν παράγραφον αὐτήν θά ἐξετάσωμεν τήν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως μέ σταθερούς συντελεστάς

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{111}$$

μέ ἰδιαιτέραν ἔμφασιν διά τήν ἐξίσωσιν δευτέρας τάξεως (n = 2)

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0. \tag{112}$$

Ἔστω, δοκιμαστικῶς, ὡς λύσις τῆς (112) ἡ

$$y = e^{mx}. \tag{113}$$

τότε

$$(a_0 m^2 + a_1 m + a_2) e^{mx} = 0. \tag{114}$$

Ὅθεν ἡ (113) εἶναι λύσις τῆς (112) ὅταν m εἶναι ρίζα τῆς

$$a_0m^2+a_1m+a_2=0. \tag{115}$$

Ἐάν m_1 καί m_2 εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (115) (ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γνωστή ὡς ἡ βοηθητική ἐξίσωσις) τότε αἱ

$$y_1=e^{m_1x} \quad \text{καί} \quad y_2=e^{m_2x} \tag{116}$$

εἶναι ἀμφότεραι λύσεις τῆς (112). Ὅθεν ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y=A_1e^{m_1x}+A_2e^{m_2x}, \tag{117}$$

ὅπου A_1 καί A_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Μία ἐλαφρά δυσκολία ἐμφανίζεται ὅταν ἡ βοηθητική ἐξίσωσις ἔχει ἴσας ρίζας, δηλαδή $m_1 = m_2 = m$. Πράγματι, εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν αἱ δύο λύσεις τῆς (116) δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι καί ἡ (117) γίνεται

$$y=(A_1+A_2)e^{mx}=Ce^{mx}, \tag{118}$$

ὅπου C εἶναι μία νέα αὐθαίρετος σταθερά. Ἡ λύσις αὐτή δέν δύναται νά εἶναι γενική λύσις τῆς (112) ἐπειδή περιέχει μόνον μίαν αὐθαίρετον σταθεράν. Διά νά εὕρωμεν λοιπόν μίαν ἄλλην λύσιν γράφομεν

$$y=ue^{mx}, \tag{119}$$

ὅπου u εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (112) λαμβάνομεν

$$a_0\frac{d^2u}{dx^2}+(2ma_0+a_1)\frac{du}{dx}+(a_0m^2+a_1m+a_2)u=0. \tag{120}$$

Συμφώνως πρός τήν (115) ἡ τελευταία παρένθεσις τῆς (120) μηδενίζεται· ὁμοίως ἐπειδή καί αἱ δύο ρίζαι τῆς (115) εἶναι ἴσαι πρός m ἔχομεν ὡς ἄθροισμά των

$$m+m=-\frac{a_1}{a_0} \tag{121}$$

ἤ

$$2ma_0+a_1=0. \tag{122}$$

Ὅθεν ὁ δεύτερος ὅρος τῆς (120) ἐπίσης μηδενίζεται. Ἡ μορφή τῆς u καθορίζεται λοιπόν ἐκ τῆς ἀπομενούσης ἐξισώσεως

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \tag{123}$$

ἡ ὁποία δίδει

$$u = A_1 + A_2 x, \tag{124}$$

ὅπου A_1 καί A_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ἡ γενική λύσις τῆς (112), ὅταν ἡ βοηθητική ἐξίσωσις ἔχη δύο ἴσας ρίζας $m_1 = m_2 = m$, εἶναι ἡ

$$y = (A_1 + A_2 x)e^{mx}. \tag{125}$$

Ὁμοίως ἐάν ἡ n τάξεως σταθερῶν συντελεστῶν ἐξίσωσις (111) εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ βοηθητική ἐξίσωσις νά ἔχη ρίζας m_1, m_2,... πολλαπλότητος k_1, k_2,..., τότε οἱ κατάλληλοι ὅροι εἰς τήν γενικήν λύσιν εἶναι

$$\begin{aligned}&(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_{k_1} x^{k_1 - 1})e^{m_1 x},\\ &(B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots + B_{k_2} x^{k_2 - 1})e^{m_2 x},\end{aligned} \tag{126}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς.

Διασαφηνίζομεν τά ἀποτελέσματα αὐτά διά τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 9. Θά ἐπιλύσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0. \tag{127}$$

Ἐδῶ θέτοντες $y = e^{mx}$ ἔχομεν τήν βοηθητικήν ἐξίσωσιν

$$m^2 + 3m + 2 = 0, \tag{128}$$

ἡ ὁποία ἔχει ρίζας $m = -1, -2$. Ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (127) εἶναι ἡ

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}, \tag{129}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 10. Ἔστω πρός λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{130}$$

Ἐδῶ ἡ βοηθητική ἐξίσωσις εἶναι

$$m^2+m+1=0, \tag{131}$$

ἡ ὁποία ἔχει ρίζας m = $-\frac{1}{2}\pm i(\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Συνεπῶς ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y=Ae^{\left[-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right]x}+Be^{\left[-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right]x} \tag{132}$$

Ὅταν, ὅπως ἐδῶ, αἱ ρίζαι τῆς βοηθητικῆς ἐξισώσεως εἶναι μιγαδικαί ἡ γενική λύσις δύναται νά γραφῇ καί ὑπό διαφορετικήν μορφήν χρησιμοποιοῦντες τήν σχέσιν (βλ. Κεφ. 7, σχέσιν (42), Τ.1)

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \quad (x \text{ πραγματικός}). \tag{133}$$

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἡ (132) γίνεται

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(E\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+F\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \tag{134}$$

ὅπου E καί F εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 11. Θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0. \tag{135}$$

Ἐδῶ ἡ βοηθητική ἐξίσωσις

$$m^2-6m+9=0 \tag{136}$$

ἔχει δύο ἴσας ρίζας m = 3.

Συνεπῶς ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y=(A+Bx)e^{3x}, \tag{137}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 12. Ἔστω ἡ

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0. \tag{138}$$

Ἐδῶ ἡ βοηθητική ἐξίσωσις

$$m^3-m^2-m+1=0$$

(προκύψασα δι'ἀντικαταστάσεως y = e^{mx} εἰς τήν (138)) γράφεται ὡς γινόμενον

$$(m-1)^2(m+1)=0,$$

ἤτοι $m = 1$ (διπλῆ) καί $m = -1$. Ἡ γενική λύσις εἶναι λοιπόν

$$y=(A+Bx)e^{x}+Ce^{-x}, \tag{139}$$

ὅπου A,B καί C εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

21.6. Γραμμικαί μή Ὁμογενεῖς Ἐξισώσεις μέ Σταθερούς Συντελεστάς

Ἐδῶ ἐξετάζομεν ἐξισώσεις τῆς γενικῆς μορφῆς

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x), \tag{140}$$

ὅπου $f(x)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις τῆς x καί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ εἶναι σταθεραί. Ὡς εἴδομεν ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τό ἄθροισμα τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς (ἀνηγμένης) ἐξισώσεως (προκυπτούσης ἐάν τεθῆ $f(x) = 0$) καί μιᾶς μερικῆς λύσεως (ὁλοκληρώματος) τῆς (140). Ἐφ'ὅσον ὅμως ἡ ὁμογενής ἐξίσωσις δύναται νά λυθῆ διά τῆς μεθόδου τῆς τελευταίας παραγράφου, τό μόνον ἀπομένον πρόβλημα εἶναι νά εὕρωμεν μερικήν λύσιν διά δεδομένην περίπτωσιν. Τοῦτο ἐνίοτε ἐπιτυγχάνεται δι'ἐπισκοπήσεως. Ἐπί παραδείγματι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=3x \tag{141}$$

ἱκανοποιεῖται ὑπό τῆς $y = 3x$, ἡ ὁποία εἶναι μερική λύσις. Ἡ γενική λύσις τῆς (141) εἶναι λοιπόν τό ἄθροισμα τῆς μερικῆς λύσεως καί τῆς γενικῆς λύσεως (τῆς συμπληρωματικῆς συναρτήσεως) τῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0. \tag{142}$$

Λύοντες τήν (142) εὑρίσκομεν $m^2+1 = 0$, καί ὅθεν $m = \pm i$. Ἡ συμπληρωματική συνάρτησις εἶναι τῆς μορφῆς

$$y=Ae^{ix}+Be^{-ix}=E\cos x+F\sin x, \tag{143}$$

ὅπου A,B,E,F εἶναι σταθεραί. Συνεπῶς ἡ γενική λύσις τῆς (141) εἶναι ἡ

$$y=E\cos x+F\sin x+3x. \tag{144}$$

Μολαταῦτα, ἐξαιρέσει πολύ ἁπλῶν περιπτώσεων, εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατον νά εὕρωμεν μερικήν λύσιν (ὁλοκλήρωμα) δι' ἐπισκοπήσεως καί ὡς ἐκ τούτου ἄλλαι μέθοδοι πρέπει νά χρησιμοποιηθοῦν. Δύο ἐκ τῶν μεθόδων αὐτῶν θά ἀναπτυχθοῦν κατωτέρω· μία τρίτη μέθοδος βασιζομένη ἐπί τῶν ἰδιοτήτων ἑνός γραμμικοῦ τελεστοῦ (τοῦ τελεστοῦ D) θά ἀναπτυχθῆ εἰς τήν § 21.8. Σημειοῦμεν ἐδῶ ὅτι εἰς τό Κεφ.23 θά συναντήσωμεν μίαν σπουδαίαν μέθοδον διά τήν λύσιν συνήθων γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς, διά τῆς ὁποίας δέν θά εἶναι ἀναγκαῖον νά εὕρωμεν κεχωρισμένως τήν συμπληρωματικήν συνάρτησιν καί ἕνα ὁλοκλήρωμα.

(α) Μέθοδος τῶν Ἀπροσδιορίστων Συντελεστῶν.

Ἡ μέθοδος αὐτή ἔγκειται εἰς τήν δοκιμήν ὡρισμένης μορφῆς μερικῆς λύσεως $Y(x)$ τῆς (140) ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως $f(x)$ καί περιέχει ὡρισμένον ἀριθμόν αὐθαιρέτων σταθερῶν. Ἡ δοκιμαστική συνάρτησις ἐν συνεχείᾳ ἀντικαθίσταται εἰς τήν ἐξίσωσιν καί αἱ σταθεραί ἐκλέγονται ὥστε νά εἶναι λύσις. Οἱ ἀκόλουθοι κανόνες (οἱ ὁποῖοι δύνανται νά δικαιολογηθοῦν αὐστηρῶς δι'ἄλλων μεθόδων) εἶναι χρήσιμοι εἰς τόν καθορισμόν τῆς μορφῆς τῆς $Y(x)$ διά συγκεκριμένην μορφήν τῆς $f(x)$.

(i) ἐάν $f(x) = \alpha e^{bx}$ ὅπου α καί b εἶναι σταθεραί καί ἐάν ἡ βοηθητική ἐξίσωσις τῆς (140) ἔχει $m = b$ ὡς ρίζαν πολλαπλότητος k (ἤτοι ἡ ρίζα ἐπαναλαμβάνεται k φοράς), τότε λαμβάνομεν

$$Y(x) = Ax^k e^{bx},$$

ὅπου A εἶναι προσδιοριστέα σταθερά. (Ἐάν $m = b$ δέν εἶναι ρίζα τότε $k = 0$).

(ii) ἐάν $f(x) = \alpha \sin bx$ ἤ $\alpha \cos bx$ ὅπου α καί b εἶναι σταθεραί καί ἐάν (m^2+b^2) εἶναι παράγων τῆς βοηθητικῆς ἐξισώσεως πολλαπλότητος k, τότε λαμβάνομεν

$$Y(x) = x^k(A \sin bx + B \cos bx),$$

ὅπου A καί B εἶναι προσδιοριστέαι σταθεραί. (Ἐάν ὅμως τό m^2+b^2 δέν εἶναι παράγων, τότε $k = 0$).

(iii) ἐάν $f(x) = \alpha x^s$, ὅπου α καί s εἶναι σταθεραί καί ἐάν ἡ βοηθητική ἐξίσωσις ἔχη $m = 0$ ὡς ρίζαν πολλαπλότητος k, τότε λαμβάνομεν

$$Y(x) = x^k(Ax^s+Bx^{s-1}+ \ldots +Px+Q)$$

ὅπου A,B,...P,Q εἶναι σταθεραί προσδιοριστέαι. (Πάλιν ἐάν ἡ $m = 0$ δέν εἶναι ρίζα, τότε $k = 0$).

Ἐάν ἡ f(x) εἶναι τό ἄθροισμα τυχόντων δύο ἤ ὅλων τῶν εἰδικῶν αὐτῶν μορφῶν τό μερικόν ὁλοκλήρωμα εἶναι τότε τό κατάλληλον ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν μερικῶν ὁλοκληρωμάτων. Τά κατωτέρω παραδείγματα ὑποδεικνύουν τήν χρῆσιν τῶν κανόνων αὐτῶν.

Παράδειγμα 13. Νά εὑρεθῇ μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y = e^{2x}. \tag{145}$$

Ἡ βοηθητική ἐξίσωσις

$$m^2-3m+2=0 \tag{146}$$

ἔχει ρίζας $m = 1$ καί $m = 2$. Ὅθεν ἐκ τῆς (i), ἐπειδή μία ἐκ τῶν ριζῶν εἶναι ἴση πρός $b(=2)$ πρέπει νά λάβωμεν $k = 1$ καί ἐξ αὐτοῦ

$$Y(x) = Axe^{2x}. \tag{147}$$

Ἀντικαθιστῶντες τήν (147) εἰς τήν (145) εὑρίσκομεν· $A = 1$ καί ἐξ αὐτοῦ τό μερικόν ὁλοκλήρωμα εἶναι

$$Y(x) = xe^{2x}. \tag{148}$$

Ἡ γενική λύσις τῆς (145) εἶναι κατά ταῦτα ἡ

$$y = Ce^x+De^{2x}+xe^{2x}, \tag{149}$$

ὅπου C καί D εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 14. Νά εὑρεθῇ μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y = 3\sin 2x. \tag{150}$$

᾿Εδῶ ἡ βοηθητική ἐξίσωσις εἶναι

$$(m^2+4)=0. \tag{151}$$

Τώρα ἐπειδή (εἰς τόν κανόνα (ii)) b = 2, παρατηροῦμεν ὅτι τό m^2+b^2 συμπίπτει μέ τόν παράγοντα m^2+4 τῆς (151). ῞Οθεν k = 1 καί συνεπῶς

$$Y(x)=x(A\sin 2x+B\cos 2x), \tag{152}$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθεραί τάς ὁποίας θά ὑπολογίσωμεν. ᾿Αντικαθιστῶντες τήν (152) εἰς τήν (150) εὑρίσκομεν A = 0, B = $-\frac{3}{4}$. Τό μερικόν ὁλοκλήρωμα εἶναι

$$Y(x)=-\tfrac{3}{4}x\cos 2x. \tag{153}$$

Συνεπῶς ἡ γενική λύσις (χρησιμοποιοῦντες τήν (151)) εἶναι

$$\begin{aligned} y&=Ce^{2ix}+De^{-2ix}-\tfrac{3}{4}x\cos 2x,\\ &=E\cos 2x+F\sin 2x-\tfrac{3}{4}x\cos 2x, \end{aligned} \tag{154}$$

ὅπου C,D,E καί F εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 15. Νά εὑρεθῇ μερική λύσις τῆς

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=6x+\sin x. \tag{155}$$

᾿Εδῶ ἡ βοηθητική ἐξίσωσις

$$m^3-2m^2-m+2=0 \tag{156}$$

ἔχει ρίζας m = 1, -1 καί 2. ῞Οθεν ἐκ τῶν (iii) καί (ii) αἱ μορφαί τῶν μερικῶν ὁλοκληρωμάτων τά ὁποῖα εἶναι κατάλληλα διά τόν ὅρον 6x καί τόν ὅρον sinx εἶναι ἀντιστοίχως Ax+B καί Csinx+Dcosx ὅπου A,B,C καί D εἶναι σταθεραί. Ἡ μορφή τῆς Y(x) διά τήν (155) εἶναι

$$Y(x)=Ax+B+C\sin x+D\cos x. \tag{157}$$

᾿Αντικαθιστῶντες τήν (157) εἰς τήν (155) εὑρίσκομεν A = 3,B = $\frac{3}{2}$, C = $\frac{1}{5}$ καί D = $\frac{1}{10}$ καί ἐξ αὐτῶν μερικόν ὁλοκλήρωμα εἶναι

$$Y(x)=3(x+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{10}(2\sin x+\cos x). \tag{158}$$

(b) Μ έ θ ο δ ο ς τ ῶ ν Μ ε τ α β α λ λ ο μ έ ν ω ν Σ τ α - θ ε ρ ῶ ν .

Ἐπεξηγοῦμεν τήν μέθοδον αὐτήν (ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης γνωστή καί ὡς μέθοδος τῆς μεταβολῆς τῶν παραμέτρων) θεωροῦντες τήν δευτέρας τάξεως ἐξίσωσιν μέ σταθεράς συντελεστάς

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x). \tag{159}$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συμπληρωματική συνάρτησις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2, \tag{160}$$

ὅπου y_1 καί y_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι λύσεις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \tag{161}$$

καί A_1, A_2 εἶναι σταθεραί. Ἐν συνεχείᾳ ἀντικαθιστῶμεν τάς σταθεράς διά τῶν συναρτήσεων $v_1(x)$ καί $v_2(x)$ καί ὁρίζομεν μίαν νέαν συνάρτησιν $Y(x)$ διά τῆς

$$Y(x) = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2. \tag{162}$$

Αἱ συναρτήσεις $v_1(x)$ καί $v_2(x)$ πρέπει νά εὑρεθοῦν οὕτως ὥστε ἡ $Y(x)$ νά εἶναι λύσις τῆς (159). Τώρα ἀντικαθιστῶντες τήν (162) εἰς τήν (159) ὁδηγεῖ εἰς ἕνα μόνον περιορισμόν ἐπί τῶν συναρτήσεων αὐτῶν· διά τοῦτο δέν καθορίζονται ἐκ τοῦ περιορισμοῦ ὅτι ἡ $Y(x)$ εἶναι λύσις τῆς (159). Συνεπῶς δυνάμεθα νά ἐπιβάλωμεν μίαν εἰσέτι συνθήκην ἐπί τῶν $v_1(x)$ καί $v_2(x)$ ἡ ὁποία ἐν συνδυασμῷ μετά τῆς πρώτης θά καθορίση ταύτας μονοσημάντως. Διευκολύνει νά λάβωμεν ὡς τοιαύτην συνθήκην τήν

$$v_1'(x) y_1 + v_2'(x) y_2 = 0, \quad \text{for all } x, \tag{163}$$

(τόνοι ὑποδηλοῦν παράγωγον ὡς πρός x) καθ'ὅσον ἡ ἔκφρασις διά τήν $dY(x)/dx$ ἡ ὁποία θά χρειασθῆ κατωτέρω ἁπλοποιεῖται εἰς

$$\frac{dY(x)}{dx} = v_1(x) y_1' + v_2(x) y_2'. \tag{164}$$

Παραγωγίζοντες τήν (164) εὑρίσκομεν

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = v_1(x) y_1'' + v_2(x) y_2'' + v_1'(x) y_1' + v_2'(x) y_2'. \tag{165}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἀντικαθιστῶντες τάς (162),(164) καί (165) εἰς τήν (159) ἔχομεν

$$\begin{aligned} a_0[v_1(x)y_1'' + v_2(x)y_2'' + v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2'] \\ + a_1[v_1(x)y_1' + v_2(x)y_2'] + a_2[v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2] = f(x), \end{aligned} \tag{166}$$

ἤ

$$\begin{aligned} v_1(x)(a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + v_2(x)(a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) \\ + a_0[v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2'] = f(x). \end{aligned} \tag{167}$$

Ἐπειδή ἐξ ὁρισμοῦ y_1 καί y_2 εἶναι λύσεις τῆς (161) αἱ πρῶται δύο ἀγκύλαι τῆς (167) μηδενίζονται καί συνεπῶς

$$v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2' = \frac{f(x)}{a_0}, \quad (a_0 \neq 0). \tag{168}$$

Ὅθεν λύοντες τάς (168) καί (163) συγχρόνως εὑρίσκομεν

$$v_1'(x) = -\frac{y_2f(x)}{a_0(y_1y_2' - y_1'y_2)} \tag{169}$$

καί

$$v_2'(x) = \frac{y_1f(x)}{a_0(y_1y_2' - y_1'y_2)}, \tag{170}$$

ἐκ τῶν ὁποίων

$$v_1(x) = -\frac{1}{a_0}\int \frac{y_2f(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\, dx \tag{171}$$

καί

$$v_2(x) = \frac{1}{a_0}\int \frac{y_1f(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\, dx. \tag{172}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδή αἱ y_1 καί y_2 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἀνεξάρτητοι λύσεις ἡ Wronskian $y_1y_2' - y_2y_1'$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός (ἴδέ Κεφ. 10, § 10.8, Τ.1).

Ὑπό τήν μορφήν αὐτήν τῶν $v_1(x)$ καί $v_2(x)$, ἡ (162) εἶναι μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς (159). Ἡ γενική λύσις εἶναι λοιπόν τό ἄθροισμα τῶν (160) καί (162), δηλαδή

$$y=[A_1+v_1(x)]y_1+[A_2+v_2(x)]y_2. \tag{173}$$

Παράδειγμα 16. Νά λυθῇ ἡ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=e^x. \tag{174}$$

Αἱ δύο λύσεις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως εἶναι $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$. Ἑπομένως ἡ συμπληρωματική συνάρτησις εἶναι

$$y=A_1e^x+A_2e^{-x}. \tag{175}$$

Συνεπῶς τό μερικόν ὁλοκλήρωμα Y(x) εἶναι

$$Y(x)=v_1(x)e^x+v_2(x)e^{-x}, \tag{176}$$

ὅπου, ἐκ τῶν (171) καί (172),

$$v_1(x)=-\int\frac{e^{-x}\,.\,e^x}{(-e^x\,.\,e^{-x}-e^x\,.\,e^{-x})}\,dx=\frac{x}{2}, \tag{177}$$

$$v_2(x)=\int\frac{e^x\,.\,e^x}{(-e^x\,.\,e^{-x}-e^x\,.\,e^{-x})}\,dx=-\frac{e^{2x}}{4}. \tag{178}$$

Δυνάμει τῆς (173) ἡ γενική λύσις τῆς (174) εἶναι

$$y=\left(A_1+\frac{x}{2}\right)e^x+\left(A_2-\frac{e^{2x}}{4}\right)e^{-x}, \tag{179}$$

$$=A_1'e^x+A_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x, \tag{180}$$

ὅπου $A_1'(=A_1-\frac{1}{4})$ καί A_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. (Σημειωτέον ὅτι σταθεραί ὁλοκληρώσεως δέν χρειάζεται νά προστεθοῦν εἰς τάς (177) καί (178) ἐπειδή περιλαμβάνονται ἤδη εἰς τάς A_1 καί A_2, ὡς δεικνύεται εἰς τήν (173)).

21.7. Ὁ Τελεστής D

Εἰς τήν μελέτην γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς εἶναι συνήθως χρήσιμον νά εἰσαγάγωμεν τό σύμβολον D πρός παράστασιν τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ d/dx. Ὅθεν

$$Dy=\frac{dy}{dx},\quad D^2y=D(Dy)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad D^3y=D(D^2y)=\frac{d^3y}{dx^3}, \tag{181}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Ἐκ τῶν κανόνων παραγωγίσεως ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(i) } D[f(x)+g(x)] = Df(x)+Dg(x), \\
\text{ὅπου } f(x) \text{ καί } g(x) \text{ εἶναι παραγωγίσιμοι συναρτήσεις} \\
\text{(ii) } D[cf(x)] = cDf(x), \text{ ὅπου } c \text{ εἶναι σταθερά·} \\
\text{καί} \\
\text{(iii) } D^m[D^n f(x)] = D^n[D^m f(x)] = D^{m+n}f(x), \quad \text{ὅπου} \\
m \text{ καί } n \text{ εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.}
\end{array}\right\} \quad (182)$$

Συνεπῶς παρατηροῦμεν ὅτι ὁ D ἱκανοποιεῖ τρεῖς ἐκ τῶν κανόνων τῆς στοιχειώδους ἀλγέβρας καί ὑπό τήν ἔννοιαν αὐτήν δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνήθης ἀλγεβρική ποσότης (δηλ., ἀριθμός) ἀνεξαρτήτως τοῦ γεγονότος ὅτι εἶναι τελεστής καί εἰς τήν πραγματικότητα δέν ἔχει καμίαν ἀριθμητικήν τιμήν.

Ἡ γενική γραμμική διαφορική ἐξίσωσις n τάξεως μέ σταθερούς συντελεστάς

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x) \tag{183}$$

δύναται νά γραφῇ συναρτήσει τοῦ τελεστοῦ D ὡς

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x) \tag{184}$$

ἤ, συμβολικῶς, ὡς

$$F(D)y=f(x), \tag{185}$$

ὅπου τό

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n \tag{186}$$

εἶναι πολυωνυμικός τελεστής ὡς πρός D βαθμοῦ n. Τώρα ἐπειδή ὁ D συμπεριφέρεται ὡς ἀλγεβρική ποσότης τό αὐτό ἰσχύει καί διά τόν F(D) (ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων τοῦ D). Ὅθεν ὁ F(D) δύναται νά γραφῇ ὡς γινόμενον ὅπως συμβαίνει καί μέ τάς ἀλγεβρικάς ἐκφράσεις. Ἐπί παραδείγματι ἡ $(D^2+4D+3)y$ δύναται νά γραφῇ ὡς $(D+3)(D+1)y$ ὅπου ὁ $(D+3)$ ἐνεργεῖ ἐπί τοῦ $(D+1)y$. Ἡ τάξις κατά τήν ὁποίαν γράφονται οἱ παράγοντες δέν εἶναι σημαντική ἐφ'ὅσον εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι $(D+1)(D+3)y = (D+3)(D+1)y$. Σημειώνομεν δέ ὅτι ἡ τάξις μέ τήν ὁποίαν γράφονται οἱ παράγοντες τῆς (186) εἶναι σημαντική ὅταν τά α_0, α_1,... α_n δέν εἶναι σταθεραί ἀλλά συναρτήσεις τῆς x. Ἐπί παραδείγματι

$$(D+2x)(D+1)y = D^2+2xDy+Dy+2xy, \tag{187}$$

ἐνῶ

$$(D+1)(D+2x)y = D^2+D(2xy)+Dy+2xy. \tag{188}$$

Ὅθεν $(D+2x)(D+1)y \neq (D+1)(D+2x)y$. Πρός περαιτέρω ἐπεξήγησιν τῆς τροπῆς εἰς γινόμενον τοῦ F(D) παραθέτομεν τά ἀκόλουθα παραδείγματα :

$$\left.\begin{aligned}(D^2-1)y &= (D+1)(D-1)y = (D-1)(D+1)y,\\ (D^2+2D+1)y &= (D+1)(D+1)y = (D+1)^2y,\\ (D^3-3D-2)y &= (D+1)(D+1)(D-2)y = (D+1)^2(D-2)y\\ &= (D-2)(D+1)^2y,\\ (D^2+1)y &= (D+i)(D-i)y = (D-i)(D+i)y.\end{aligned}\right\} \tag{189}$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἀποδεικνύομεν τρία χρήσιμα θεωρήματα ἐπί τοῦ πολυωνυμικοῦ τελεστοῦ F(D), ὁριζομένου εἰς τήν (186).

Θεώρημα 1. Ἐάν k εἶναι σταθερά, τότε

$$F(D)e^{kx} = F(k)e^{kx}. \tag{190}$$

Διά νά ἀποδείξωμεν αὐτό σημειώνομεν ὅτι $De^{kx} = ke^{kx}$, $D^2e^{kx} = k^2e^{kx}$, καί οὕτω καθ'ἑξῆς.

Συνεπῶς

$$\begin{aligned}F(D)e^{kx} &= (a_0D^n+a_1D^{n-1}+ \dots +a_{n-1}D+a_n)e^{kx}\\ &= (a_0k^n+a_1k^{n-1}+ \dots +a_{n-1}k+a_n)e^{kx}\\ &= F(k)e^{kx}.\end{aligned}$$

Ἐπί παραδείγματι,

$$(6D^2+3D+2)e^{3x} = (6.3^2+3.3+2)e^{3x} = 65e^{3x}. \tag{191}$$

Θεώρημα 2. Ἐάν k εἶναι σταθερά καί V(x) εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ x, τότε

$$F(D)\{e^{kx}V(x)\} = e^{kx}F(D+k)V(x). \tag{192}$$

Ἀποδεικνύομεν τό ἀνωτέρω σημειώνοντες ὅτι

$$D\{e^{kx}V(x)\} = e^{kx}DV(x) + ke^{kx}V(x) = e^{kx}(D+k)V(x),$$
$$D^2\{e^{kx}V(x)\} = D\{e^{kx}(D+k)V(x)\} = e^{kx}\{(D+k)(D+k)V(x)\}$$
$$= e^{kx}(D+k)^2V(x),$$

καί, ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Leibnitz, διά κάθε ἀκέραιον n,

$$D^n\{e^{kx}V(x)\} = e^{kx}D^nV(x) + {}^nc_1 D(e^{kx})D^{n-1}V(x) + \ldots$$
$$+ {}^nc_{n-1}D^{n-1}(e^{kx})DV(x) + {}^nc_n D^n(e^{kx})V(x)$$
$$= e^{kx}D^nV(x) + kne^{kx}D^{n-1}V(x) + \ldots$$
$$+ nk^{n-1}e^{kx}DV(x) + k^n e^{kx}V(x)$$
$$= e^{kx}(D+k)^nV(x).$$

Ὅθεν

$$F(D)\{e^{kx}V(x)\} = e^{kx}F(D+k)V(x).$$

Ἐπί παραδείγματι

$$(D^2-4D+1)\{e^{2x}V(x)\} = e^{2x}\{(D+2)^2-4(D+2)+1\}V(x)$$
$$= e^{2x}(D^2-3)V(x). \qquad \textbf{(193)}$$

Θεώρημα 3. Ἐάν k εἶναι σταθερά

$$\left.\begin{aligned} F(D^2)\sin kx &= F(-k^2)\sin kx, \\ \text{καί} \quad F(D^2)\cos kx &= F(-k^2)\cos kx, \end{aligned}\right\} \qquad (194)$$

ὅπου $F(D^2)$ εἶναι ὁ πολυωνυμικός τελεστής (186) μέ D ἀντικαθιστώμενον ὑπό D^2.

Ἵνα ἀποδείξωμεν αὐτό σημειώνομεν ὅτι $D^2\sin kx = -k^2\sin kx$ $D^2\sin kx = k^2\sin kx = (-k^2)^2\sin kx$ καί οὕτω καθ'ἑξῆς.

Ὅθεν

$$F(D^2)\sin kx = (a_0D^{2n} + a_1D^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1}D^2 + a_n)\sin kx$$
$$= \{a_0(-k^2)^n + a_1(-k^2)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-k^2) + a_n\}\sin kx$$
$$= F(-k^2)\sin kx.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί διά τό $F(D^2)\cos kx$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τό Θεώρημα 3 δύναται νά συναχθῇ καί ἐκ τοῦ Θεωρήματος 1 χρησιμοποιοῦντες τήν σχέσιν

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx. \qquad (195)$$

Πράγματι ἔχομεν

$$\cos kx = \mathrm{R}\, e^{ikx},$$
$$\sin kx = \mathrm{I}\, e^{ikx}, \tag{196}$$

ὅπου R καί I συμβολίζουν τό πραγματικόν καί φανταστικόν μέρος ἀντιστοίχως τῆς ἀκολουθούσης αὐτά συναρτήσεως. Συνεπῶς

$$F(D^2)\sin kx = F(D^2)\mathrm{I}\, e^{ikx},$$

τό ὁποῖον ἐκ τοῦ Θεωρήματος 1 ἰσοῦ~~ται~~ πρός $F(-k^2)\mathrm{I}e^{ikx}$ ἤ $F(-k^2)\sin kx$. Ὅθεν λαμβάνομεν τό Θεώρημα 3.

Ὅμοιον ἐπιχείρημα ἰσχύει καί διά τό $F(D^2)\cos kx$. Πρός ἐπεξήγησιν τοῦ Θεωρήματος 3 παραθέτομεν τά κατωτέρω ἁπλᾶ παραδείγματα :

$$(D^4+3D^2-1)\sin 2x = \{(-2^2)^2+3(-2^2)-1\}\sin 2x = 3\sin 2x, \tag{197}$$

$$(D^4-2D^2)\cos 2x = \{(-2^2)^2-2(-2^2)\}\cos 2x = 24\cos 2x. \tag{198}$$

Εἰς τό Κεφ. 4 (Τ.1) ὡρίσαμεν τήν πρᾶξιν τῆς ἀορίστου ὁλοκληρώσεως ὡς τήν ἀντίστροφον πρᾶξιν τῆς παραγωγίσεως οὕτως ὥστε

$$\frac{d}{dx}\int^x y(u)du = y(x). \tag{199}$$

Συνεπῶς ἀντιστοιχοῦντα εἰς τόν τελεστήν D ὁρίζομεν τώρα ὡς ἀντίστροφον τελεστήν τόν D^{-1} τοιοῦτον ὥστε

$$D^{-1} \equiv \frac{1}{D} \equiv \int, \tag{200}$$

καί

$$D(D^{-1}y) = y. \tag{201}$$

Ὅπως ἀκριβῶς ὁ D^n συμβολίζει n παραγωγίσεις οὕτω ἀκριβῶς καί ὁ $1/D^n \equiv D^{-n}$ συμβολίζει n ὁλοκληρώσεις. Πρέπει νά ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, γράφοντες ἀντιστρόφους πράξεις ὑπό τήν μορφήν $1/D^n$, ἐπειδή ἕνας τελεστής ἐνεργεῖ μόνον ἐπί συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τά δεξιά του, ἡ ἔκφρασις $f(x)/D^n$ εἶναι ἀσαφής. Δέν εἶναι σαφές κατά πόσον συνεπάγεται ὅτι ὁ $1/D^n$ ἐνεργεῖ ἐπί τῆς $f(x)$ δίδων τήν συνάρτησιν $(1/D^n)f(x)$ ἤ ἐάν ἁπλῶς ὁρίζη τόν τελεστήν $f(x)(1/D^n)$. Διά νά ἀποφύγωμεν τήν ἀσάφειαν αὐτήν γράφομεν ὅλας τάς συναρτήσεις εἴτε ἀριστερά εἴτε δεξιά τοῦ $1/D^n$ ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως διατηροῦντες ἑπομένως τό $1/D^n$ ὡς χωριστόν σύμβολον.

21.8. Μέθοδος τοῦ Τελεστοῦ D διά Μερικάς Λύσεις

Θεωρήσωμεν τήν γραμμικήν ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως μέ σταθερούς συντελεστάς

$$(D-k)y = f(x), \tag{202}$$

ὅπου k εἶναι μία σταθερά καί f(x) δοθεῖσα συνάρτησις. Ἡ συμπληρωματική συνάρτησις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ἡ

$$y = Ae^{kx}, \tag{203}$$

ὅπου A εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά. Διά νά εὕρωμεν μερικόν ὁλοκλήρωμα Y(x) ὑποθέτομεν

$$Y(x) = V(x)e^{kx}. \tag{204}$$

Τότε ἐκ τοῦ Θεωρήματος 2

$$(D-k)Y(x) = (D-k)\{e^{kx}V(x)\} = e^{kx}DV(x) = f(x). \tag{205}$$

Ὅθεν

$$DV(x) = e^{-kx}f(x), \tag{206}$$

καί ἐξ αὐτοῦ

$$V(x) = \frac{1}{D}\{e^{-kx}f(x)\} = \int^x e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi, \tag{207}$$

ὅπου ξ εἶναι μία αὐθαίρετος μεταβλητή ὁλοκληρώσεως. Τό μερικόν ὁλοκλήρωμα (ἐκ τῆς (204)) εἶναι

$$Y(x) = e^{kx}\int^x e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi, \tag{208}$$

ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (202) εἶναι

$$y = Ae^{kx} + e^{kx}\int^x e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi. \tag{209}$$

(Σημειωτέον ὅτι σταθερά ὁλοκληρώσεως δέν χρειάζεται νά προστεθῇ εἰς τήν (207) διότι ἁπλούστατα τότε θά ἀπερροφεῖτο ὑπό τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς A εἰς τήν (209)).

Θεωρήσωμεν τώρα τήν δευτέρας τάξεως ἐξίσωσιν

$$(D^2-2kD+k^2)y = (D-k)^2y = f(x). \tag{210}$$

᾿Εδῶ ἡ συμπληρωματική συνάρτησις ἔχει τήν μορφήν

$$y=(Ax+B)e^{kx} \tag{211}$$

δυνάμει τοῦ ὅτι ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς βοηθητικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι (A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί). ᾿Εν συνεχείᾳ, θεωροῦμεν μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$Y(x)=V(x)e^{kx}. \tag{212}$$

῞Οθεν κατά τό Θεώρημα 2

$$(D-k)^2Y(x)=(D-k)^2\{e^{kx}V(x)\}=e^{kx}D^2V(x)=f(x), \tag{213}$$

ἡ ὁποία δίδει

$$D^2V(x)=e^{-kx}f(x). \tag{214}$$

Συνεπῶς

$$V(x)=\frac{1}{D^2}\{e^{-kx}f(x)\}=\int^x d\eta\int^\eta e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi, \tag{215}$$

ὅπου ξ καί η εἶναι αὐθαίρετοι μεταβληταί ὁλοκληρώσεως. Τό μερικόν ὁλοκλήρωμα εἶναι λοιπόν

$$Y(x)=e^{kx}\int^x d\eta\int^\eta e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi \tag{216}$$

καί ἡ γενική λύσις

$$y=(Ax+B)e^{kx}+e^{kx}\int^x d\eta\int^\eta e^{-k\xi}f(\xi)\,d\xi. \tag{217}$$

(Καί πάλιν σταθερά ὁλοκληρώσεως δέν εἶναι ἀναγκαία εἰς τήν (216) διά τούς προαναφερθέντας λόγους).

Τελικῶς θεωροῦμεν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$(D-k_1)(D-k_2)y=f(x), \tag{218}$$

ὅπου k_1 καί k_2 εἶναι σταθεραί ($k_1 \neq k_2$).

᾿Εδῶ ἡ συμπληρωματική συνάρτησις εἶναι ἡ

$$y=Ae^{k_1x}+Be^{k_2x}, \tag{219}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

᾿Εν συνεχείᾳ θεωροῦμεν μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$Y(x)=V(x)e^{k_1x}. \tag{220}$$

Τότε

$$(D-k_1)(D-k_2)\{e^{k_1x}V(x)\} = e^{k_1x}\{(D+k_1)-k_1\}\{(D+k_1)-k_2\}V(x)$$
$$= e^{k_1x}D(D+k_1-k_2)V(x) = f(x). \qquad (221)$$

Ὅθεν

$$D(D+k_1-k_2)V(x) = e^{-k_1x}f(x)$$

καί συνεπῶς

$$(D+k_1-k_2)V(x) = \frac{1}{D}\{e^{-k_1x}f(x)\} = \int^x e^{-k_1\xi}f(\xi)\,d\xi. \qquad (222)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή εἶναι οὐσιαστικῶς τῆς αὐτῆς μορφῆς ὡς ἡ (202) καί ὡς ἐκ τούτου ἔχει τήν λύσιν

$$V(x) = e^{(k_2-k_1)x}\int^x e^{(k_1-k_2)\eta}\,d\eta\int^\eta e^{-k_1\xi}f(\xi)\,d\xi, \qquad (223)$$

ὅθεν, καί ἐκ τῆς (220),

$$Y(x) = e^{k_2x}\int^x e^{(k_1-k_2)\eta}\,d\eta\int^\eta e^{-k_1\xi}f(\xi)\,d\xi. \qquad (224)$$

Ἡ ἀνωτέρω μορφή τοῦ μερικοῦ ὁλοκληρώματος δύναται νά ἁπλοποιηθῇ δι' ὁλοκληρώσεως τῆς (224) κατά παράγοντας (π.χ. ὁλοκληρώνοντες τόν ὅρον $e^{(k_1-k_2)x}$ καί παραγωγίζοντες τό

$$\int^\eta e^{-k_1}f(\xi)\,d\xi).$$

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν

$$Y(x) = \frac{e^{k_1x}}{k_1-k_2}\int^x e^{-k_1\xi}f(\xi)\,d\xi - \frac{e^{k_2x}}{k_1-k_2}\int^x e^{-k_2\xi}f(\xi)\,d\xi. \qquad (225)$$

Ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (218) εἶναι

$$y = Ae^{k_1x}+Be^{k_2x}+\frac{e^{k_1x}}{k_1-k_2}\int^x e^{-k_1\xi}f(\xi)\,d\xi - \frac{e^{k_2x}}{k_1-k_2}\int^x e^{-k_2\xi}f(\xi)\,d\xi.$$

Ὅμοια ἀποτελέσματα εὑρίσκομεν καί δι' ἀνωτέρας τάξεως ἐξισώσεις ἀφήνομεν δέ τήν συναγωγήν τούτων εἰς τόν σπουδαστήν. Τό κατωτέρω παράδειγμα ἐπεξηγεῖ τήν μέθοδον τῆς παραγράφου.

Παράδειγμα 17. Θά λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$(D^2+4)y = (D+2i)(D-2i)y = e^{3x}. \tag{227}$$

Ἐδῶ $k_1 = -2i$, $k_2 = 2i$ καί ἐκ τῆς (225)

$$Y(x) = \frac{e^{-2ix}}{-4i}\int^x e^{2i\xi}e^{3\xi}\,d\xi - \frac{e^{2ix}}{-4i}\int^x e^{-2i\xi}e^{3\xi}\,d\xi \tag{228}$$

$$= -\frac{e^{-2ix}}{4i}\cdot\frac{e^{(3+2i)x}}{3+2i} + \frac{e^{2ix}}{4i}\cdot\frac{e^{(3-2i)x}}{3-2i} \tag{229}$$

$$= e^{3x}/13. \tag{230}$$

Ἐπειδή ἡ συμπληρωματική συνάρτησις τῆς (227) εἶναι $y = A\cos2x+B\sin2x$ ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{e^{3x}}{13}. \tag{231}$$

21.9. Ἡ Ἐξίσωσις τοῦ Euler

Ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1}x\frac{dy}{dx} + \alpha_n y = f(x), \tag{232}$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ εἶναι δεδομέναι σταθεραί καί ἡ $f(x)$ δεδομένη συνάρτησις τοῦ x, ἀναφέρεται συνήθως ὡς ἐξίσωσις τοῦ Euler. Ἡ γενική λύσις αὐτῆς δύναται πάντοτε νά εὑρεθῇ ἀφοῦ πρῶτον ἀναχθῇ αὐτή εἰς ἐξίσωσιν μέ σταθερούς συντελεστάς διά τῆς ἀντικαταστάσεως

$$x = e^t \tag{233}$$

καί κατόπιν λυθῇ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ὡς πρός y συναρτήσει τοῦ t κατά τόν συνήθη τρόπον. Διά νά ἴδωμεν πῶς καταλήγομεν εἰς αὐτό παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (233) συνεπάγεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dt} \tag{234}$$

ἤ

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \tag{235}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{du}{dt} \tag{236}$$

καί

$$x^n\frac{d^ny}{dt^n}=D_t(D_t-1)(D_t-2)\dots(D_t-n+1) \tag{237}$$

ὅπου D_t εἶναι ὁ τελεστής $\frac{d}{dt}$.

Ἐπί παραδείγματι, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2y = x^2 \tag{238}$$

γίνεται

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+2y = e^{2t} \tag{239}$$

ἡ ὁποία δύναται νά λυθῇ διά τινος τῶν προηγουμένων μεθόδων.

Παράδειγμα 18. Ἡ ἐξίσωσις

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+4y = \cos(\log_e x), \tag{240}$$

θέτοντες $x = e^t$ γίνεται

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+4y = \cos t \tag{241}$$

Ἡ συμπληρωματική λύσις, ἤτοι ἡ λύσις τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς τῆς (241), εὑρίσκεται εὐκόλως καί εἶναι ἡ

$$y = e^t(A\cos\sqrt{3}t+B\sqrt{3}t) \tag{242}$$

Μερική λύσις τῆς (241) δύναται νά εὑρεθῇ διά τῆς μεθόδου τοῦ τελεστοῦ D καί εἶναι

$$y = \frac{1}{D^2-2D+4}.\cos t = \frac{1}{(-1)^2-2D+4}\cos t \tag{243}$$

$$= \frac{1}{3-2D}\cos t \tag{244}$$

$$= \frac{3+2D}{9-4D^2}\cos t \tag{245}$$

$$= \frac{1}{13}(3+2D)\cos t \tag{246}$$

$$= \frac{1}{13}(3\cos t-2\sin t) \tag{247}$$

Τέλος ἡ γενική λύσις τῆς (240) προκύπτει διά προσθέσεως τῆς (242) καί τῆς (247) καί θέτοντες $t = \log_e x$. Οὕτω, εὑρίσκομεν

$$y = x\left[A\cos(\sqrt{3}\log_e x)+B\sin(\sqrt{3}\log_e x)\right] + \\ +\frac{1}{13}\left[3\cos(\log_e x)-2\sin(\log_e x)\right] \tag{248}$$

21.10. Ἡ Γενική Γραμμική Ἐξίσωσις Δευτέρας Τάξεως

Ἡ ἐξίσωσις Euler μέ τήν ὁποίαν ἠσχολήθημεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον εἶναι (διά n = 2,σ.μ.) μερική περίπτωσις τῆς γενικῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x) = f(x) \tag{249}$$

ὅπου p(x), q(x) καί f(x) εἶναι δεδομέναι συναρτήσεις τοῦ x. Συνήθως μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς αὐτῆς πρέπει νά λυθῇ διά τῆς προσεγγιστικῆς μεθόδου τῶν σειρῶν (βλ. ἑπόμενον κεφάλαιον),ἀλλά εἰς μερικάς περιπτώσεις δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως ἤ τήν γνῶσιν μιᾶς λύσεως. Τά κατωτέρω παραδείγματα ἐπεξηγοῦν τούς τρόπους αὐτούς.

Παράδειγμα 19. Ἡ ἀντικατάστασις $x = z^{1/2}$ μετατρέπει τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(4x-\frac{1}{x})\frac{dy}{dx}+4x^2y = 0 \tag{250}$$

εἰς μίαν μέ σταθερούς συντελεστάς, τήν

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+y = 0 \qquad (251)$$

ἡ ὁποία ἔχει τήν λύσιν

$$y = (Z+Bz)e^{-z} \qquad (252)$$

Ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (250) εἶναι ἡ

$$y = (A+Bx^2)e^{-x^2} \qquad (253)$$

Παράδειγμα 20. Ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι γνωρίζομεν μίαν λύσιν, δυνάμεθα νά εὕρωμεν δευτέραν καί ἐπομένως, τήν γενικήν λύσιν ὡς ἀκολούθως

Ἔστω $y = \upsilon(x)$ δεδομένη λύσις τῆς

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy = 0 \qquad (254)$$

Τότε δύναται νά εὑρεθῇ δευτέρα λύσις ἐάν θέσωμεν

$$y = u(x)\upsilon(x) \qquad (255)$$

καί λύσωμεν ὡς πρός $u(x)$. Οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{w}\,\frac{dw}{dx}+\frac{2}{\upsilon}\,\frac{du}{dx}+\frac{1}{x} = 0 \qquad (256)$$

ὅπου $w = \frac{du}{dx}$ καί ἐξ αὐτῆς ὁλοκληροῦντες

$$\frac{du}{dx} = \frac{A}{x\upsilon^2}, \qquad (257)$$

μέ τήν A ὡς σταθεράν ὁλοκληρώσεως.

Ἄρα

$$u(x) = A\,\frac{dx}{x\upsilon^2}+B, \qquad (258)$$

ὅπου B εἶναι σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Ἡ ζητουμένη δευτέρα λύσις εἶναι κατά ταῦτα ἡ

$$y = A\upsilon\,\frac{dx}{x\upsilon^2}+B\upsilon \qquad (259)$$

Παράδειγμα 21. Μία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 0 \qquad (260)$$

εἶναι ἡ $y_1 = x$. Δυνάμεθα νά εὕρωμεν δευτέραν λύσιν θέτοντες $y_2 = xu(x)$ καί λύοντες ὡς πρός $u(x)$. Οὕτως ἡ (260) δίδει τήν

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0 \qquad (261)$$

ἡ ὁποία ὁλοκληρουμένη δίδει

$$u = Ae^x + B, \qquad (262)$$

ὅπου A καί B αὐθαίρετοι σταθεραί. Ἡ γενική λύσις τῆς (260) εἶναι λοιπόν ἡ

$$y = x(Ze^x + B) + Cy = x(Ae^x + B') \qquad (263)$$

ὅπου B΄ αὐθαίρετος σταθερά.

21.11. Συστήματα Ἐξισώσεων

Ἡ γενική λύσις συστήματος ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς μέ δύο ἤ περισσοτέρας ἐξηρτημένας μεταβλητάς εὑρίσκεται δι᾽ἐπιλύσεως κεχωρισμένως ὡς πρός ἑκάστην τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν. Τά ἀκόλουθα παραδείγματα διευκρινίζουν τήν μέθοδον.

Παράδειγμα 22. Πρός λύσιν τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} + 2y + 3x = 0, \qquad 3x + \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad (264)$$

γράφομεν πρῶτον τόν τελεστήν $\frac{d}{dt}$ ὡς D καί ἔχομεν

$$(D+3)x + 2y = 0, \qquad 3x + (D-2)y = 0 \qquad (265)$$

Πρός ἀπαλοιφήν τοῦ y, π.χ., ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων ἐνεργοῦμεν ἐπί τῆς πρώτης διά τοῦ τελεστοῦ D-2 καί πολλαπλασιάζομεν τήν δευτέραν ἐπί 2. Ὅθεν

$$\left.\begin{aligned} (D-2)(D+3)x + 2(D-2)y &= 0\,, \\ 6x + 2(D-2)y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (266)$$

Ἀφαιροῦντες τήν πρώτην ἐξίσωσιν ἀπό τήν δευτέραν λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν μέ σταθερούς συντελεστάς

$$(D^2+D-6)x-6x = 0 \tag{267}$$

ἤ

$$(D^2+D-12)x = 0 \tag{268}$$

Ἡ λύσις τῆς (268) εὑρίσκεται ἀμέσως καί εἶναι ἡ

$$x(t) = Ae^{3t}+Be^{-4t} \tag{269}$$

Ἐφ'ὅσον εὑρέθη ἡ x εἶναι ἁπλοῦν τώρα νά ἀντικαταστήσωμεν τήν (269) εἰς τάς ἀρχικάς ἐξισώσεις διά νά εὕρωμεν τήν y. Οὕτως ἔχομεν

$$y(t) = -3Ae^{3t}+\frac{1}{2}Be^{-4t} \tag{270}$$

Παράδειγμα 23. Πρός λύσιν τοῦ συστήματος

$$\frac{dx}{dt}+y = t^3 , \quad \frac{dy}{dt}-x = t , \tag{271}$$

δυνάμεθα νά παραγωγίσωμεν τήν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρός t λαμβάνοντες

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2-\frac{d^2x}{dt^2} \tag{272}$$

Εἰσάγοντες αὐτήν εἰς τήν δευτέραν ἐξίσωσιν τῆς (271) εὑρίσκομεν

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x = 3t^2-t \tag{273}$$

ὡς ἐξίσωσιν διά τήν x. Αὐτή λύεται διά τῶν γνωστῶν μεθόδων καί αἱ τελικαί λύσεις εἶναι

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos t+B\sin t+3t^2-t-6 , \\ y &= A\sin t-B\cos t+t^3-6t+1 , \end{aligned}\right\} \tag{274}$$

ὡς δύναται νά ἐπαληθεύσῃ ὁ ἀναγνώστης.

Παρόμοιαι τεχνικαί δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν εἰς γραμμικάς ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως, ἀλλ'ἡ διαδικασία τῆς ἀπαλοιφῆς μιᾶς ἤ περισσοτέρων ἐξηρτημένων μεταβλητῶν ἐνδέχεται νά εἶναι πολύπλοκος. Ἄλλαι μέθοδοι λύσεως εἶναι ἐνίοτε καρποφόροι. Μία τούτων βασίζεται εἰς τόν μετασχηματισμόν Laplace (βλ. Κεφ. 23) καί θά ἀναπτυχθῇ ἀργότερον, ἐνῶ ἑτέρα στηρίζεται εἰς τήν γραφήν τῶν ἐξισώσεων ὑπό μορφήν πινάκων. Τό ἀκόλουθον παράδειγμα διασαφηνίζει τήν βασικήν ἰδέαν.

Παράδειγμα 24. Ἔστωσαν αἱ ἀκόλουθοι τρεῖς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (275)$$

ὅπου οἱ συντελεσταί $\alpha_{ik}(i,k = 1,2,3)$ εἶναι σταθεραί καί τά x_1, x_2,x_3 εἶναι ἄγνωστοι (συναρτήσεις).

Τό σύστημα γράφεται ὑπό μορφήν πινάκων ὡς

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (276)$$

ὅπου

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{καί} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad (277)$$

Ἡ λύσις τῆς (276) εὐκόλως ἐπαληθεύεται ὅτι εἶναι ἡ

$$X = e^{At}X(0) \qquad (278)$$

ὅπου $X(0)$ εἶναι τό διάνυσμα-στήλη τῶν τιμῶν τῶν x_1,x_2,x_3 διά $t = 0$ (ὑποτιθεμένου ὅτι δίδεται) καί

$$e^{At} = I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\dots \qquad (279)$$

τοῦ I παριστῶντος τόν ταυτοτικόν πίνακα τάξεως 3. Βλέπομεν λοιπόν ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος (275) ἑδράζεται ἐπί τοῦ ὑπολογι -

σμοῦ τοῦ πίνακος (279). 'Εκτός ἐάν ὁ A εἶναι μικρῆς τάξεως,ὁ ὑπολογισμός τοῦ e^{At} ἀπαιτεῖ πολλήν ἀριθμητικήν ἐργασίαν (ἐκτός ἐάν τύχη πολλά τῶν στοιχείων νά εἶναι μηδέν). Οὐχ ἧττον, πρόσφατοι ὑπολογιστικαί μέθοδοι καθιστοῦν τοῦτο δυνατόν καί ἡ διά πινάκων ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀξιοσύστατος ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν εἶναι μεγάλος.

21.12. 'Απλαῖ μή Γραμμικαί 'Εξισώσεις

Εἰς ὀλίγας ἁπλᾶς περιπτώσεις, μή γραμμικαί ἐξισώσεις δύνανται νά ἀναχθοῦν εἰς γραμμικήν μορφήν. 'Επί παραδείγματι, ἡ ἐξίσωσις τοῦ Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n>1), \tag{280}$$

ὅπου P(x) καί Q(x) εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τῆς x, ἀνάγεται εἰς τήν γραμμικήν μορφήν

$$\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)z = Q(x) \tag{281}$$

θέτοντες $y^{1-n} = z$. Μερικαί ἄλλαι μή γραμμικαί ἐξισώσεις δύνανται νά λυθοῦν θέτοντες

$$\frac{dy}{dx} = p, \tag{282}$$

ὁπότε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}. \tag{283}$$

'Επί παραδείγματι, ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2y = 2y^3 \tag{284}$$

γράφεται χρησιμοποιοῦντες τήν (283) ὡς

$$p\,\frac{dp}{dy} = 2y+2y^3, \tag{285}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἐξίσωσις ὡς πρός p μέ χωριζομένας μεταβλητάς ἡ δέ ἀνεξάρτητος μεταβλητή εἶναι ἡ y. Μία ἀκόμη ὁλοκλήρωσις δίδει τήν y συναρτήσει τῆς x.

21.13. Ἄλλαι Μέθοδοι Λύσεως Διαφορικῶν Ἐξισώσεων

Ἠσχολήθημεν εἰς τό παρόν Κεφάλαιον μέ τήν λύσιν συνήθων γραμμικῶν ἐξισώσεων (κυρίως μέ σταθερούς συντελεστάς) καί μέ ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς αὐτάς. Μία ἀκόμη χρήσιμος μέθοδος δι᾽ἐπίλυσιν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς χρησιμοποιοῦσα μετασχηματισμούς Laplace ἐξετάζεται εἰς τό Κεφ. 23.

Γραμμικαί ἐξισώσεις μέ μεταβλητούς συντελεστάς εἶναι ἐν γένει, δυσκολώτεραι νά λυθοῦν, καί ὡς θά ἴδωμεν εἰς τό ἑπόμενον κεφάλαιον μία τεχνική προσεγγίσεως διά σειρᾶς εἶναι ἡ βασική μέθοδος ἐπιλύσεως.

Μή γραμμικαί ἐξισώσεις ἐπιλύονται συνήθως δι᾽ἀριθμητικῶν μεθόδων καί διά πληρεστέραν ἀνάπτυξιν τῆς ἀριθμητικῆς λύσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων (γραμμικῶν καί μή γραμμικῶν) ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται εἰς εἰδικά βιβλία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 21

1. Ἐπιλύσατε τάς κατωτέρω πρώτης τάξεως ἐξισώσεις.

(α) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{x+1}$, δοθέντος ὅτι y = 1 ὅταν x = 0.

(β) $x\dfrac{dy}{dx}+3y=2$, δοθέντος ὅτι y = 2 ὅταν x = 1.

(γ) $x^2\dfrac{dy}{dx}+xy=y^2$,

(δ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y+3}{3x+6y+7}$,

(ε) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\sin x$, δοθέντος ὅτι y = 0 ὅταν x = π.

2. (i) Ἐπιλύσατε τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$(x+1)\frac{dy}{dx}-3y=(x+1)^5$$

δοθέντος ὅτι $y = \frac{3}{2}$ ὅταν $x = 0$.

(ii) Εὕρετε τήν γενικήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=2\cos^2 x. \qquad \text{(C.U.)}$$

3. Ἐπιλύσατε τάς ἐξισώσεις

$$\text{(i) } x(x+1)\frac{dy}{dx}-(x+2)y=x^3(2x-3),$$

$$\text{(ii) } \frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=xe^{-x}. \qquad \text{(C.U.)}$$

4. Εὕρετε τήν γενικήν λύσιν ἑκάστης τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων

$$\text{(i) } \frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+10y=20-e^{2x},$$

$$\text{(ii) } (x^2+3x+2)\frac{dy}{dx}+xy=x(x+1). \qquad \text{(C.U.)}$$

5. Ἐπιλύσατε τάς ἐξισώσεις

$$\text{(i) } \frac{dy}{dx}+y\log_e x=e^{-x\log_e x},$$

$$\text{(ii) } \frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=e^{nx}, \text{ (n σταθερά)} \qquad \text{(C.U.)}$$

6. Ἐλέγξατε τάς κατωτέρω ἐξισώσεις ἐάν εἶναι "ἀκριβεῖς", (ὁλικαί παράγωγοι μιᾶς συναρτήσεως) καί ἐπιλύσατε ἐκείνας αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀκριβεῖς. Αἱ ἄλλαι δύνανται νά γίνουν ἀκριβεῖς διά μετασχηματισμοῦ. Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν εὕρετε τόν κατάλληλον μετασχηματισμόν καί ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$(a)\ e^y\sin x\frac{dy}{dx}+(1+e^y)\cos x=0,$$

$$(b)\ x\frac{dy}{dx}+y(x^2+\log_e y)=0,$$

(c) $(y^2-x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=0,$

(d) $(y^4+2y^2-x^3+5x^2y-21xy^2)\dfrac{dy}{dx}$
$$+(x^3-3x^2y+5xy^2-7y^3)=0.$$

7. Εὕρετε τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=\cosh 2x$$

διά τήν ὁποίαν $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 1$ ὅταν $x = 0$. (C.U.)

8. Ἐπιλύσατε τάς ἐξισώσεις

(i) $(D^2-D-2)y=\sin x,$

(ii) $(D^2+2D+1)y=4\sinh x,$

(iii) $(D^2-2D+5)y=e^x\sin x,$

(iv) $(D^2-4D+5)y=x^2e^{2x}\sin x.$

9. Εὕρετε τήν λύσιν τῆς

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=12\sin 2x-4x$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4$, $\dfrac{dy}{dx} = 5$, $y = 2$ διά $x = 0$ (C.U.)

10. Χρησιμοποιοῦντες τήν ἀντικατάστασιν $x = \sin\theta$ μετασχηματίσατε τήν ἐξίσωσιν

$$\cos\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}+\sin\theta\frac{dy}{d\theta}+4y\cos^3\theta=8\cos^5\theta$$

εἰς μίαν ἄλλην μέ x ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν. Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν.

11. Μετατρέψατε τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν εἰς τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ἀπό x εἰς z ὅπου $z = \log_e x$ καί ἐν συνεχείᾳ εὕρετε τήν γενι -

κήν λύσιν. (C.U.)

12. Εὕρετε n τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀντικατάστασις $y = zx^n$ νά μετασχηματίζη τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2}+2x(x+2)\frac{dy}{dx}+2(x+1)^2y = e^{-x}\cos x$$

εἰς μίαν ἄλλην μέ σταθερούς συντελεστάς. Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύσατε τήν ἀρχικήν ἐξίσωσιν καί δείξατε ὅτι εἰς ὅλας τάς λύσεις ἡ y εἶναι μικρά ὅταν ἡ x εἶναι μεγάλη καί θετική. (L.U.)

13. Τό διάνυσμα $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ἱκανοποιεῖ τήν διανυσματικήν ἐξίσωσιν

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\wedge \mathbf{H}\right),$$

ὅπου $E = (0,E,0)$, $H = (0,0,H)$ καί e,m,c,E,H εἶναι σταθεραί.

Γράψατε τήν ἐξίσωσιν ὡς πρός τάς συντεταγμένας προβολάς της καί δείξατε ἐπιλύοντες τήν ἐξίσωσιν ὅτι

$$x = \frac{cEt}{H}-\frac{mc^2E}{eH^2}\sin\left(\frac{eH}{mc}t\right),$$

$$y = \frac{mc^2E}{eH^2}\left\{1-\cos\left(\frac{eH}{mc}t\right)\right\},$$

$$z = 0,$$

δοθέντος ὅτι $\mathbf{r} = 0, \dot{\mathbf{r}} = 0$ διά $t = 0$. (C.U.)

14. Χρησιμοποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν $x = e^t$ ἐπιλύσατε τάς ἐξισώσεις

$$\text{(i)}\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y = 0,$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x^2}y = 1+x^2,$$

$$\text{(iii)}\ x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+8y = 65\cos(\log_e x).$$

15. Εὕρετε τάς γενικάς λύσεις τῶν κατωτέρω συστημάτων

$$\text{(i)}\ \frac{dx}{dt} = x-2y,\quad \frac{dy}{dt} = y-2x,$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2x}{dt^2}=x-y,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=y-x.$$

16. Εὕρετε τήν λύσιν τοῦ συστήματος

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-2x+\frac{dy}{dt}-3y=2e^{-t},$$

$$2\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}-2y=0,$$

ἡ ὁποία πληροῖ τάς συνθήκας $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 4$ διά $t = 0$ (C.U.)

17. Ἐπιλύσατε τό σύστημα

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dy}{dt}+a^2x=\cos at,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+a^2y=0,$$

ὅπου α εἶναι μία σταθερά. (L.U.)

18. Ἐπιλύσατε τό σύστημα

$$\frac{dx}{dt}+k(y+z)=0,$$

$$\frac{dy}{dt}+k(z+x)=0,$$

$$\frac{dz}{dt}+k(x+y)=0,$$

ὅπου k εἶναι μία σταθερά.

19. Ἐπιλύσατε τάς κατωτέρω ἐξισώσεις ἀφοῦ μετασχηματίσετε αὐτάς εἰς γραμμικάς

(α) $\frac{dy}{dx}=\sin^2(x-2y)$,

(β) $x\sec^2 y\frac{dy}{dx}+\tan y=x^2$.

20. Ἐπιλύσατε τάς κατωτέρω μή γραμμικάς ἐξισώσεις

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$, ὅταν $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4}$ διά $y=0$,

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y = 2y^3$, ὅταν $\dfrac{dy}{dx}=1$ διά $y=0$,

(c) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}=(1+y)\dfrac{dy}{dx}$, ὅταν $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$ διά $x=0$,

(d) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$, ὅταν $\dfrac{dy}{dx}=0$ διά $y=1$.

21. Δείξατε ὅτι ἡ λύσις τῆς μή γραμμικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y+\frac{y^3}{b^2}=0$$

ἡ ἱκανοποιοῦσα τάς συνθήκας $y = \alpha$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ὅταν $x = 0$ (ὅπου α καί β εἶναι σταθεραί) εἶναι ἡ

$$x=\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}F(k,\,\phi),$$

ὅπου $k^2=\dfrac{a^2}{2(a^2+b^2)}$, $\phi=\cos^{-1}\left(\dfrac{y}{a}\right)$, καί $F(k,\phi)$ εἶναι τό ἐλλειπτι - κόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους (βλ. Κεφ. 16).

22. Ἐάν δύο οἰκογένειαι καμπύλων τέμνωνται ὀρθογωνίως παντοῦ, τότε καλοῦνται ὀρθογώνιοι οἰκογένειαι, ἑκάστη δέ τούτων εἶναι σύνολον ὀρθογωνίων τροχιῶν διά τήν ἄλλην. Εὕρετε τάς ὀρθογωνίους τροχιάς τῶν ἀκολούθων οἰκογενειῶν καμπύλων

(a) $y=x^2+c$, (b) $y=ce^x$, (c) $x^2+y^2=2cx$, ὅπου c εἶναι αὐθαί - ρετος παράμετρος.

23. Δείξατε ὅτι ἐάν $P(x)+Q(x)+1 = 0$, τότε ἡ $y = e^x$ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0.$$

Ὅθεν δείξατε ὅτι ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+1)\frac{dy}{dx}+(x+1)y=0$$

εἶναι
$$y=(Ax^2+B)e^x.$$

24. Δείξατε ὅτι ἡ
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$$
(ω εἶναι σταθερά) ἔχει λύσιν διάφορον τοῦ μηδενός ἱκανοποιοῦσαν τάς συνθήκας y = 0 ὅταν x = 0 καί y = 0 ὅταν x = α (α σταθερά) μόνον ἐάν $\omega = \frac{n\pi}{\alpha}$ ὅπου n εἶναι ἀκέραιος. (Τό ἀπειροσύνολον αὐτό τῶν διακεκριμένων τιμῶν τοῦ ω καλεῖται σύνολον τῶν ἰδιοτιμῶν αἱ δέ ἀντίστοιχοι λύσεις καλοῦνται ἰδιοσυναρτήσεις).

25. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις
$$\frac{d^4y}{dx^4}+(\lambda^2-\mu^2)\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda^2\mu^2y=0$$
ἔχει λύσιν διάφορον τοῦ μηδενός ἱκανοποιοῦσαν τάς συνθήκας
$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0 \text{ διά } x=0,$$
$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ διά } x=l,$$
ὅπου λ,μ,σ εἶναι δοθεῖσαι σταθεραί μόνον ἐάν
$$\frac{\tan\lambda l}{\lambda}=\frac{\tanh\mu l}{\mu}.$$

26. Χρησιμοποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν $x = t^3$, ἤ ἄλλως, δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις
$$9x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}+\lambda x^{2/3}y=0,$$
ὅπου λ εἶναι σταθερά, ἔχει λύσιν διάφορον τοῦ μηδενός ἱκανοποιοῦσαν τάς συνθήκας y = 0 διά x = 0 καί διά x = 1 μόνον ἐάν $\lambda = n^2\pi^2$ (n = 1,2,3,...). (L.U.)

27. Προσδιορίσατε τόν πίνακα A οὕτως ὥστε τό σύστημα τῶν τριῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1+y_2+3y_3 \ ,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 5y_1+2y_2+6y_3 \ ,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -2y_1-y_2-3y_3 \ ,$$

δύναται νά γραφῇ ὑπό τήν μορφήν

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

ὅπου $Y = (y_1, y_2, y_3)'$. Ὑπολογίσατε τούς A^2 καί A^3. Ὅθεν εὕρετε τήν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος ὑπό τάς συνθήκας $y_1 = 0$ $y_2 = -1$, $y_3 = 1$ διά $t = 0$.

28. Ἐπαληθεύσατε ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως ὑπό μορφήν πινάκων

$$\frac{dY(t)}{dt} = AY(t)+Y(t)B,$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθεροί τετραγωνικοί πίνακες τῆς αὐτῆς τάξεως καί Y(t) τετραγωνικός πίναξ, εἶναι ἡ

$$Y(t) = e^{At}\, Y(0)e^{Bt}$$

ὅπου Y(0) εἶναι ἡ Y(t) διά $t = 0$.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 22.

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΗΘΩΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

22.1. Μέθοδος Leibnitz - Maclaurin

Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, γραμμικαί διαφορικαί ἐξισώσεις μέ μεταβλητούς συντελεστάς δύνανται συνήθως νά λυθοῦν δι'ὑποθέσεως μιᾶς λύσεως ὑπό μορφήν μιᾶς δυναμοσειρᾶς ὡς πρός x. Μία ἐκ τῶν ἁπλουστέρων μεθόδων νά ἐπιτύχωμεν αὐτό εἶναι διά χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου τῶν Leibnitz - Maclaurin ὡς δεικνύεται εἰς τά κατωτέρω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Ἵνα λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-5x\frac{dy}{dx}-3y=0 \tag{1}$$

πρῶτον παραγωγίζομεν n φοράς χρησιμοποιοῦντες τόν τύπον τοῦ Leibnitz (Κεφ. 3, § 3.6) ὅτε λαμβάνομεν

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-x(2n+5)y^{(n+1)}-(n+1)(n+3)y^{(n)}=0, \tag{2}$$

ὅπου, ἐν γένει, ἡ $y^{(r)}$ παριστᾶ τήν d^ry/dx^r. Ἐάν λοιπόν ὑποθέσωμεν μίαν λύσιν τῆς (1) ὑπό τήν μορφήν ἀναπτύγματος τοῦ y κατά Maclaurin, τότε

$$y=y(0)+xy^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}(0)+\dots+\frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0)+\dots, \tag{3}$$

ὅπου $y^{(r)}(0)$ παριστᾶ τήν τιμήν τοῦ d^ry/dx^r διά x = 0. Αἱ τιμαί αὐτῶν τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν δύνανται τώρα νά εὑρεθοῦν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως

$$y^{(n+2)}(0)=(n+1)(n+3)y^{(n)}(0), \quad (n \geqq 0), \tag{4}$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (2) θέτοντες x = 0. Ὅθεν ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned} &y^{(2)}(0)=1\,.\,3\,.\,y(0),\\ &y^{(3)}(0)=2\,.\,4\,.\,y^{(1)}(0),\\ &y^{(4)}(0)=3\,.\,5\,.\,y^{(2)}(0)=1\,.\,3^2\,.\,5\,.\,y(0),\\ &y^{(5)}(0)=4\,.\,6\,.\,y^{(3)}(0)=2\,.\,4^2\,.\,6\,.\,y^{(1)}(0),\\ &y^{(6)}(0)=5\,.\,7\,.\,y^{(4)}(0)=1\,.\,3^2\,.\,5^2\,.\,7\,.\,y(0), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Πράγματι αἱ τιμαί ὅλων τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν διά x = 0 δύνανται κατ'αὐτόν τόν τρόπον νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν y(0) καί $y^{(1)}(0)$. Συνεπῶς ἡ (3) γίνεται

$$\begin{aligned} y=y(0)&\left(1+\frac{1\,.\,3}{2!}x^2+\frac{1\,.\,3^2\,.\,5}{4!}x^4+\frac{1\,.\,3^2\,.\,5^2\,.\,7}{6!}x^6+\ldots\right)\\ &+y^{(1)}(0)\left(x+\frac{2\,.\,4}{3!}x^3+\frac{2\,.\,4^2\,.\,6}{5!}x^5+\frac{2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8}{7!}x^7+\ldots\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωσις (6) δύναται νά χαρακτηρισθῇ ὡς ἡ γενική λύσις τῆς (1) ἐπειδή περιέχει δύο αὐθαιρέτους σταθεράς y(0) καί $y^{(1)}(0)$,αἱ ὁποῖαι καθορίζονται ὑπό τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν τῆς λύσεως.Ἔστω ἐπί παραδείγματι, ὅτι ἡ (1) πρόκειται νά λυθῇ ὑπό τούς περιορισμούς y(0) = 0,$y^{(1)}(0)$ = 1. Τότε ἡ (6) γίνεται

$$\begin{aligned} y=x+\frac{2\,.\,4}{3!}x^3+\frac{2\,.\,4^2\,.\,6}{5!}x^5+\frac{2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8}{7!}x^7+\ldots\\ +\frac{2\,.\,4^2.\,6^2\ldots(2r)^2(2r+2)}{(2r+1)!}x^{2r+1}+\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

ἡ ὁποία συγκλίνει, συμφώνως πρός τό κριτήριον τοῦ λόγου διά x<1.

Ἐπειδή αἱ λύσεις αὐταί ἔχουν εὑρεθῆ δι'ἀναπτύξεως τῆς y περί τό σημεῖον x = 0 (δηλ. εἰς σειράν Maclaurin) συνήθως ἀναφέρονται ὡς λύσεις περί τό x = 0. Διά νά λάβωμεν τάς λύσεις πλησίον ἄλλου σημείου, ἔστω x = α, ἡ (3) πρέπει νά ἀντικατασταθῇ ὑπό τῆς σειρᾶς Taylor

$$y = y(a)+(x-a)y^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}y^{(2)}(a)+ \dots +\frac{(x-a)^r}{r!}y^{(r)}(a)+ \dots, \tag{8}$$

ἐνῷ ἡ (4) θά πρέπει νά ἀντικατασταθῇ ὑπό τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως

$$(1-a^2)y^{(n+2)}(a)-(2n+5)ay^{(n+1)}(a)-(n+1)(n+3)y^{(n)}(a) = 0 \tag{9}$$

προκυπτούσης ἐκ τῆς (2) θέτοντες x = α. Εἰς τό κεφάλαιον ὅμως αὐτό ἐνδιαφερόμεθα μόνον διά λύσεις περί τό x = 0.

Παράδειγμα 2. Ἵνα εὕρωμεν μίαν λύσιν τῆς

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+2y = 0 \tag{10}$$

περί τό x = 0, πρῶτον παραγωγίζομεν τήν ἐξίσωσιν n φοράς χρησιμοποιοῦντες τόν τύπον τοῦ Leibnitz. Ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν

$$xy^{(n+2)}+(1+n+x)y^{(n+1)}+(n+2)y^{(n)} = 0, \tag{11}$$

ἡ ὁποία ὅταν x = 0 γίνεται

$$y^{(n+1)}(0) = -\frac{n+2}{n+1}y^{(n)}(0). \tag{12}$$

Ἡ ἀναγωγική αὐτή σχέσις καθιστᾶ δυνατόν τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν $y^{(r)}(0)$ τοῦ ἀναπτύγματος κατά Maclaurin

$$y = y(0)+xy^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}(0)+ \dots +\frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0)+ \dots \tag{13}$$

συναρτήσει τῆς y(0). Ἐπί παραδείγματι,

$$\left.\begin{aligned} y^{(1)}(0) &= -2y(0),\\ y^{(2)}(0) &= -\tfrac{3}{2}y^{(1)}(0) = 3y(0),\\ y^{(3)}(0) &= -\tfrac{4}{3}y^{(2)}(0) = -4y(0),\\ y^{(4)}(0) &= -\tfrac{5}{4}y^{(3)}(0) = 5y(0), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

καί οὕτω καθ᾽ἑξῆς. Κατά συνέπειαν, ἡ (13) γίνεται

$$y = y(0)\left(1-2x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3+\frac{5}{4!}x^4+ \dots +(-1)^r\left(\frac{r+1}{r!}\right)x^r+ \dots\right), \tag{15}$$

ὅπου y(0) εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁποίας ἡ τιμή ορίζεται, ἐν γένει, ὑπό τῆς συνοριακῆς συνθήκης ἐπί τῆς y. Μολαταῦτα ἐν ἀντιθέσει πρός τήν εὑρεθεῖσαν λύσιν εἰς τό Παράδειγμα 1, ἡ (15) δέν εἶναι ἡ γενική λύσις τῆς (10) ἐφ᾽ὅσον περιέχει μόνον μίαν αὐθαίρετον σταθεράν τήν (y(0)). Πλήν ὅμως, ὡς εἴδομεν εἰς τό Κεφ. 21, § 21.9, δοθείσης μιᾶς λύσεως εἶναι σχετικῶς εὔκολον νά εὕρωμεν μίαν ἄλλην δι'ἀπ'εὐθείας ἀντικαταστάσεως. Ἔστω ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τήν (15) ὡς y_1. Τότε μία ἄλλη λύσις y_2 δύναται νά εὑρεθῇ θέτοντες

$$y_2 = u(x)y_1 \tag{16}$$

εἰς τήν (10) καί λύοντες ὡς πρός u(x). Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἔχομεν

$$x(u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)}+uy_1^{(2)})+(1+x)(u^{(1)}y_1+uy_1^{(1)})+2uy_1=0, \tag{17}$$

ἤ, ἐπειδή ἡ y_1 εἶναι ἤδη λύσις τῆς (10),

$$x(u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)})+(1+x)u^{(1)}y_1=0. \tag{18}$$

Γράφοντες τήν (18) ὡς

$$\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}+2\frac{y_1^{(1)}}{y_1}+\frac{1}{x}+1=0, \tag{19}$$

καί ὁλοκληρώνοντες, εὑρίσκομεν

$$xe^x y_1^2\frac{du}{dx}=c, \tag{20}$$

ὅπου c εἶναι ἡ αὐθαίρετος σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως.

Συνεπῶς

$$u=c\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}\,dx \tag{21}$$

καί

$$y_2=cy_1\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}\,dx. \tag{22}$$

Ἡ γενική λύσις τῆς (10) εἶναι τώρα ἕνας αὐθαίρετος γραμμικός συνδυασμός τῶν y_1 καί y_2

$$y=Ay_1+By_1\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}\,dx, \tag{23}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί καί ἡ y_1 ὁρίζεται ἐκ τῆς (15).

22.2. Ἡ Μέθοδος τοῦ Frobenius

Τό εἶδος τῶν ἐξισώσεων τάς ὁποίας θά λύσωμεν διά τῆς μεθόδου αὐτῆς ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τήν μορφήν

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{24}$$

ὅπου p(x) καί q(x) εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τῆς x.

Θέλομεν νά εὕρωμεν λύσεις εἰς τήν περιοχήν τοῦ x = 0. Διά νά εἶναι δέ αὐτό δυνατόν πρέπει ἡ p(x) καί q(x) νά εἶναι τοιαῦ - ται ὥστε ἤ ἀμφότερα τά p(0) καί q(0) νά εἶναι πεπερασμένα ὁπότε τό x = 0 καλεῖται σύνηθες σημεῖον τῆς ἐξισώσεως ἤ ἀμφότερα τά xp(x) καί x^2q(x) παραμένουν πεπερασμένα διά x = 0, ὅτε τό x = 0 καλεῖται κανονικόν ἰδιάζον σημεῖον. Ἐάν τά p(x) καί q(x) δέν ἱ-κανοποιοῦν μίαν τῶν δύο αὐτῶν συνθηκῶν τό σημεῖον x = 0 καλεῖται ἀνώμαλον ἰδιάζον σημεῖον καί ἡ μέθοδος τοῦ Frobenius διά λύσιν περί τό σημεῖον x = 0 δέν εἶναι ἐφαρμόσιμος. Ἐπί παραδείγματι

τό x = 0 εἶναι ἕν σύνηθες σημεῖον τῆς $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+2y=0, \quad (25)$

τό x = 0 εἶναι κανονικόν ἰδιάζον σημεῖον τῆς $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{3}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=0, \quad (26)$

τό x = 0 εἶναι ἀνώμαλον ἰδιάζον σημεῖον τῆς $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dx}+xy=0. \quad (27)$

Ἡ οὐσία τῆς μεθόδου τοῦ Frobenius ἔγκειται εἰς τήν ὑπόθεσιν λύ-σεως ὑπό μορφήν σειρᾶς τοῦ εἴδους

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r+\ldots), \tag{28}$$

ὅπου α_0, α_1, α_2,... α_r..., καί m εἶναι σταθεραί ὑπό προσδιορισμόν Αὕτη εἶναι γενικωτέρα τῆς ὑποθέσεως ἑνός ἀναπτύγματος κατά Mac-laurin ἐπειδή ἡ m δύναται νά ἔχη καί μή ἀκεραίας τιμάς. Ἡ μέθο-δος αὐτή ἐπεξηγεῖται διά τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 3. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$4x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0. \tag{29}$$

῾Υποθέτοντες μίαν λύσιν τῆς μορφῆς

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r} \tag{30}$$

λαμβάνομεν ἀμέσως

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{r=0}^{\infty}(m+r)a_r x^{m+r-1} \tag{31}$$

καί

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_r x^{m+r-2}. \tag{32}$$

῞Οθεν ἀντικαθιστῶντες τάς (30), (31) καί (32) εἰς τήν (29)εὑρί - σκομεν

$$4\sum_{r=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_r x^{m+r-1}+2\sum_{r=0}^{\infty}(m+r)a_r x^{m+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}=0, \tag{33}$$

ἡ ὁποία, διά προσθέσεως τῶν δύο πρώτων ὅρων, γράφεται ὡς

$$2\sum_{r=0}^{\infty}(m+r)(2m+2r-1)a_r x^{m+r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}=0. \tag{34}$$

᾽Αναπτύσσοντες τήν (34) ὡς

$$2m(2m-1)a_0x^{m-1}+2\sum_{r=1}^{\infty}(m+r)(2m+2r-1)a_r x^{m+r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r} \tag{35}$$

καί γράφοντες r+1 ὅπου r εἰς τόν δεύτερον ὅρον τῆς (35) εὑρίσκομεν

$$2m(2m-1)a_0x^{m-1}+2\sum_{r=0}^{\infty}(m+r+1)(2m+2r+1)a_{r+1}x^{m+r} +\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}=0. \tag{36}$$

᾽Εκ συνδυασμοῦ τῶν τελευταίων δύο ὅρων τῆς (36) εὑρίσκομεν

$$2m(2m-1)a_0x^{m-1} +\sum_{r=0}^{\infty}\{2(m+r+1)(2m+2r+1)a_{r+1}+a_r\}x^{m+r}=0. \tag{37}$$

᾽Εάν ἡ (37) εἶναι λύσις τῆς (29) δι᾽ὅλας τάς τιμάς τῆς x, τότε οἱ συντελεσταί ὅλων τῶν δυνάμεων τῆς x θά πρέπει νά μηδενίζωνται ἕκαστος κεχωρισμένως. ῾Η χαμηλοτέρα δύναμις τῆς x εἰς τήν (37) εἶναι ἡ x^{m-1}· συνεπῶς

$$2m(2m-1)a_0 = 0. \tag{38}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή καλεῖται ἐξίσωσις δείκτου ἐπειδή καθορίζει τάς τιμάς τοῦ δείκτου m· εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν (ὑποθέτοντες $\alpha_0 \neq 0$), m = 0 ἤ 1/2. Ἡ ἐμφάνισις μιᾶς ἐξισώσεως δείκτου εἶναι τυπικόν χαρακτηριστικόν τῆς μεθόδου τοῦ Frobenius. Ὁ μηδενισμός τῶν συντελεστῶν ἀνωτέρων δυνάμεων τοῦ x (δηλ. τῶν x^{m+r}, r = 0,1,2,..) ὁδηγεῖ (ἐκ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς (37)) εἰς τήν ἀναγωγικήν σχέσιν

$$2(m+r+1)(2m+2r+1)a_{r+1}+a_r = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Ὅθεν λαμβάνοντες m = 0, ἡ (39) δίδει

$$a_1 = -\frac{a_0}{2.1.1} = -\frac{a_0}{2!}, \tag{40}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2.2.3} = -\frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{4!}, \tag{41}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{2.3.5} = -\frac{a_2}{30} = -\frac{a_0}{6!}, \tag{42}$$

καί γενικώτερον

$$a_r = \frac{(-1)^r}{(2r)!}a_0. \tag{43}$$

Συνεπῶς μία λύσις τῆς (29) εἶναι

$$y = x^0\left(a_0 - \frac{a_0}{2!}x + \frac{a_0}{4!}x^2 - \frac{a_0}{6!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^r a_0}{(2r)!}x^r + \ldots\right), \tag{44}$$

ἡ ὁποία εὐκόλως ἀναγνωρίζεται ὡς ἡ σειρά τῆς

$$y = a_0 \cos\sqrt{x}, \tag{45}$$

ὅπου α_0 εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά.

Δευτέρα λύσις τῆς (29) δύναται νά εὑρεθῇ δι'ἐξετάσεως τῆς περιπτώσεως m $= \frac{1}{2}$. Συμβολίζοντες τούς συντελεστάς α_r εἰς τήν λύσιν ταύτην διά b_r, ἡ ἀναγωγική σχέσις (39) δίδει (ὅταν m $= \frac{1}{2}$).

$$b_1 = -\frac{b_0}{2.(\frac{3}{2}).2} = -\frac{b_0}{3!}, \tag{46}$$

$$b_2 = -\frac{b_1}{2.(\frac{5}{2}).4} = -\frac{b_1}{20} = \frac{b_0}{5!}, \tag{47}$$

$$b_3 = -\frac{b_2}{2.(\frac{7}{2}).6} = -\frac{b_2}{42} = -\frac{b_0}{7!}, \tag{48}$$

καί γενικώτερον

$$b_r = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\, b_0. \tag{49}$$

Συνεπῶς μία ἄλλη λύσις τῆς (29) εἶναι ἡ

$$y = x^{\frac{1}{2}}\left(b_0 - \frac{b_0}{3!}x + \frac{b_0}{5!}x^2 - \frac{b_0}{7!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}b_0 x^r + \dots\right), \tag{50}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος τῆς

$$y = b_0 \sin\sqrt{x}, \tag{51}$$

ὅπου b_0 εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά.

Ἡ γενική λύσις τῆς (29) δίδεται λοιπόν ἐκ τῆς

$$y = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}, \tag{52}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 4. Ἵνα λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy, \tag{53}$$

καί πάλιν ὑποθέτομεν μίαν λύσιν τῆς μορφῆς

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{m+r} \tag{54}$$

Παραγωγίζοντες τήν (54) καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (53) λαμβάνομεν

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{m+r+1}, \tag{55}$$

ἡ ὁποία δίδει

$$a_0 m(m-1)x^{m-2} + a_1(m+1)mx^{m-1} + a_2(m+2)(m+1)x^m$$
$$+ \sum_{r=3}^{\infty} a_r(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{m+r+1} = 0. \tag{56}$$

Γράφοντες r+3 ὅπου r εἰς τόν πρῶτον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος, ἡ (56) γίνεται

$$a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m+1)mx^{m-1}+a_2(m+2)(m+1)x^m$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\{(m+r+3)(m+r+2)a_{r+3}-a_r\}x^{m+r+1}=0 \tag{57}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν (ἐξισώνοντες ὅλους τούς συντελεστάς τοῦ x πρός τό μηδέν)

$$a_0m(m-1)=0, \tag{58}$$
$$a_1(m+1)m=0, \tag{59}$$
$$a_2(m+2)(m+1)=0, \tag{60}$$

καί

$$a_{r+3}=\frac{a_r}{(m+r+3)(m+r+2)}, \quad (r=0,1,2\ldots). \tag{61}$$

Ἡ ἐξίσωσις δεικτῶν (58) δίδει (ὑποθέτοντες $\alpha_0 \neq 0$) m = 0 ἤ 1. Λαμβάνοντες τήν περίπτωσιν πρῶτον m = 0 παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (59) ὅτι ἡ α_1 εἶναι αὐθαίρετος ἐνῶ, ἐκ τῆς (60), $\alpha_2 = 0$. Ἡ ἀναγωγική σχέσις (61) δίδει (ὅταν $\alpha_2 = 0$)

$$\left.\begin{aligned}
a_3&=\frac{a_0}{3.2},\\
a_4&=\frac{a_1}{4.3},\\
a_5&=\frac{a_2}{5.4}=0,\\
a_6&=\frac{a_3}{6.5}=\frac{a_0}{6.5.3.2},\\
a_7&=\frac{a_4}{7.6}=\frac{a_1}{7.6.4.3},\\
a_8&=\frac{a_5}{8.7}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Ὅθεν ἡ λύσις τῆς (53) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς m = 0 εἶναι

$$y=a_0+a_1x+\frac{a_0}{3.2}x^3+\frac{a_1}{4.3}x^4+\frac{a_0}{6.5.3.2}x^6+\frac{a_1}{7.6.4.3}x^7+\ldots \tag{63}$$

$$= a_0\left(1+\frac{x^3}{3\,.\,2}+\frac{x^6}{6\,.\,5\,.\,3\,.\,2}+\ \dots\right)+a_1\left(x+\frac{x^4}{4\,.\,3}+\frac{x^7}{7\,.\,6\,.\,4\,.\,3}\ +\dots\right), \qquad (64)$$

ὅπου α_0 καί α_1 εἶναι αὐθαίρετοι ἀνεξάρτητοι σταθεραί. Πρέπει τελικῶς νά ἐρευνήσωμεν τήν ἀπομένουσαν δυνατότητα m = 1. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ (59) δίδει $\alpha_1 = 0$, ἐνῶ ἡ (60) δίδει $\alpha_2 = 0$ ὡς πρότερον. Ἡ ἀναγωγική σχέσις (61) δίδει (ὅταν $\alpha_1 = 0$)

$$\left.\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_0}{4\,.\,3},\\
a_4 &= \frac{a_1}{5\,.\,4} = 0,\\
a_5 &= \frac{a_2}{6\,.\,5} = 0,\\
a_6 &= \frac{a_3}{7\,.\,6} = \frac{a_0}{7\,.\,6\,.\,4\,.\,3},\\
a_7 &= \frac{a_4}{8\,.\,7} = 0,\\
a_8 &= \frac{a_5}{9\,.\,8} = 0,\\
a_9 &= \frac{a_6}{10\,.\,9} = \frac{a_0}{10\,.\,9\,.\,7\,.\,6\,.\,4\,.\,3},
\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς.

Ὅθεν ἡ ἀντιστοιχοῦσα λύσις διά m = 1 εἶναι ἡ

$$y = x\left(a_0+\frac{a_0}{4\,.\,3}x^3+\frac{a_0}{7\,.\,6\,.\,4\,.\,3}x^6+\ \dots\right) \qquad (66)$$

ἡ ὁποία (ἐκτός μιᾶς αὐθαιρέτου σταθερᾶς) εἶναι ἁπλῶς ἡ δευτέρα σειρά τῆς λύσεως (64). Ὡς ἐκ τούτου ὑπό τῆς λύσεως διά m = 1 δέν λαμβάνομεν τίποτε νεώτερον καί συνεπῶς ἡ (64) ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν γενικήν λύσιν τῆς (53).

Τέλος ἀναφέρομεν ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ Frobenius, ὡς διεσαφηνίσθη ὑπό τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων, δέν ὁδηγεῖ πάντοτε εἰς δύο ἀνεξαρτήτους λύσεις ὑπό μορφήν σειρῶν. Δύναται νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἐάν αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως δεικτῶν εἶναι ἴσαι τότε δέν δύναται νά ὑπάρξῃ δευτέρα ἀνεξάρτητος λύσις.Τό αὐτό ἐπίσης ἀληθεύει (μέ μερικάς έξαιρέσεις) ὅταν αἱ δύο ρίζαι διαφέρουν κατά ἀκέραιον.

22.3. Ἡ Ἐξίσωσις τοῦ Bessel

Ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0, \tag{67}$$

ὅπου ν εἶναι μία πραγματική σταθερά, καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ Bessel καί αἱ λύσεις της εἶναι αἱ συναρτήσεις τοῦ Bessel τάξεως ν. Ἐφαρμόζοντες τήν μέθοδον τοῦ Frobenius καί ὑποθέτοντες λύσιν ὑπό μορφήν σειρᾶς διά τήν (67) τῆς μορφῆς

$$y=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{m+r} \tag{68}$$

λαμβάνομεν τήν ἀναγωγικήν σχέσιν

$$a_{r+2}=-\frac{a_r}{(r+2+m)^2-\nu^2},\ (r=0,1,2\ldots) \tag{69}$$

ὁμοῦ μέ τήν

$$a_1=0, \tag{70}$$

καί

$$m=\pm\nu \tag{71}$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως δεικτῶν.

Ἐφ'ὅσον $\alpha_1 = 0$, ἡ (69) δίδει $\alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0$ καί ὅθεν ὅταν $m = +\nu$ ἔχομεν τήν λύσιν ὑπό μορφήν σειρᾶς

$$y=a_0x^{\nu}\left\{1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2\,.\,4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\ldots\right\}, \tag{72}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ν δέν εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος.
Ὁμοίως ὅταν $m = -\nu$ λαμβάνομεν τήν σειράν

$$y=a_0x^{-\nu}\left\{1+\frac{x^2}{2(2\nu-2)}+\frac{x^4}{2\,.\,4(2\nu-2)(2\nu-4)}+\ldots\right\} \tag{73}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ν δέν εἶναι θετικός ἀκέραιος.

Κατά τόν ὁρισμόν τῶν συναρτήσεων Bessel συνηθίζεται νά γράφωμεν τό α_0 ὡς

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{74}$$

ὅπου Γ(ν+1) εἶναι ἡ συνάρτησις Γάμμα ὁρισθεῖσα εἰς τό Κεφ. 18.Μέ τήν μορφήν αὐτήν τῆς a_0, ἡ (72) ὁρίζει τήν συνάρτησιν Bessel τοῦ πρώτου εἴδους τάξεως ν, $J_\nu(x)$, οὕτως ὥστε

$$y = J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\nu+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r} \tag{75}$$

Ὁμοίως ἡ δευτέρα λύσις τῆς (73) γίνεται

$$y = J_{-\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-\nu+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2r} \tag{76}$$

Ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως Bessel διά μή ἀκεραίας τιμάς τῆς ν εἶναι λοιπόν ἡ

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \tag{77}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ἐάν ν = n, ὅπου n εἶναι θετικός ἀκέραιος, τότε ἐπειδή Γ(n+r+1) = (n+r)!, ἡ (75) γίνεται

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \tag{78}$$

Ὁμοίως

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(-n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \tag{79}$$

Οἱ πρῶτοι n ὅροι τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι μηδέν ἐφ'ὅσον (βλ.Κεφ.18) ἡ Γ συνάρτησις ἤ ἡ παραγοντική συνάρτησις δι'ἀρνητικούς ἀκεραί - ους εἶναι ἄπειρος. Ὅθεν θέτοντες r = n+p εἰς τήν (79) ἔχομεν

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(-n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \tag{80}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \tag{81}$$

$$= (-1)^n J_n(x) \tag{82}$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι αἱ $J_n(x)$ καί $J_{-n}(x)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημέναι. Συνεπῶς ἡ μέθοδος Frobenius δίδει μοναδικήν λύσιν ὑπό τάς συνθήκας αὐτάς καί ἐπομένως ἡ (77) δέν δύναται νά ληφθῇ ὡς ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως διά $\nu = n$. Δευτέρα λύσις, ὅμως, δύναται νά εὑρεθῇ δι'ἄλλων μεθόδων - π.χ., κατά τήν μέθοδον τοῦ Παραδείγματος 20, Κεφ. 21. Ἡ λύσις αὐτή, γνωστή ὡς συνάρτησις Weber, δέν θά συζητηθῇ ἐνταῦθα.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ἀπό τήν (78)

$$J_0(x) = 1-\frac{x^2}{(1!)^2 2^2}+\frac{x^4}{(2!)^2 2^4}-\frac{x^6}{(3!)^2 2^6}+\ldots \tag{83}$$

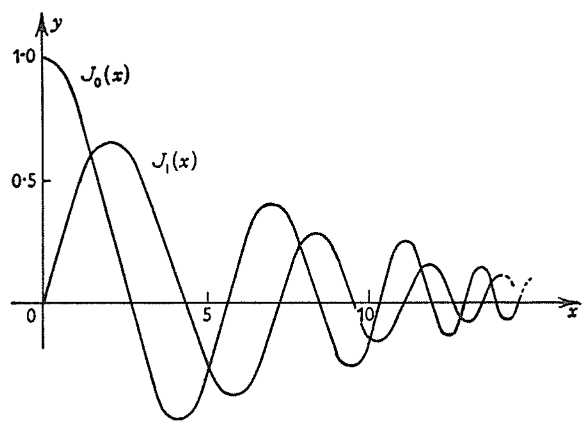
καί

$$J_1(x) = \frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3.1!2!}+\frac{x^5}{2^5.2!3!}-\frac{x^7}{2^7.3!4!}+\ldots \tag{84}$$

ἐξ ὧν συνάγεται ὅτι

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = J_1(x) \tag{85}$$

Γραφικαί παραστάσεις τῶν $J_0(x)$ καί $J_1(x)$ δίδονται εἰς τό Σχ.22.1



Σχ. 22.1.

22.4. Ἡ Ἐξίσωσις Legendre

Ἡ ἐξίσωσις

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0, \tag{86}$$

ὅπου ℓ εἶναι μία πραγματική σταθερά, εἶναι ἡ ἐξίσωσις Legendre καί δύναται νά λυθῇ δι'ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τοῦ Frobenius κατά τόν συνήθη τρόπον. Ἐπαφίεται εἰς τόν σπουδαστήν νά δείξῃ ὅτι αἱ δύο σειραί αἱ λαμβανόμεναι κατά τόν τρόπον αὐτόν εἶναι αἱ

$$y=a_0\left\{1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\ldots\right\} \tag{87}$$

καί

$$y=a_1\left\{x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5+\ldots\right\}, \tag{88}$$

ὅπου a_0 καί a_1 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ὅταν ℓ = n, ὅπου n εἶναι ἀκέραιος, ἡ μία ἐκ τῶν δύο σειρῶν τελειώνει. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν ℓ = 2 ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (80) μετά τόν ὅρον x^2 εἶναι μηδέν. Ὁμοίως ὅταν ℓ = 3, ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (81) μετά τό x^3 εἶναι μηδέν. Τά εὑρισκόμενα οὕτως πολυώνυμα (συμβολιζόμενα ὑπό $P_n(x)$) εἶναι γνωστά ὡς πολυώνυμα τοῦ Le gendre (τά a_0 καί a_1 ἐκλέγονται οὕτως ὥστε ἕκαστον πολυώνυμον νά ἔχῃ τήν τιμήν 1 ὅταν x = 1). Μερικά ἐκ τῶν πρώτων αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι

$$\left.\begin{array}{c} P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x). \end{array}\right\} \tag{82}$$

Ἡ μή περατουμένη σειρά δέν μᾶς ἐνδιαφέρει ἐδῶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 22

1. Ἐάν $(dy/dx)-y = x^2$ καί y = 0 διά x = 0, εὕρετε μίαν λύσιν ὑπό μορφήν σειρᾶς χρησιμοποιοῦντες α) τήν μέθοδον Leibnitz - Maclaurin καί β) τήν μέθοδον δοκιμαστικῆς σειρᾶς. Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματα μέ τήν λύσιν τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν δι' ἀπ'εὐθείας ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως.

2. 'Εάν $4(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$, δείξατε ότι διά x = 0

$$4\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = -(4n+2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-\frac{d^ny}{dx^n}.$$

"Οθεν, δοθέντος ότι y = 0, (dy/dx) = 1 διά x = 0, εύρετε μίαν σειράν διά τήν y μέχρις καί τοῦ ὅρου x^5.

3. Χρησιμοποιήσατε τήν μέθοδον Leibnitz - Maclaurin διά νά εὕρητε μίαν λύσιν ὑπό μορφήν σειρᾶς μέχρι καί τοῦ ὅρου x^4 τῆς ἐξισώσεως

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(1-x)y=0$$

δοθέντος ὅτι dy/dx = 1 διά x = 0.

4. Εὕρετε τάς γενικάς λύσεις (ὑπό μορφήν σειρῶν) τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων

$$(a)\ 2x\frac{d^2y}{dx^2}+(3-2x)\frac{dy}{dx}+4y=0,$$

$$(b)\ 2(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-9x)\frac{dy}{dx}-3y=0,$$

$$(c)\ 3x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0.$$

5. Εὕρετε τήν λύσιν ὑπό μορφήν σειρᾶς Maclaurin τῆς ἐξισώσεως

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-1)y=0.$$

'Εάν ἡ λύσις αὐτή συμβολίζεται ὑπό y_1, δείξατε ὅτι ἡ δευτέρα λύσις εἶναι $y_2 = u(x)y_1$ ὅπου

$$u=\int\frac{dx}{xy_1^2}.$$

6. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(2x+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$$

ἔχει λύσιν διάφορον τοῦ μηδενός τῆς μορφῆς $y = α+bx+cx^2$ καί εὕρετε τάς σταθεράς b καί c συναρτήσει τῆς α. Δείξατε ἐπίσης ὅτι ὑπάρχει μία ἄλλη λύσις τῆς μορφῆς

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}},$$

ὅπου $4(n+1)\alpha_{n+1} = (3-2n)\alpha_n$.

Προσδιορίσατε τήν ἀκτῖνα συγκλίσεως τῆς σειρᾶς. (L.U.)

7. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορική ἐξίσωσις

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+(k^2-1)y=0$$

(ὅπου k εἶναι σταθερά) ἔχει λύσεις τῆς μορφῆς

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c};$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι c = 0 ἤ 1.

Ὅθεν εὕρετε δύο ἀνεξαρτήτους λύσεις, μίαν ἐκ τῶν ὁποίων ὑπό τήν μορφήν

$$y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-k^2)(3^2-k^2)\ldots\{(2n-1)^2-k^2\}}{(2n)!}x^{2n}, \qquad \text{(L.U.)}$$

καί δώσατε τήν γενικήν λύσιν.

8. Εὕρετε τήν λύσιν

$$y=J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\,.\,4^2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\ldots$$

τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0.$$

Δείξατε ὅτι ἡ $y = uJ_0$ εἶναι μία δευτέρα λύσις ἐάν

$$u=\int\frac{dx}{xJ_0^2},$$

καί ἀναπτύξατε τήν u ὑπό τήν μορφήν $a+\log_e x+b_2x^2+\ldots$, ὅπου α εἶναι αὐθαίρετος καί ἡ b_2 πρέπει νά εὑρεθῇ. (C.U.)

9. Δείξατε ὅτι ἡ $J_n(x)/x^n$ εἶναι μία λύσις τῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1+2n}{x}\right)\frac{dy}{dx}+y=0,$$

καί ὅτι ἡ $\sqrt{(x)}J_n(kx)$ εἶναι μία λύσις τῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(k^2-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)y=0,$$

ὅπου, εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις, n εἶναι θετικός ἀκέραιος.

10. Λαμβάνοντες τήν σειράν $J_0(x)$ ὡς δίδεται εἰς τό Πρόβλημα 8 δείξατε ὅτι

$$\frac{\sin x}{x}=\int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$

11. Χρησιμοποιοῦντες τάς σειράς τῶν $J_\nu(x)$ καί $J_{-\nu}(x)$ δοθείσας εἰς 22.3, δείξατε ὅτι

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\sin x,$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\cos x.$$

12. Θέτοντες $y = ue^{-\frac{1}{4}x^2}$, εὕρετε τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(2n+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x^2)y=0$$

(n ἀκέραιος) εἰς τήν ὁποίαν y = 1 ὅταν x = 0 καί ὅπου u εἶναι πολυώνυμον ὡς πρός x. (C.U.)

13. Ὁ τύπος τοῦ Rodrigues διά τό πολυώνυμον Legendre εἶναι

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Ἐπαληθεύσατε τόν τύπον διά n = 0,1,2,3.

14. Ἐάν $P_n(z)$ ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωσιν Legendre

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2}-2z\frac{dP_n}{dz}+n(n+1)P_n=0,$$

δείξατε ὅτι ἡ $V=\dfrac{d^mP_n}{dz^m}$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν

$$(1-z^2)\frac{d^2V}{dz^2}-2(m+1)z\frac{dV}{dz}+\{n(n+1)-m(m+1)\}V=0,$$

καί ὅτι ἡ $W=(1-z^2)^{m/2}\dfrac{d^mP_n}{dz^m}$ ἱκανοποιεῖ τήν

$$(1-z^2)\frac{d^2W}{dz^2}-2z\frac{dW}{dz}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right\}W=0.$$

Ὅθεν δείξατε ὅτι $\sin\theta\,\dfrac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$ εἶναι λύσις τῆς

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}+\frac{d}{d\theta}(W\cot\theta)+n(n+1)W=0. \qquad \text{(C.U.)}$$

15. Διά τῆς ἀντικαταστάσεως $P(\theta)=Q(\theta)(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}$

εἰς τήν ἐξίσωσιν τοῦ Legendre

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+n(n+1)P=0,$$

δείξατε ὅτι, ὅταν $\operatorname{cosec}\theta \ll (2n+1)$, αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Legendre εἶναι τῆς μορφῆς

$$(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{(n+\tfrac{1}{2})\theta\right\}.$$

16. Γράφοντες τήν ἐξίσωσιν τοῦ Bessel ὑπό τήν μορφήν

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

καί παραλείποντες τόν ὅρον ν^2/x^2, διά μεγάλα x, εὕρετε τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)u=0,$$

ὅπου $u=\sqrt{(x)}y$. Ὅθεν παραλείποντες, διά μεγάλα x, τόν ὅρον $1/4x^2$, δείξατε ὅτι μία ἀσυμπτωτική μορφή ($x \gg 1$) τῶν συναρτήσεων Bessel εἶναι

$$\frac{1}{\sqrt{(x)}}(A\cos x+B\sin x).$$

(Ὑπόδειξις : Πρῶτον θέσατε y = Y+1 οὕτως ὥστε Y = 0 ὅταν x = 0 καί ἐν συνεχείᾳ ἀκολουθήσατε τήν μέθοδον).

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 23.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ LAPLACE

23.1. Ὁρισμός

Μεταξύ τῶν πολλῶν καί ποικίλων ἐφαρμογῶν τοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace, ἴσως ἡ περισσότερον σπουδαία εἶναι εἰς τήν λύσιν γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (συνήθων καί μερικῶν). Πρίν ὅμως εἰσέλθωμεν εἰς τήν ἀνάπτυξιν τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς (βλ. § 23.5), θά ὁρίσωμεν τόν μετασχηματισμόν Laplace καί θά ὑπολογίσωμεν τούς μετασχηματισμούς μερικῶν ἁπλῶν συναρτήσεων.

Ὁ μετασχηματισμός Laplace $\bar{f}(p)$ συναρτήσεως $f(x)$ ὅπου $x>0$ ὁρίζεται ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \tag{1}$$

ὅπου ἡ μεταβλητή p ὑποτίθεται ὅτι εἶναι πραγματική (δύναται ὅμως γενικώτερον νά εἶναι μιγαδική). Εἶναι εὔχρηστος ὁ συμβολισμός

$$\bar{f}(p) = L\{f(x)\}, \tag{2}$$

ὅπου L{} ἀντιπροσωπεύει συμβολικῶς τήν πρᾶξιν ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τόν μετασχηματισμόν Laplace τῆς συναρτήσεως ἐντός τῶν ἀγκυλῶν.

Ἐπί πλέον ὁ L{} εἶναι γραμμικός τελεστής διότι ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$L\{kf(x)\} = kL\{f(x)\}, \tag{3}$$

ὅπου k εἶναι μία σταθερά καί

$$L\{\alpha f(x)+\beta g(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx \tag{4}$$

$$= \alpha\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx+\beta\int_0^\infty e^{-px}g(x)\,dx \tag{5}$$

$$= \alpha L\{f(x)\}+\beta L\{g(x)\}, \tag{6}$$

ὅπου α καί β εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί καί g(x) εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις ὁριζομένη (ὅπως ἡ f(x)) διά x > 0.

23.2. Ἁπλοῖ Μετασχηματισμοί

Χρησιμοποιοῦντες τόν ὁρισμόν (1) δυνάμεθα νά λάβωμεν τούς κατωτέρω μετασχηματισμούς :

(α) Ἐάν f(x) = 1 διά x > 0 τότε

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,dx = \frac{1}{p}, \tag{7}$$

ὅπου, διά τήν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος, p > 0.

(β) Ἐάν $f(x) = e^{\alpha x}$, ὅπου α εἶναι μία πραγματική σταθερά, τότε

$$L\{e^{ax}\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}e^{ax}\,dx = \frac{1}{p-a}, \tag{8}$$

ὅπου p > α διά τήν σύγκλισιν.

(γ) Ἐάν f(x) = sinαx, ὅπου α εἶναι μία πραγματική σταθερά, τότε

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\sin ax\,dx = \frac{a}{p^2+a^2}, \tag{9}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι p > 0.

(δ) Ἐάν f(x) = cosαx τότε

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\cos ax = \frac{p}{p^2+a^2}, \tag{10}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι p > 0.

(ε) Ἐάν $f(x) = x^n$, ὅπου n = 1,2,3,..., τότε

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx = \frac{n!}{p^{n+1}}, \tag{11}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν $p > 0$.

(ζ) Ἐάν $f(x) = \sinh ax$, ὅπου α εἶναι πραγματική σταθερά, τότε

$$L\{\sinh ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\sinh ax\,dx = \frac{a}{p^2-a^2}, \tag{12}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι $p > \alpha$.

(η) Ἐάν $f(x) = \cosh ax$ τότε

$$L\{\cosh ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\cosh ax = \frac{p}{p^2-a^2}, \tag{13}$$

προϋποθέτοντες πάλιν $p > \alpha$.

Μετασχηματισμοί πολλῶν ἄλλων συναρτήσεων δύνανται νά εὑρεθοῦν καθ'ὅμοιον τρόπον ἀλλ'εἰς μερικάς περιπτώσεις διευκολύνει ἡ χρῆσις τῆς ἰδιότητος τῆς γραμμικότητος τοῦ L{} ὡς ἐκφράζεται εἰς τήν (6). Ἐπί παραδείγματι, ὁ μετασχηματισμός τῆς cosh αx δύναται νά εὑρεθῇ κατ'αὐτόν τόν τρόπον γράφοντες

$$L\{\cosh ax\} = L\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}L\{e^{ax}\} + \tfrac{1}{2}L\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2}. \tag{14}$$

Ἕν ἄλλο χρήσιμον ἀποτέλεσμα (συνήθως γνωστόν ὡς θεώρημα μετατοπίσεως) εἶναι ὅτι ἐάν $\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$, τότε

$$\bar{f}(p+a) = L\{e^{-ax}f(x)\}, \tag{15}$$

ὅπου α εἶναι μία πραγματική σταθερά. Τό ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται εὐκόλως διότι ἐκ τῆς (1)

$$L\{e^{-ax}f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}e^{-ax}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(p+a)x}f(x)\,dx$$

$$= \bar{f}(p+a). \tag{16}$$

Τά κατωτέρω παραδείγματα ὑποδεικνύουν τήν χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω ἀποτελέσματος.

Παράδειγμα 1. Ἐπειδή ἐκ τῆς (11)

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad (p > 0), \tag{17}$$

ἕπεται ἐκ τῆς (15) ὅτι

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}, \quad (p > -a). \tag{18}$$

Παράδειγμα 2. Ἐπειδή ἐκ τῶν (9) καί (10)

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2}, \tag{19}$$

ἡ (15) δίδει

$$L\{e^{-ax}\sin bx\} = \frac{b}{(p+a)^2+b^2}, \quad (p > -a) \tag{20}$$

καί

$$L\{e^{-ax}\cos bx\} = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}, \quad (p > -a) \tag{21}$$

ὅπου a καί b εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Εἷς μικρός πίναξ μετασχηματισμῶν Laplace δίδεται κατωτέρω:

ΠΙΝΑΞ 3

$f(x)$	$\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$	$f(x)$	$\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$	$x^n e^{-ax}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}, \quad p > -a$
x^n, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad p > 0$
$e^{ax} (a \neq 0)$	$\frac{1}{p-a}, \quad p > a$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad p > 0$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}, \quad p > 0$	$x \sin ax$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}, \quad p > 0$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}, \quad p > a$	$e^{-ax}\sin bx$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}, \quad p > -a$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}, \quad p > a$	$e^{-ax}\cos bx$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}, \quad p > -a$

23.3. Ἀντίστροφοι Μετασχηματισμοί

Εἰσάγομεν τόν ἀντίστροφον τελεστήν $L^{-1}\{\}$ ὁ ὁποῖος εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἐάν

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p) \tag{22}$$

τότε

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}. \tag{23}$$

Ἤ, ἄλλως, δοθείσης μιᾶς συναρτήσεως $\bar{f}(p)$, $L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$ εἶναι μία συνάρτησις ἐκ τῆς ὁποίας ἡ $\bar{f}(p)$ λαμβάνεται δι'ἑνός μετασχηματισμοῦ Laplace. Προφανῶς, ἐκ τῶν (22) καί (23)

$$LL^{-1} = L^{-1}L = 1, \tag{24}$$

ἐνῷ δυνάμει τῆς γραμμικότητος τοῦ τελεστοῦ $L\{\}$ ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned} L^{-1}\{\kappa f(x)\} &= \kappa L^{-1}\{f(x)\}, \\ L^{-1}\{\alpha f(x)+\beta g(x)\} &= \alpha L^{-1}\{f(x)\}+\beta L^{-1}\{g(x)\}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ὅπου α, β καί k εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Ὅθεν $L^{-1}\{\}$ εἶναι ἐπίσης ἕνας γραμμικός τελεστής.

Ἀντίστροφοι μετασχηματισμοί δύνανται εὐκολώτερον νά εὑρεθοῦν ἐκ τῶν πινάκων τυπικῶν μετασχηματισμῶν. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν (ἐκ τῆς (7))

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \tag{26}$$

ἔχομεν

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1. \tag{27}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς (10)

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = \cos ax. \tag{28}$$

Ὅταν ὁ $\bar{f}(p)$ εἶναι ρητή συνάρτησις τοῦ p ἀλλ' ὄχι ἀμέσως ἀναγνωρίσιμος ὡς τυπικῆς μορφῆς δύναται συνήθως νά ἐκφρασθῇ, τῇ βοηθείᾳ μερικῶν κλασμάτων, ὡς ἄθροισμα ὡρισμένων ὅρων οἱ ὁποῖοι ἀντιστρέφονται ἀμέσως. Τά ἀκόλουθα παραδείγματα διευκρινίζουν τήν προαναφερθεῖσαν δυνατότητα.

Παράδειγμα 3. Ἵνα εὕρωμεν τόν

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right\}, \tag{29}$$

ὅπου α καί b εἶναι σταθεραί, γράφομεν

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{A}{p+a}+\frac{B}{p+b}. \tag{30}$$

Συγκρίνοντες τούς συντελεστάς τῶν αὐτῶν δυνάμεων τῆς p ἑκάστου μέλους τῆς (30), εὑρίσκομεν

$$B=-A=\frac{1}{a-b} \tag{31}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι α ≠ b.

Συνεπῶς χρησιμοποιοῦντες τήν (26)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right\}=\frac{1}{(b-a)}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}-\frac{1}{(b-a)}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+b}\right\} \tag{32}$$

$$=\frac{1}{(b-a)}(e^{-ax}-e^{-bx}). \tag{33}$$

Παράδειγμα 4. Ἵνα εὕρωμεν τόν

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\right\}, \tag{34}$$

ὅπου α καί b εἶναι σταθεραί, γράφομεν

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{(b^2-a^2)}\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}\right), \quad (b\neq a). \tag{35}$$

Συνεπῶς χρησιμοποιοῦντες τήν (25)

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\right\}=\frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax-\cos bx). \tag{36}$$

Παράδειγμα 5. Ἵνα εὕρωμεν τόν

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}\right\}, \tag{37}$$

ὅπου α εἶναι σταθερά διάφορος τοῦ μηδενός, γράφομεν

$$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+a^2}, \tag{38}$$

ἡ ὁποία δίδει $A = -B = \dfrac{1}{\alpha^2}$ ῞Οθεν

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}\right\} = \frac{1}{a^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - \frac{1}{a^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+a^2}\right\}, \tag{39}$$

$$= \frac{x}{a^2} - \frac{1}{a^3}L^{-1}\left\{\frac{a}{p^2+a^2}\right\}, \tag{40}$$

$$= \frac{x}{a^2} - \frac{1}{a^3}\sin ax. \tag{41}$$

᾽Αντίστροφοι μετασχηματισμοί δύνανται γενικώτερον νά εὑρεθοῦν διά χρησιμοποιήσεως διαφόρων μεθόδων τῆς θεωρίας τῶνμιγαδικῶν μεταβλητῶν, εἰδικώτερον ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων (βλ. παρατηρήσεις τοῦ Κεφ. 4, § 4.5). Πάντως, δέν θά ἀσχοληθῶμεν ἐδῶ μέ τάς μεθόδους αὐτάς.

23.4. Μετασχηματισμοί Διαφορικῶν Συντελεστῶν

Προκαταρκτικῶς διά τήν λύσιν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων διά τῆς μεθόδου τῶν μετασχηματισμῶν Laplace, ὑπολογίζομεν τούς μετασχηματισμούς τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν συναρτήσεως $y(x)$. ῎Εστω πρῶτον ὁ μετασχηματισμός τοῦ $\dfrac{dy}{dx}$. Τότε

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{dy}{dx}\,dx = \Big[ye^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}y\,dx \tag{42}$$

$$= -y(0) + pL\{y\}, \quad \text{ὑποθέτοντες } e^{-px}y \to 0 \text{ τοῦ } x \to \infty, \tag{43}$$

$$= -y(0) + p\bar{y}(p), \tag{44}$$

ὅπου $y(0)$ εἶναι ἡ τιμή τῆς $y(x)$ διά $x = 0$. ῾Ομοίως

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \left[e^{-px}\frac{dy}{dx}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}\frac{dy}{dx}\,dx. \tag{45}$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν (44) αὐτή γίνεται (ὑποθέτοντες ὅτι $e^{-px}\dfrac{dy}{dx} \to 0$ τοῦ $x \to \infty$)

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = p^2\bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0), \tag{46}$$

ὅπου $y^{(1)}(0)$ εἶναι ἡ τιμή τῆς $\dfrac{dy}{dx}$ διά $x = 0$.

Μετασχηματισμοί άνωτέρων παραγώγων ύπολογίζονται κατά τόν αύτόν τρόπον καί γενικώτερον εύρίσκομεν

$$L\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = p^n\bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) \ldots - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0), \tag{47}$$

ὅπου $y^{(r)}(0)$ εἶναι ἡ τιμή τῆς $\frac{d^r y}{dx^r}$ διά $x = 0$.

23.5. Λύσις Συνήθων Διαφορικῶν 'Εξισώσεων

Τό πρῶτον βῆμα διά τήν λύσιν συνήθων γραμμικῶν διαφορικῶν έξισώσεων διά μετασχηματισμοῦ Laplace εἶναι νά μετατρέψωμεν τήν έξίσωσιν εἰς άλγεβρικήν έξίσωσιν ὡς πρός $\bar{y}(p)$ χρησιμοποιοῦντες τά άποτελέσματα τῆς τελευταίας παραγράφου καί έν συνεχείᾳ νά λύσωμεν ὡς πρός $\bar{y}(p)$. 'Εάν ἡ λύσις αὐτή δύναται νά άντιστραφῇ ἡ οὕτως εὑρισκομένη συνάρτησις $y(x)$ θά εἶναι ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς έξισώσεως. Τά κατωτέρω παραδείγματα έπεξηγοῦν τήν μέθοδον ταύτην.

Παράδειγμα 6. Ἵνα λύσωμεν τήν

$$(D+2)y = \cos x \tag{48}$$

δοθέντος ὅτι $y = 1$ διά $x = 0$ (δηλ. $y(0) = 1$) λαμβάνομεν τόν μετασχηματισμόν Laplace τῆς (48) καί χρησιμοποιοῦντες τήν (44) καί τήν (10)

$$p\bar{y}(p) - y(0) + 2\bar{y}(p) = \frac{p}{p^2+1}. \tag{49}$$

'Επιλύοντες ὡς πρός $\bar{y}(p)$ εὑρίσκομεν

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{p+2} \tag{50}$$

$$= \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{p+2}, \quad \text{ἀφοῦ } y(0) = 1 \tag{51}$$

'Εν συνεχείᾳ ἀντιστρέφομεν τήν έξίσωσιν αὐτήν γράφοντες πρῶτον

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+1}, \tag{52}$$

ὅπου A,B καί C εἶναι σταθεραί. 'Εργαζόμενοι κατά τόν γνωστόν τρόπον εὑρίσκομεν $A = -B = -\frac{2}{5}$ καί $C = \frac{1}{5}$, τό ὁποῖον δίδει

$$\bar{y}(p) = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1+2p}{p^2+1}\right)+\frac{1}{p+2} \tag{53}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right). \tag{54}$$

Συνεπῶς

$$y(x) = L^{-1}\{\bar{y}(p)\} = \tfrac{1}{5}\sin x+\tfrac{2}{5}\cos x+\tfrac{3}{5}e^{-2x}. \tag{55}$$

Παράδειγμα 7. Ἵνα λύσωμεν τήν

$$(D^2+a^2)y = \sin bx, \tag{56}$$

ὅπου α καί b εἶναι σταθεραί ($\alpha \neq b$, $\alpha \neq 0$) λαμβάνομεν τόν μετασχηματισμόν Laplace τῆς (56) χρησιμοποιοῦντες τάς (46) καί (9). Τότε

$$p^2\bar{y}(p)-py(0)-y^{(1)}(0)+a^2\bar{y}(p) = \frac{b}{p^2+b^2}, \tag{57}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\bar{y}(p)=\frac{b}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}+\frac{py(0)}{p^2+a^2}+\frac{y^{(1)}(0)}{p^2+a^2}, \tag{58}$$

ὅπου y(0) καί $y^{(1)}(0)$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ τιμαί τῶν y καί $\frac{dy}{dx}$ διά x = 0. Χρησιμοποιοῦντες τήν ἀνάπτυξιν εἰς μερικά κλάσματα διά τήν (58) ἔχομεν

$$\bar{y}(p) = \frac{b}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{p^2+a^2}-\frac{1}{p^2+b^2}\right)+y(0)\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)+\frac{y^{(1)}(0)}{a}\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right), \tag{59}$$

ἐκ τῆς ὁποίας δι' ἀντιστροφῆς λαμβάνομεν τήν λύσιν

$$\begin{aligned} y(x) &= L^{-1}\{\bar{y}(p)\} \\ &= \frac{b\sin ax}{a(b^2-a^2)}-\frac{\sin bx}{b^2-a^2}+y(0)\cos ax+\frac{y^{(1)}(0)\sin ax}{a}, \end{aligned} \tag{60}$$

ἤ

$$y(x) = y(0)\cos ax+A\sin ax+\frac{\sin bx}{a^2-b^2}, \tag{61}$$

ὅπου

$$A = \frac{1}{a}\left(y^{(1)}(0)+\frac{b}{b^2-a^2}\right). \tag{62}$$

Παράδειγμα 8. Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τό Κεφ. 21, § 21.11, ἡ μέθοδος τῶν μετασχηματισμῶν Laplace δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἐπωφελῶς εἰς συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς. Τοῦτο διευκρινίζεται ὑπό τοῦ κάτωθι παραδείγματος.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned}(D^2+2)y-x &= 0\\ (D^2+2)x-y &= 0\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

ὅπου x καί y εἶναι αἱ ἐξηρτημέναι μεταβληταί καί $D \equiv \frac{d}{dt}$, t παριστῶν τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν. Λαμβάνοντες τόν μετασχηματισμόν Laplace ἑκάστης ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}p^2\bar{y}(p)-py(0)-y^{(1)}(0)+2\bar{y}(p)-\bar{x}(p) &= 0\\ p^2\bar{x}(p)-px(0)-x^{(1)}(0)+2\bar{x}(p)-\bar{y}(p) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

ὅπου, ὡς συνήθως, x(0), y(0) εἶναι αἱ τιμαί τῶν x καί y διά t=0 καί $x^{(1)}(0)$, $y^{(1)}(0)$ αἱ τιμαί τῶν πρώτων παραγώγων τῶν x καί y διά t = 0.

Χάριν ἁπλότητος ὑποθέτομεν τάς ἀρχικάς συνθήκας x(0) = 0, y(0) = 0, $x^{(1)}(0) = y^{(1)}(0) = 0$. Τότε ἡ (64) γίνεται

$$\left.\begin{aligned}(p^2+2)\bar{y}(p)-\bar{x}(p) &= 0,\\ (p^2+2)\bar{x}(p)-\bar{y}(p) &= 2p\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Ἀπαλείφοντες τόν $\bar{y}(p)$ ἀπό τάς δύο αὐτάς ἀλγεβρικάς ἐξισώσεις λαμβάνομεν

$$\bar{x}(p) = \frac{2p(p^2+2)}{(p^2+1)(p^2+3)} \tag{66}$$

Δι᾽ἀντιστροφῆς τούτου μέ τήν μέθοδον τῶν μερικῶν κλασμάτων εὑρίσκομεν

$$x(t) = \cos t+\cos\sqrt{3}t \tag{67}$$

Ὁμοίως δι᾽ἀπαλοιφῆς τοῦ $\bar{x}(p)$ ἀπό τήν (65) τελικῶς λαμβάνομεν

$$y(t) = \cos t-\cos\sqrt{3}t. \tag{68}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 23

1. Ἐπαληθεύσατε τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα

$$(\alpha)\ L\{a+bx\} = \frac{ap+b}{p^2},$$

$$(\beta)\ L\{x^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

$$(\gamma)\ L\{x \cos ax\} = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2},$$

$$(\delta)\ L\{e^{ax}x^{-\frac{1}{2}}(1+2ax)\} = \frac{p\sqrt{\pi}}{(p-a)^{3/2}}.$$

2. Ὑπολογίσατε τόν $L^{-1}\{f(p)\}$ ὅταν ὁ $\bar{f}(p)$ ἔχη τάς κατωτέρω μορφάς

(α) $\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+2)}$, (β) $\dfrac{1}{p(p-1)^3}$.

3. Ἐπιλύσατε τάς κατωτέρω ἐξισώσεις χρησιμοποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν Laplace

(α) $(D^2+4D+8)y = \cos 2x$, δοθέντος ὅτι $y = 2$ καί $\dfrac{dy}{dx} = 1$ ὅταν $x = 0$

(β) $$(D+1)y+Dz = 0,$$
$$(D-1)y+2Dz = e^{-x},$$

δοθέντος ὅτι $y = \dfrac{1}{2}$ καί $z = 0$ ὅταν $x = 0$.
(Εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις $D \equiv \dfrac{d}{dx}$).

4. Ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι

$$L\left\{\int_0^\infty f(x,u)\,du\right\} = \int_0^\infty L\{f(x,u)\}\,du,$$

ὅπου x εἶναι μία παράμετρος, δείξατε ὅτι

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\,du = \frac{\pi}{2},$$

καί ὅτι

$$\int_0^\infty \cos(xu^2)\,du = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{4\sqrt{(\pi x)}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{8x}\right)},$$

χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμα τοῦ Προβλήματος 9, Κεφ. 18.

5. Τό συνελικτικόν θεώρημα λέγει ὅτι ὑπό ὡρισμένας συνθήκας

$$L\left\{\int_0^x f(x-y)g(y)\,dy\right\}=\bar{f}(p)\bar{g}(p),$$

ὅπου $\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$ καί $\bar{g}(p) = L\{g(x)\}$.

Δείξατε χρησιμοποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν Laplace ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(D^2+4)y=f(x),$$

ὅπου f(x) εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις καί ὅπου $y(0) = 1$ $y^{(1)}(0) = 1$, γίνεται

$$\bar{y}(p)=\frac{p+1}{p^2+4}+\frac{\bar{f}(p)}{p^2+4}.$$

Ὅθεν, χρησιμοποιοῦντες τό συνελικτικόν θεώρημα, δείξατε ὅτι

$$y(x)=\cos 2x+\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{2}\int_0^x f(x')\sin 2(x-x')\,dx',$$

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 24.

ΜΕΡΙΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

24.1. Εἰσαγωγή

Ἐξίσωσις περιέχουσα μερικούς διαφορικούς συντελεστάς (μερικάς παραγώγους) καλεῖται μερική διαφορική ἐξίσωσις,ἡ τάξις τῆς ὁποίας εἶναι ἴση (κατ'ἀναλογίαν πρός τάς συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις) πρός τήν τάξιν τῆς ἀνωτάτης τάξεως μερικῆς παραγώγου ἡ ὁποία ἐμφανίζεται εἰς τήν ἐξίσωσιν. Ἐπί παραδείγματι, αἱ ἐξισώσεις

$$3y^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{2}$$

(ὅπου $f(x,y)$ εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις) εἶναι τυπικαί μερικαί διαφορικαί ἐξισώσεις πρώτης καί δευτέρας τάξεως, ἀντιστοίχως, αἱ x καί y εἶναι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί καί u ἡ πρός εὕρεσιν συνάρτησις. Ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις εἶναι γραμμικαί ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι ἡ u καί αἱ παράγωγοί της ἐμφανίζονται μόνον εἰς τόν πρῶτον βαθμόν καί γινόμενα τῆς u καί τῶν παραγώγων αὐτῆς δέν ἐμφανίζονται. Μία τυπική μή γραμμική ἐξίσωσις μέ δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς εἶναι ἡ

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u^2. \tag{3}$$

Δέν θά ἀσχοληθῶμεν ἐδῶ μέ ἐξισώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς (3). Ἐν γένει, ἡ λύσις μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων εἶναι πολύ περισσό - τερον δύσκολος ἀπό τήν λύσιν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων καί ἐκτός ὡρισμένων εἰδικῶν περιπτώσεων γενική μέθοδος ἐπιλύσεως μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων δέν ὑπάρχει. Εἰς τό κεφάλαιον αὐτό θά ὑποδείξωμεν τόν τρόπον ἐπιλύσεως ὡρισμένων ἁπλῶν γραμμικῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (αἱ ὁποῖαι οὐχ ἧττον παρουσιάζουν φυσικόν ἐνδιαφέρον).

Εἴδομεν ἤδη εἰς τό Κεφ. 21 ὅτι ἡ γενική λύσις μιᾶς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως περιέχει αὐθαιρέτους σταθεράς. Ἡ γενική λύσις ὅμως μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως περιέχει ἐν γένει αὐθαιρέτους συναρτήσεις. Πρός διασαφήνισιν τοῦ σημείου αὐτοῦ, θεωρήσωμεν τό ἀντίστροφον πρόβλημα τοῦ σχηματισμοῦ μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ἐκ δοθεισῶν συναρτήσεων.

Ἐπί παραδείγματι, ἐάν

$$u = yf(x), \tag{4}$$

ὅπου f(x) εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς x, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x), \tag{5}$$

καί συνεπῶς ἀπαλείφοντες τήν f(x) ἐκ τῶν (4) καί (5) λαμβάνομεν τήν πρώτης τάξεως μερικήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = u. \tag{6}$$

Ἑκάστη συνάρτησις u τῆς ἀνωτέρω μορφῆς (4) εἶναι ὡς ἐκ τούτου λύσις τῆς(6) ἀνεξαρτήτως τῆς μορφῆς τῆς f(x). Ὁμοίως ἐάν

$$u = f(x+y) + g(x-y), \tag{7}$$

ὅπου f(x+y), g(x-y) εἶναι αὐθαίρετοι συναρτήσεις ὡς πρός x+y καί x-y, ἀντιστοίχως, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+y) + g'(x-y), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+y) + g''(x-y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x+y)-g'(x-y), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x+y)+g''(x-y), \tag{11}$$

ὅπου οἱ τόνοι ὑποδηλοῦν παραγώγισιν ὡς πρός τήν ἀνάλογον ἀνεξάρτητον μεταβλητήν (x+y ἤ x-y). Ὅθεν ἀπαλείφοντες τάς αὐθαιρέτους συναρτήσεις δι'ἐξισώσεως τῶν (9) καί (11) λαμβάνομεν τήν δευτέρας τάξεως μερικήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{12}$$

Ἡ συνάρτησις u ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς (7) ἱκανοποιεῖ τήν (12) ἀνεξαρτήτως τῶν συναρτησιακῶν μορφῶν τῶν f(x+y) καί g(x-y).

Εἰς ἀμφότερα τά παραδείγματα ἡ τάξις τῆς προκυπτούσης μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν τῶν αὐθαιρέτων συναρτήσεων τάς ὁποίας περιλαμβάνει ἡ ἀρχική ἔκφρασις τῆς u. Αὐτό φαίνεται νά ὑποδεικνύῃ ὅτι (κατ'ἀναλογίαν πρός τάς συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις) ἡ γενική λύσις μιᾶς n τάξεως μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως θά περιέχῃ ἀκριβῶς n αὐθαιρέτους συναρτήσεις. Ἄν καί αὐτό δέν συμβαίνει πάντοτε, εἶναι ἕνας παραδεκτός ὁρισμός τῆς γενικῆς λύσεως μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως διά τήν κατηγορίαν τῶν ἐξισώσεων τάς ὁποίας ἐξετάζομεν εἰς τό κεφάλαιον τοῦτο (γραμμικάς μέ σταθερούς συντελεστάς).Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς φυσικά προβλήματα τά ὁποῖα μᾶς ὁδηγοῦν εἰς μερικάς διαφορικάς ἐξισώσεις αἱ αὐθαίρετοι συναρτήσεις αἱ ἐμφανιζόμεναι εἰς τήν λύσιν πρέπει συνήθως νά ἐκλέγωνται οὕτως ὥστε νά ἱκανοποιοῦν ὡρισμένας συνθήκας, τάς καλουμένας συνοριακάς συνθήκας, αἱ ὁποῖαι ὑπαγορεύονται ἐκ τοῦ ὑπό ἐπίλυσιν προβλήματος.

24.2. Ἐξισώσεις Δευτέρας Τάξεως μέ Σταθερούς Συντελεστάς

Μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2f\frac{\partial u}{\partial x}+2g\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \tag{13}$$

ὅπου α, h, b, f, g καί c εἶναι σταθεραί, εἶναι μία γραμμική ἐξίσωσις δευτέρας τάξεως μέ σταθερούς συντελεστάς ὡς πρός δύο μεταβλητάς (x καί y). Διά συγκρίσεως μέ τήν γενικήν κωνικήν ἐξίσωσιν

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0 \tag{14}$$

λέγομεν ὅτι ἡ (13) εἶναι

$$\left.\begin{array}{l}\text{ἐλλειπτικῆς}\\ \text{παραβολικῆς}\\ \text{ὑπερβολικῆς}\end{array}\right\} \quad \text{μορφῆς ὅταν} \quad \begin{cases}ab-h^2>0,\\ ab-h^2=0,\\ ab-h^2<0.\end{cases} \tag{15}$$

Ἐπί παραδείγματι ἡ ἐξίσωσις τοῦ Laplace μέ δύο μεταβλητάς (βλ. Κεφ. 9, § 9.4).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{16}$$

λαμβάνεται ἐκ τῆς (13) θέτοντες α = 1, h = 0, b = 1, f = g = c = = 0 καί, ἐπειδή $ab-h^2 > 0$, εἶναι ἐλλειπτικῆς μορφῆς. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{17}$$

(ὅπου k εἶναι μία πραγματική σταθερά) δύναται νά ληφθῆ ἐκ τῆς (13) θέτοντες α = 1, h = 0, $b = -k^2$, f= g = c = 0. Ὅθεν, ἐπειδή $ab-h^2 = -k^2 < 0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὑπερβολικῆς μορφῆς. Ὅμως ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{18}$$

εἶναι παραβολικῆς μορφῆς ἐπειδή α = 1, h = 0, b = 0, $g = -\frac{1}{2}k$, f = c = 0 καί $ab-h^2 = 0$.

Ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον ἡ μορφή τῆς γενικῆς λύσεως δοθείσης μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως μετά σταθερῶν συντελεστῶν (τῆς μορφῆς (13)) ἐξαρτᾶται πολύ ἐκ τοῦ κατά πόσον ἡ ἐξίσωσις αὐτή εἶναι ἐλλειπτικῆς, παραβολικῆς ἤ ὑπερβολικῆς μορφῆς.

24.3. Ἡ Ἐξίσωσις τοῦ Euler

Ἡ ἐξίσωσις

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{19}$$

ὅπου a,h καί b εἶναι σταθεράι, εἶναι μία εἰδική περίπτωσις τῆς (13) (λαμβανομένη ἐάν τεθῆ f = g = c = 0) καί εἶναι γνωστή ὡς ἐξίσωσις τοῦ Euler. Ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δύναται νά εὑρεθῆ ὡς ἀκολούθως.

Πρῶτον ὁρίζομεν δύο νέας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς ξ καί η διά τῶν γραμμικῶν σχέσεων

$$\left.\begin{aligned}\xi&=px+qy,\\ \eta&=rx+sy,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ὅπου p,q,r καί s εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Τότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=p\frac{\partial u}{\partial \xi}+r\frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=q\frac{\partial u}{\partial \xi}+s\frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(p\frac{\partial}{\partial \xi}+r\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(p\frac{\partial u}{\partial \xi}+r\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{23}$$

$$=p^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2pr\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(q\frac{\partial}{\partial \xi}+s\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(q\frac{\partial u}{\partial \xi}+s\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{25}$$

$$=q^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2sq\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+s^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{26}$$

καί

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(p\frac{\partial}{\partial \xi}+r\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(q\frac{\partial u}{\partial \xi}+s\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{27}$$

$$=pq\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(rq+sp)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+rs\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{28}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (19) τάς ἐκφράσεις τῶν δευτέρας τάξεως μερικῶν παραγώγων εὑρίσκομεν

$$(ap^2+bq^2+2hpq)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\{apr+bsq+h(rq+sp)\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}$$
$$+(ar^2+bs^2+2hrs)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \tag{29}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγομεν τάς αὐθαιρέτους σταθεράς p,q,r,s οὕτως ὥστε p = r = 1 αἱ δέ q,s νά εἶναι αἱ δύο ρίζαι X_1 καί X_2 τῆς ἐξισώσεως

$$a+2hX+bX^2=0. \tag{30}$$

Συνεπῶς ἡ (29) γίνεται

$$\{a+h(X_1+X_2)+bX_1X_2\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}=0. \tag{31}$$

Ἐπειδή ὅμως, ἐκ τοῦ Κεφ. 14, § 14.2 (T.1),

$$\begin{aligned} X_1+X_2 &= -\frac{2h}{b}, \\ X_1X_2 &= \frac{a}{b}, \end{aligned} \tag{32}$$

ἡ (31) γράφεται

$$\frac{2}{b}(ab-h^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}=0. \tag{33}$$

Ὅθεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ (19) δέν εἶναι παραβολική ἤτοι $ab-h^2 \neq 0$, ἡ (33) δίδει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}=0, \tag{34}$$

ἡ ὁποία δι'ἀπ'εὐθείας ὁλοκληρώσεως μᾶς δίδει τήν γενικήν λύσιν

$$u=F(\xi)+G(\eta), \tag{35}$$

ὅπου F καί G εἶναι αὐθαίρετοι συναρτήσεις. Συνεπῶς ἐφ'ὅσον $\xi = x+X_1y$, $\eta = x+X_2y$ (X_1 καί X_2 εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς (30)) ἡ γενική λύσις τῆς (19) (ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δέν εἶναι παραβολικῆς μορφῆς) εἶναι

$$u=F(x+X_1y)+G(x+X_2y). \tag{36}$$

Τέλος παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (30) ὅτι τό εἶδος τῶν ριζῶν X_1 καί X_2, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τήν λύσιν, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κατά πόσον ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὑπερβολική ἤ ἐλλειπτική· τῷ ὄντι, ἐάν $ab-h^2 < 0$ (ὑπερβολική) αἱ X_1 καί X_2 εἶναι πραγματικαί ἐνῶ ὅταν $ab-h^2 > 0$ (ἐλλειπτική) αἱ X_1 καί X_2 εἶναι ἀναγκαστικῶς μιγαδικοί.

Ὅταν ἡ (19) εἶναι παραβολικῆς μορφῆς ($ab-h^2 = 0$), ἡ γενική λύσις εὑρίσκεται ἐκ τῆς (29) θέτοντες $p = 1$ καί (πρός στιγμήν) ἀφήνοντες τά q, r καί s αὐθαίρετα. Τότε

$$(a+bq^2+2hq)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\{ar+bsq+h(rq+s)\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + (ar^2+bs^2+2hrs)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta} = 0. \tag{37}$$

Ἐάν τό q ἐκλεγῇ ὡς ρίζα τῆς

$$a+bq^2+2hq = 0 \tag{38}$$

τότε, ἀφοῦ $ab-h^2 = 0$ ἐξ ὑποθέσεως,

$$q = -\frac{h}{b} \ (\text{διπλῆ}) \tag{39}$$

Ὅθεν, δυνάμει τῆς (38), ὁ πρῶτος ὅρος τῆς (37) εἶναι μηδέν. Ὁμοίως ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι μηδέν ἐπειδή ἐκ τῆς (39)

$$ar+bsq+h(rq+s) = (ab-h^2)\frac{r}{b} = 0. \tag{40}$$

Συνεπῶς ἡ (37) γίνεται (ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι τά r καί s δέν εἶναι ἀμφότερα μηδέν)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \tag{41}$$

Δι' ἀπ' εὐθείας ὁλοκληρώσεως ἡ γενική λύσις τῆς (41) εἶναι ἡ

$$u = F(\xi)+\eta G(\xi), \tag{42}$$

ὅπου πάλιν αἱ F καί G εἶναι αὐθαίρετοι συναρτήσεις. Ὅθεν, ἐπειδή $p = 1$, $q = -\frac{h}{b}$ ($=X$, ἔστω), ἔχομεν ἐκ τῆς (20)

$$\begin{aligned} \xi &= x+Xy, \\ \eta &= rx+sy, \end{aligned} \tag{43}$$

ὅπου r καί s εἶναι αὐθαίρετοι (ἀλλ' ὄχι ἀμφότεραι μηδέν). Ἡ λύσις (42) εἶναι λοιπόν

$$u = F(x+Xy)+(rx+sy)G(x+Xy), \tag{44}$$

ἡ ὁποία εἶναι κατά ταῦτα ἡ γενική λύσις τῆς (19) ὅταν $ab-h^2 = 0$.

Διευκρινίζομεν τώρα τά ἀποτελέσματα αὐτά διά τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Laplace μέ δύο μεταβλητάς

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{45}$$

εἶναι εἰδική περίπτωσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Euler λαμβανομένη ἐάν θέσωμεν $a = b = 1$ καί $h = 0$. Ὅθεν ἡ (30) γίνεται

$$1+X^2=0 \tag{46}$$

δίδουσα $X_1 = i$ καί $X_2 = -i$. Ἐκ τῆς (36) ἡ γενική λύσις τῆς (45) εἶναι

$$u = F(x+iy)+G(x-iy). \tag{47}$$

Ἡ ἐμφάνισις φανταστικῶν ποσοτήτων εἰς τήν (47) εἶναι σύμφωνος μέ τόν ἐλλειπτικόν χαρακτῆρα τῆς (45).

Ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ λύσεις τῆς (45) πρέπει νά ἔχουν τήν μορφήν τῆς (47), ἀξίζει νά ἴδωμεν πῶς ἡ λύσις

$$u = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{48}$$

ἡ εὑρεθεῖσα εἰς τό Κεφ. 9, Παράδειγμα 6, δύναται νά γραφῇ κατ' αὐτόν τόν τρόπον. Χρησιμοποιοῦντες μιγαδικούς ἀριθμούς καί θέτοντες $z = re^{i\theta} = x+iy$, ἔχομεν $\tan^{-1}(y/x) = \theta$ καί

$$\frac{z}{\bar z}=\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}=e^{2i\theta}. \tag{49}$$

Ἄρα

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{2i}\log_e z-\frac{1}{2i}\log_e \bar z \tag{50}$$

$$=\frac{1}{2i}\log_e(x+iy)-\frac{1}{2i}\log_e(x-iy), \tag{51}$$

ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς (47), ὡς ἐζητεῖτο.

Παράδειγμα 2. Ἡ ἐξίσωσις

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{52}$$

εἶναι ὑπερβολικῆς μορφῆς ἐπειδή $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$, $b = 1$ καί ὡς ἐκ τούτου $ab-h^2 < 0$. Ἐκ τῆς (30) ἔχομεν

$$2+3X+X^2=0, \tag{53}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $X_1 = -1$, $X_2 = -2$.

Ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (52) εἶναι

$$u=F(x-y)+G(x-2y). \tag{54}$$

Παράδειγμα 3. Ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{55}$$

εἶναι παραβολικῆς μορφῆς ἐπειδή $a = 1$, $h = 2$, $b = 4$ καί $ab-h^2=0$. Ἐκ τῆς (38) εὑρίσκομεν

$$1+4X+4X^2=0$$

ἤ

$$X=-\tfrac{1}{2}\ (\text{διπλῆ}). \tag{56}$$

Ὅθεν ἐκ τῆς (42) ἡ γενική λύσις τῆς (55) εἶναι

$$u=F(x-\tfrac{1}{2}y)+(rx+sy)G(x-\tfrac{1}{2}y), \tag{57}$$

ὅπου r καί s εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Τελικῶς σημειώνομεν ὅτι ἡ γενική λύσις τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως Euler

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y), \tag{58}$$

ὅπου $f(x,y)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις εὑρίσκεται διά τῆς μεθόδου τοῦ τελεστοῦ D, κατά τρόπον παρόμοιον τοῦ χρησιμοποιηθέντος εἰς τό Κεφ. 21 διά συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις. Πάντως, δέν θά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν μέθοδον αὐτήν ἐδῶ.

24.4. Διαχωρισμός Μεταβλητῶν

Ἄν καί ἀπό τήν ἄποψιν ἑνός καθαροῦ μαθηματικοῦ εἶναι ἱκανοποιητική ἡ δυνατότης εὑρέσεως γενικῆς λύσεως μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, τοιαῦται λύσεις εἶναι μικρᾶς ἀξίας προκειμένου νά ἐπιβάλωμεν συνοριακάς συνθήκας ἐπί τῆς λύσεως. Ἐπί παραδείγματι, εἶναι συνήθως κάπως δύσκολον νά ἐκλέξωμεν τάς συναρτήσεις F καί G τῆς λύσεως (βλ. (47)) τῆς

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{59}$$

οὕτως ὥστε ἡ ἐξίσωσις νά πληροῦται ἐντός τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπό τῶν εὐθειῶν $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, $y = b$ καί ἡ u νά λαμβάνη προκαθωρισμένας τιμάς ἐπί τοῦ συνόρου τῆς περιοχῆς.

Πρός ὑπερνίκησιν τῆς δυσκολίας αὐτῆς εἶναι προτιμώτερον νά εὕρωμεν μίαν ὀλιγώτερον γενικήν μορφήν λύσεως κατευθυνομένην ἀπό τό εἶδος τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν τάς ὁποίας θέλομεν ἐπιβάλει. Μία μέθοδος ἐπιτεύξεως τούτου βασίζεται εἰς τήν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ λύσις εἶναι γινόμενον συναρτήσεων ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει μόνον μίαν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν. Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Θά διασαφήσωμεν τήν χρῆσιν τῆς μεθόδου αὐτῆς θεωροῦντες τάς λύσεις τριῶν ἐξισώσεων αἱ ὁποῖαι εἶναι σημαντικαί εἰς τήν φυσικήν καί αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν δεδομένας συνοριακάς συνθήκας. Αἱ τρεῖς αὐταί ἐξισώσεις εἶναι

(α) ἡ μονοδιάστατος ἐξίσωσις κύματος

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{60}$$

(β) ἡ μονοδιάστατος ἐξίσωσις τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητος (καί διαχύσεως)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{61}$$

καί

(γ) ἡ ἐξίσωσις Laplace εἰς δύο διαστάσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{62}$$

Εἰς τάς ἀνωτέρω ἐξισώσεις αἱ c καί k εἶναι φυσικαί σταθεραί, αἱ x καί y εἶναι αἱ μεταβληταί χώρου ἑνός συστήματος Καρτεσιανῶν συντεταγμένων καί t εἶναι ἡ μεταβλητή χρόνου. Ἡ φυσική ἔννοια τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς u εἶναι βεβαίως διάφορος εἰς ἑκάστην ἐξίσωσιν.

(α) Ἡ ἐξίσωσις κύματος

Παράδειγμα 4. Θά εὕρωμεν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{63}$$

ἡ ὁποία εἶναι περιοδική ὡς πρός x καί t, καί ἱκανοποιεῖ τάς συνοριακάς συνθήκας

$$u(0, t)=u(l, t)=0, \quad t \geqq 0, \tag{64}$$

$$u(x, 0)=f(x), \quad 0 \leqq x \leqq l, \tag{65}$$

$$\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0}=g(x), \quad 0 \leqq x \leqq l, \tag{66}$$

ὅπου f καί g εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις καί ℓ δοθεῖσα σταθερά.

Ὑποθέτομεν μίαν λύσιν τῆς (63) τῆς μορφῆς

$$u(x, t)=X(x)T(t), \tag{67}$$

ὅπου X εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x μόνον καί T εἶναι μία συνάρτησις τοῦ t μόνον. Κατ᾽αὐτόν τόν τρόπον ἡ (63) γίνεται

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2}. \tag{68}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἱκανοποιεῖται ἐάν γράψωμεν

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=-\frac{w^2}{c^2} \tag{69}$$

καί

$$\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2}=-w^2, \tag{70}$$

ὅπου w εἶναι τυχών πραγματικός ἀριθμός. Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι περιοδικαί, ὡς πρέπει, ἕνεκα τῶν ἀρνητικῶν προσήμων εἰσαχθέντων εἰς τάς (69) καί (70), καί ἔχουν τάς γνωστάς μορφάς

$$X(x)=A\cos\frac{wx}{c}+B\sin\frac{wx}{c}, \tag{71}$$

$$T(t)=C\cos wt+D\sin wt, \tag{72}$$

ὅπου A,B,C καί D εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Ὅθεν ἡ (67) γίνεται

$$u(x,t)=\left(A\cos\frac{wx}{c}+B\sin\frac{wx}{c}\right)(C\cos wt+D\sin wt), \tag{73}$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν (63) δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν σταθερῶν A, B, C,D καί w.

Πρέπει τώρα νά ἱκανοποιήσωμεν τάς συνοριακάς συνθήκας (64) -(66). Πρός τοῦτο πρῶτον θέτομεν x = 0 εἰς τήν (73). Ἡ συνοριακή συνθήκη u(0,t) = 0(t≧0) τότε δίδει

$$0=A(C\cos wt+D\sin wt) \tag{74}$$

δι'ὅλα τά t, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται

$$A=0. \tag{75}$$

Δεύτερον, θέτοντες x = ℓ εἰς τήν (73), ἡ συνθήκη u(ℓ,t) = 0(t>0) δίδει (χρησιμοποιοῦντες τήν (75))

$$0=B\sin\frac{wl}{c}(C\cos wt+D\sin wt). \tag{76}$$

Ὅμως, ἐπειδή ἡ B δέν δύναται νά ἐξισωθῇ πρός τό μηδέν χωρίς νά κάμνη καί τήν u(x,t) ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἡ (76) δύναται νά ἱκανοποιηθῇ (δι'ὅλα τά t) μόνον ὅταν

$$\sin\frac{wl}{c}=0. \tag{77}$$

Ὅθεν

$$w=\frac{r\pi c}{l}\quad \text{ὅπου}\quad r=1,2,3\ldots \tag{78}$$

(ἡ περίπτωσις r = 0 ἡ ὁποία δίδει w = 0, ἀποκλείεται ἐπειδή πάλιν κάμνει τήν u(x,t) ἐκ ταυτότητος μηδέν). Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία διακεκριμένων τιμῶν τοῦ w (αἱ ἰδιοτιμαί) καί ὅτι εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς w ἀντιστοιχεῖ μία μερική λύσις (ἡ ἰδιοσυνάρτησις). Πράγματι, θέτοντες τήν (75) καί τήν (78) εἰς τήν (73) ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = \dfrac{\pi c}{l}, u_1(x,t) = \sin\dfrac{\pi x}{l}\left(C_1 \sin\dfrac{\pi c t}{l} + D_1 \cos\dfrac{\pi c t}{l}\right), \\ w_2 = \dfrac{2\pi c}{l}, u_2(x,t) = \sin\dfrac{2\pi x}{l}\left(C_2 \sin\dfrac{2\pi c t}{l} + D_2 \cos\dfrac{2\pi c t}{l}\right), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ w_r = \dfrac{r\pi c}{l}, u_r(x,t) = \sin\dfrac{r\pi x}{l}\left(C_r \sin\dfrac{r\pi c t}{l} + D_r \cos\dfrac{r\pi c t}{l}\right), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} \tag{79}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς· αἱ $C_1, C_2, C_3, \ldots C_r, D_1, D_2, \ldots D_r, \ldots$ εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Ἑκάστη τῶν ἐκφράσεων αὐτῶν διά τήν u(x,t) εἶναι μερική λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύματος (63) ἱκανοποιοῦσα τάς συνοριακάς συνθήκας (64). Τώρα ἐπειδή ἡ (63) εἶναι γραμμική ἐξίσωσις, ἕκαστος γραμμικός συνδυασμός μερικῶν λύσεων εἶναι ἐπίσης λύσις. Ἐπομένως, λαμβάνομεν τόν γραμμικόν συνδυασμόν

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r \sin\frac{r\pi c t}{l} + D_r \cos\frac{r\pi c t}{l}\right)\sin\frac{r\pi x}{l} \tag{80}$$

ὡς γενικήν λύσιν τῆς (63) ἱκανοποιοῦσαν τάς συνοριακάς συνθήκας (64). Αἱ αὐθαίρετοι σταθεραί C_r καί D_r εἰς τήν λύσιν πρέπει νά ἐκλεγοῦν ὥστε νά πληροῦνται αἱ συνοριακαί συνθῆκαι διά $t = 0$ (ἤτοι, αἱ (65) καί (66)).

Θεωρήσωμεν πρῶτον τήν (65), ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{81}$$

Ἐν συνεχείᾳ θέτοντες $t = 0$ εἰς τήν (80) ἔχομεν

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r \sin\frac{r\pi x}{l}. \tag{82}$$

Ὁμοίως ἡ (66), ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ

$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = g(x), \quad 0 \leqq x \leqq l, \tag{83}$$

ἱκανοποιεῖται διά παραγωγίσεως τῆς (80) ὡς πρός t καί μετά θέτοντες t = 0. Τοιουτοτρόπως

$$g(x) = \frac{\pi c}{l} \sum_{r=1}^{\infty} r C_r \sin \frac{r\pi x}{l} \tag{84}$$

Οἱ συντελεσταί C_r καί D_r δύνανται νά προσδιορισθοῦν ἐκ τῆς (88) καί (84) διά τῆς τεχνικῆς τῶν σειρῶν Fourier (βλ. Κεφ. 20). Συνεπῶς

$$D_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{r\pi x}{l}\, dx \tag{85}$$

καί

$$C_r = \frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{r\pi x}{l}\, dx, \tag{86}$$

ὅπου r = 1,2,3,... .

Τέλος ἀντικαθιστῶντες τήν (85) καί (86) εἰς τήν (80), ἔχομεν τήν λύσιν

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x') \sin \frac{r\pi x'}{l}\, dx' \right) \sin \frac{r\pi ct}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} \right\} \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(x') \sin \frac{r\pi x'}{l}\, dx' \right) \cos \frac{r\pi ct}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} \right\}, \end{aligned} \tag{87}$$

ὅπου ἔχομεν συμβολίσει διά x΄τήν μεταβλητήν τῆς ὁλοκληρώσεως πρός διάκρισιν ἀπό τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν x.

Ἡ μέθοδος διαχωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν δύναται εὐκόλως νά ἐπεκταθῇ εἰς τήν λύσιν τῆς κυματικῆς ἐξισώσεως δύο καί τριῶν διαστάσεων

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{88}$$

Μολαταῦτα δέν εἶναι πάντοτε εὔκολον ἤ ἐπιθυμητόν νά λύσωμεν τάς ἐξισώσεις αὐτάς χρησιμοποιοῦντες σύστημα Καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν ἡ λύσις τῆς κυματικῆς ἐξισώσεως ζητεῖται ἐντός μιᾶς περιοχῆς τριῶν διαστάσεων μέ σφαιρικήν συμμετρίαν, τότε εἶναι συνήθως προτιμώτερον νά χρησιμοποιήσωμεν σφαιρικάς συντεταγμένας (r,θ,ϕ). Ὁμοίως ἡ λύσις ἐντός περιοχῆς μέ κυλινδρικήν συμμετρίαν εὑρίσκεται εὐκολώτερον χρησιμοποιοῦντες κυλινδρικάς συντεταγμένας (r,ϕ,z). Οἱονδήποτε σύστημα συντεταγμένων καί ἄν ἐκλεγῇ ὁ τελεστής Laplace ∇^2 πρέπει πάντοτε νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων (βλ. Κεφ.9,§9.11 καί Κεφ. 13, § 13.8, Τ.1).

(β) Ἡ ἐξίσωσις ἀγωγιμότητος θερμότητος.

Παράδειγμα 5. Θά εὕρωμεν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{89}$$

ἡ ὁποία φθίνει ἐκθετικῶς μετά τοῦ t καί ἱκανοποιεῖ τάς συνοριακάς συνθήκας

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\geqq 0, \tag{90}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\leqq x\leqq l, \tag{91}$$

ὅπου f εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις καί ℓ εἶναι μία σταθερά. Ὑποθέτοντες (ὡς εἰς τό Παράδειγμα 4) μία λύσιν τῆς μορφῆς

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{92}$$

καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (89), εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt}. \tag{93}$$

Ὅθεν θέτοντες

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-w^2, \tag{94}$$

$$\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt}=-w^2, \tag{95}$$

ὅπου w εἶναι τυχών πραγματικός ἀριθμός (τό ἀρνητικόν πρόσημον εἰς τήν (95) ἐξασφαλίζει ἐκθετικῶς φθίνουσαν λύσιν ὡς πρός t), ἔχομεν

$$X = A\cos wx + B\sin wx, \tag{96}$$

καί

$$T = Ce^{-w^2kt}, \tag{97}$$

ὅπου A,B καί C εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Θέτοντες τήν (96) καί (97) εἰς τήν (92) εὑρίσκομεν

$$u(x,t) = (A'\cos wx + B'\sin wx)e^{-w^2kt}, \tag{98}$$

ὅπου A΄ καί B΄ εἶναι νέαι αὐθαίρετοι σταθεραί. Ἵνα ἱκανοποιηθοῦν αἱ συνοριακαί συνθῆκαι (90), πρῶτον θέτομεν x = 0 εἰς τήν (98). Συνεπῶς

$$0 = A'e^{-w^2kt} \tag{99}$$

δι'ὅλα τά t, τό ὁποῖον συνεπάγεται

$$A' = 0. \tag{100}$$

Δεύτερον θέτοντες x = ℓ εἰς τήν (98) εὑρίσκομεν (χρησιμοποιοῦντες τήν (100))

$$0 = (B'\sin wl)e^{-w^2kt}, \tag{101}$$

ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς μή τετριμμένας λύσεις ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι

$$\sin wl = 0. \tag{102}$$

Ὅθεν

$$w = \frac{r\pi}{l} \text{ ὅπου } r = 1, 2, 3 \ldots \tag{103}$$

(ἡ περίπτωσις r = 0 πάλιν ἀποκλείεται ὥστε νά ἀποφευχθῇ ὁ ἐκ ταυτότητος μηδενισμός τῆς u(x,t)). Θέτοντες τάς (100) καί (103) εἰς τήν (98) λαμβάνομεν τήν κάτωθι ἀπειρίαν ἰδιοτιμῶν καί τῶν ἀντιστοίχων ἰδιοσυναρτήσεων

$$\left.\begin{array}{llll}
w_1 = \dfrac{\pi}{l}, & u_1(x,t) = & B_1'e^{-\pi^2kt/l^2} & \sin\dfrac{\pi x}{l}, \\
w_2 = \dfrac{2\pi}{l}, & u_2(x,t) = & B_2'e^{-4\pi^2kt/l^2} & \sin\dfrac{2\pi x}{l}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
w_r = \dfrac{r\pi}{l}, & u_r(x,t) = & B_r'e^{-r^2\pi^2kt/l^2} & \sin\dfrac{r\pi x}{l}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right\} \tag{104}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς· αἱ B_1', B_2',... B_r' εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

'Εν συνεχείᾳ, λαμβάνομεν τόν γραμμικόν συνδυασμόν τῶν λύσεων (104), ἤτοι τήν

$$u(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty} B_r' e^{-r^2\pi^2kt/l^2}\sin\frac{r\pi x}{l} \tag{105}$$

ὡς τήν γενικήν λύσιν τῆς (89) ἱκανοποιοῦσαν τάς συνοριακάς συνθήκας (90), ὅπου αἱ σταθεραί B_r' πρέπει νά ἐκλεγοῦν ὥστε νά ἱκανοποιοῦν τήν ἀπομένουσαν συνοριακήν συνθήκην (91).

Ὅθεν θέτοντες t = 0 εἰς τήν (105) ἔχομεν

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty} B_r'\sin\frac{r\pi x}{l}, \tag{106}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται, χρησιμοποιοῦντες τήν τεχνικήν τῶν σειρῶν Fourier, ὅτι

$$B_r'=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx. \tag{107}$$

Ἡ λύσις τῆς (89) ὑπό τάς συνοριακάς συνθήκας (90) καί (91) εἶναι λοιπόν ἡ

$$u(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x')\sin\frac{r\pi x'}{l}\,dx'\right)e^{-r^2\pi^2kt/l^2}\sin\frac{r\pi x}{l}\right\}, \tag{108}$$

ὅπου x΄ ἐγράφη ὡς μεταβλητή ὁλοκληρώσεως πρός ἀποφυγήν συγχύσεως μετά τῆς x.

Ὅμοιαι παρατηρήσεις πρός ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἔγιναν εἰς τό τέλος τοῦ Παραδείγματος 4 σχετικῶς μέ τήν λύσιν τῆς κυματικῆς ἐξισώσεως δύο ἤ τριῶν διαστάσεων ἰσχύουν ἐξ ἴσου καί εἰς τήν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων μεταφορᾶς τῆς θερμότητος εἰς δύο ἤ τρεῖς διαστάσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{109}$$

(γ) Ἡ ἐξίσωσις Laplace εἰς δύο διαστάσεις.

Παράδειγμα 6. Θά εὕρωμεν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{110}$$

ἡ ὁποία εἶναι περιοδική ὡς πρός x ἐντός τῆς ὀρθογωνίου περιοχῆς τῆς ὁριζομένης ὑπό τῶν $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq b$ καί ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τάς συνοριακάς συνθήκας

$$u(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{ὅταν } x=0, \quad 0 \leqq y \leqq b, \\ 0 & \text{ὅταν } x=a, \quad 0 \leqq y \leqq b, \\ 0 & \text{ὅταν } y=b, \quad 0 \leqq x \leqq a, \\ f(x) & \text{ὅταν } y=0, \quad 0<x<a. \end{cases} \tag{111}$$

Γράφοντες

$$u(x, y)=X(x) Y(y) \tag{112}$$

ἡ (110) γίνεται

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2}+\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2}=0. \tag{113}$$

Ὅθεν θέτοντες

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2}=-w^2 \text{ (διά περιοδικάς λύσεις)} \tag{114}$$

καί

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2}=+w^2, \tag{115}$$

ὅπου w εἶναι τυχών πραγματικός ἀριθμός, ἔχομεν

$$X=A \cos w x+B \sin w x, \tag{116}$$

$$Y=C \cosh w y+D \sinh w y, \tag{117}$$

ὅπου A,B,C καί D εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Συνεπῶς ἡ (112) γίνεται

$$u(x, y)=(A \cos w x+B \sin w x)(C \cosh w y+D \sinh w y). \tag{118}$$

Διά νά ἱκανοποιῆ ἡ λύσις αὐτή τήν πρώτην συνοριακήν συνθήκην τῆς (111) πρέπει νά ἔχωμεν (θέτοντες x = 0)

$$0=A(C \cosh w y+D \sinh w y), \quad (0 \leqq y \leqq b) \tag{119}$$

ἤ

$$A=0. \tag{120}$$

Ὁμοίως ἡ δευτέρα συνοριακή συνθήκη ἀπαιτεῖ (διά μή τετριμμένας λύσεις)

$$\sin wa = 0, \tag{121}$$

ἤ

$$w = \frac{r\pi}{a} \quad \text{ὅπου } r = 1, 2, 3 \ldots. \tag{122}$$

Ὁμοίως ἡ τρίτη συνοριακή συνθήκη τῆς (111) δίδει (θέτοντες y=b εἰς τήν (118))

$$0 = (A \cos wx + B \sin wx)(C \cosh wb + D \sinh wb) \tag{123}$$

εἰς τό $0 \leqq x \leqq \alpha$, ἤ

$$\frac{C}{D} = -\tanh wb. \tag{124}$$

Ὅθεν θέτοντες τάς (120), (122) καί (123) εἰς τήν (118) εὑρίσκομεν τό κατωτέρω ἀπειροσύνολον χαρακτηριστικῶν τιμῶν καί ἀντιστοίχων χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = \dfrac{\pi}{a},\ u_1(x, y) = E_1 \sin \dfrac{\pi x}{a} \sinh \dfrac{\pi(b-y)}{a}, \\ w_2 = \dfrac{2\pi}{a},\ u_2(x, y) = E_2 \sin \dfrac{2\pi x}{a} \sinh \dfrac{2\pi(b-y)}{a}, \\ \vdots \\ w_r = \dfrac{r\pi}{a},\ u_r(x, y) = E_r \sin \dfrac{r\pi x}{a} \sinh \dfrac{r\pi(b-y)}{a}, \\ \vdots \end{array}\right\} \tag{125}$$

ὅπου $E_1, E_2, \ldots E_r$ εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ὡς προηγουμένως λαμβάνομεν γραμμικόν συνδυασμόν τῶν μερικῶν αὐτῶν λύσεων

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} E_r \sin \frac{r\pi x}{a} \sinh \frac{r\pi(b-y)}{a} \tag{126}$$

ὡς γενικήν λύσιν τῆς (110) ἱκανοποιοῦσαν τάς πρώτας τρεῖς συνοριακάς συνθήκας τῆς (111). Αἱ σταθεραί E_r εἰς τήν λύσιν ταύτην πρέπει νά ἐκλεγοῦν ὥστε νά ἱκανοποιοῦν τήν τετάρτην καί τελευταίαν συνοριακήν συνθήκην τῆς (111). Ὅθεν θέτοντες y = 0 εἰς τήν

(126) ἔχομεν

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} E_r \sinh \frac{r\pi b}{a} \sin \frac{r\pi x}{a}, \tag{127}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$E_r \sinh \frac{r\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \frac{r\pi x}{a}\, dx. \tag{128}$$

Συνεπῶς ἀντικαθιστῶντες τήν (128) εἰς τήν (126) ἡ τελική λύσις τῆς (110) ὑπό τάς συνοριακάς συνθήκας (111) εἶναι

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{a} \int_0^a f(x') \sin \frac{r\pi x'}{a}\, dx' \right) \frac{\sin \frac{r\pi x}{a} \sinh \frac{r\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{r\pi b}{a}} \right\}, \tag{129}$$

ὅπου, ὡς καί πρότερον, ἡ x΄ εἶναι ἡ μεταβλητή τῆς ὁλοκληρώσεως.

Παράδειγμα 7. Εἰς τά Παραδείγματα 4 καί 5 αἱ συνοριακαί τιμαί διά x = 0 καί x = ℓ ἐλήφθησαν ὡς μηδέν. Ἐξετάζομεν τώρα τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως μεταφορᾶς θερμότητος

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial t}$$

ὑπό τάς συνοριακάς συνθήκας

$$u(0,t) = u_0, \qquad t \leq 0$$
$$u(\ell,t) = u_1, \qquad t \geq 0$$

καί

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq \ell$$

ὅπου u_0, u_1, k καί ℓ εἶναι δεδομέναι σταθεραί ἡ δέ f(x) δεδομένη συνάρτησις.

Γράφοντες

$$u(x,t) = \upsilon(x) + w(x,t)$$

καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (130) εὑρίσκομεν

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = 0$$

καί

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}$$

μετά τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν (ἀπό τάς (131), (132), (133) καί (134))

$$\upsilon(0) = u_0, \ \upsilon(\ell) = u_1 \tag{137}$$

καί

$$w(0,t) = 0, \quad w(\ell,t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{138}$$

$$w(x,0) = f(x)-\upsilon(x) \qquad 0 \leq x \leq \ell \tag{139}$$

Λύοντες τήν (135) ὑπό τάς συνοριακάς συνθήκας (137) ἔχομεν

$$\upsilon(x) = u_0+\frac{x}{\ell}(u_1-u_0). \tag{140}$$

Ἡ συνάρτησις w(x,t) πρόκειται νά εὑρεθῇ τώρα ἀπό τήν (136) ὑπό τάς συνοριακάς συνθήκας (138) καί (139). Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συνοριακαί αὐταί συνθῆκαι ἔχουν μηδενικά εἰς τά δεξιά μέλη καί συνεπῶς ἡ λύσις ὡς πρός w(x,t) ἀκολουθεῖ τήν μέθοδον τοῦ Παραδ. 5 . Ὅθεν (συγκρίνοντες μέ τήν (105))

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r e^{-r^2\pi^2 kt/l^2} \sin\frac{r\pi x}{l} \tag{141}$$

ὅπου τώρα

$$B_r = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left[f(x)-\upsilon(x)\right]\sin\frac{r\pi x}{\ell}\,dx \tag{142}$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left[f(x)-u_0-\frac{x}{\ell}(u_1-u_0)\right]\sin\frac{r\pi x}{\ell}\,dx \tag{143}$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{r\pi x}{\ell}\,dx+\frac{2}{r}\left[(-1)^r u_1-u_0\right] \tag{144}$$

ὅπου $r = 1,2,3\ldots$.

Ἡ λύσις τῆς (130) ὑπό τάς (131)-(133) προκύπτει λοιπόν διά προσθέσεως τῶν (140) καί (141) ὅτε λαμβάνομεν τήν u(x,t) αἱ δέ B_r

δίδονται ἀπό τήν (144). Ὅταν τά u_1 καί u_0 εἶναι μηδέν ἡ λύσις καθίσταται ἡ αὐτή μέ τήν (108) τοῦ Παραδ. 5.

24.5. Ἄλλαι Μέθοδοι Ἐπιλύσεως

Ἐκτός τῆς μεθόδου διαχωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν τήν ὁποίαν ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω, διά τήν λύσιν γραμμικῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ὑπάρχουν καί ἄλλαι γνωσταί μέθοδοι. Εἰδικώτερον ἡ μέθοδος μετασχηματισμοῦ Laplace (ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη εἰς τό Κεφ. 23 διά τήν λύσιν συνήθων γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς) δύναται νά χρησιμοποιηθῇ εἰς τήν λύσιν γραμμικῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς. Μολαταῦτα δέν θά ἀναπτύξωμεν τήν μέθοδον ταύτην ἐδῶ. Ὑπενθυμίζεται ὅτι,ἐν γένει, εἶναι δύσκολος ἄν μή ἀδύνατος ἡ ἐπίλυσις μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀναλυτικῶς, καί ὅτι, ἐξαιρέσει ἁπλῶν περιπτώσεων , αἱ ἀριθμητικαί μέθοδοι (numerical methods)εἶναι αἱ καλύτεραι, ἐάν ὄχι αἱ μόναι,μέθοδοι διά τήν εὕρεσιν λύσεως πληρούσης δεδομένας συνοριακάς συνθήκας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 24

1. Ἀπαλείψατε τάς αὐθαιρέτους συναρτήσεις ἐκ τῶν κατωτέρω,λαμβάνοντες μερικάς διαφορικάς ἐξισώσεις τῶν ὁποίων αἱ γενικαί λύσεις εἶναι

$$(a)\ u=f(x+y),\ (b)\ u=f(xy),$$
$$(c)\ u=f(x+y)+g(x-y),\ (d)\ u=x^n f(y/x).$$

2. Καθορίσατε τό εἶδος ἑκάστης τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων (ἤτοι ἄν εἶναι ἐλλειπτικαί, παραβολικαί ἤ ὑπερβολικαί) καί εὕρετε τάς γενικάς αὐτῶν λύσεις

$$(a)\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$(b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$(c)\ 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3. Μία συνάρτησις Z(r,t) ἱκανοποιεῖ τήν

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Z}{\partial r}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2},$$

ὅπου c εἶναι μία σταθερά. Εἰσάγοντες τήν νέαν ἐξηρτημένην μεταβλητήν W = rZ καί τάς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς u = r+ct καί υ = r−ct ἀναγάγετε τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν εἰς τήν $\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial \upsilon}=0$. Ὅθεν δείξατε ὅτι ἡ γενική λύσις Z εἶναι τῆς μορφῆς

$$Z=\frac{U+V}{r},$$

ὅπου ἡ U εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ r+ct μόνον καί ἡ V εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ r−ct μόνον. (C.U.)

4. Ἐάν ἡ V = [Ar+(B/r)]f(θ), ὅπου A καί B εἶναι σταθεραί, ἱκανοποιῇ τήν ἐξίσωσιν

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0,$$

εὕρετε τήν μορφήν τῆς συναρτήσεως f(θ).

5. Εὕρετε τήν σχέσιν μεταξύ τῶν σταθερῶν w καί α οὕτως ὥστε ἡ

$$V=Ae^{\alpha x}\sin(wt+\alpha x)+Be^{-\alpha x}\sin(wt-\alpha x)$$

νά ἀποτελῇ λύσιν τῆς

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=2\frac{\partial V}{\partial t},$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθεραί.

Εὕρετε A καί B ὅταν V = 2sint μέ x = 0 δοθέντος ὅτι α > 0, καί V → 0 καθώς x → ∞ . (L.U.)

6. Ἡ συνάρτησις V(x,y) ἱκανοποιεῖ τήν μερικήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial V}{\partial y}.$$

'Εάν V = XY ὅπου ἡ X ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν x καί Y ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν y καί V = cos2x διά y = 0, εὕρετε τήν V δι'ὅλα τά x,y.
(L.U.)

7. 'Υποθέτοντες μίαν λύσιν τῆς μορφῆς V = X(x)T(t) τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2}{a}\frac{\partial V}{\partial t} + V,$$

εὕρετε τήν V ὑπό τάς κατωτέρω συνθήκας

(i) V = 0 ὅταν x = ℓ δι'ὅλα τά t.

(ii) $\frac{\partial V}{\partial x} = -Ce^{-\alpha t}$ ὅταν x = 0, δι'ὅλα τά t,

α,C εἶναι δοθεῖσαι σταθεραί.

"Οθεν δείξατε ὅτι $\frac{\partial V}{\partial x} = -Ce^{-\alpha t}\cos(\ell - x)\sec\ell$ δι'ὅλα τά x,t.
(L.U.)

8. Εὕρετε τήν συνήθη διαφορικήν ἐξίσωσιν τήν ἱκανοποιουμένην ὑπό τῆς f(r) ἐάν ἡ (1/r)f(r)coswt εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ὅπου w καί c εἶναι σταθεραί.

"Οθεν δείξατε ὅτι ἡ λύσις τῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$u = \frac{1}{r}(A\cos nr + B\sin nr)\cos wt,$$

ὅπου n = w/c καί A,B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Εὕρετε τήν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία πρέπει νά ἱκανοποιῆται ὑπό τῆς w, δοθέντος ὅτι (i) ἡ u εἶναι πεπερασμένη διά r = 0 δι'ὅλα τά t , (ii) ∂u/∂r = 0 διά r = α δι'ὅλα τά t, (iii) ἡ u δέν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.
(L.U.)

9. Δείξατε ὅτι ἡ λύσις τῆς

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

εἰς τήν περιοχήν $0 \leqq x \leqq \alpha$, $0 \leqq y \leqq \alpha$ μέ $V = 0$ κατά μῆκος τῶν γραμμῶν $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$ καί $V = V_0$(=σταθερά) κατά μῆκος τῆς $y = \alpha$ εἶναι ἡ

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{cosech}(2r+1)\pi}{2r+1} \sinh(2r+1)\frac{\pi y}{a} \sin(2r+1)\frac{\pi x}{a} \right\}.$$

10. Εὕρετε τήν γενικήν μορφήν τῶν περιοδικῶν λύσεων ὡς πρός t τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + V - 4\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Ἐάν, διά $x = 0$, $V = V_0\sin 3t$, δείξατε ὅτι διά $x = 1$, ἡ V ταλαντοῦται μεταξύ (περίπου) $\pm 0.135V_0$. **(L.U.)**

11. Εὕρετε ὅλας τάς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

τῆς μορφῆς $z = (A\cos kx + B\sin kx)f(y)$, ὅπου A,B καί k εἶναι σταθεραί. Εὕρετε λύσιν τῆς ἐξισώσεως διά τήν ὁποίαν $z = 0$ ὅταν $x = 0$· $z = 0$ ὅταν $x = \pi$· $z = x$ ὅταν $y = 1$. **(L.U.)**

12. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

(ὅπου k εἶναι σταθερά) ἔχει λύσεις τῆς μορφῆς

$$V = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-kr^2 t}(A_r \cos rx + B_r \sin rx),$$

ὅπου A_r, B_r εἶναι σταθεραί.

Αἱ ἀρχικαί συνθῆκαι εἶναι

$$V(x, 0) = \frac{2V_0 x}{a}, \quad (0 \leqq x \leqq a/2)$$

$$V(x, 0) = 0, \quad (a/2 < x \leqq a)$$

καί $V(0,t) = V(\alpha,t) = 0$ ὅπου V_0 καί α εἶναι σταθεραί.

Εὕρετε τήν μορφήν τῆς σειρᾶς Fourier ἡ ὁποία δίδει τήν V. **(L.U.)**

13. Δείξατε ὅτι ἡ

$$V = J_0(kr)\cos(kct+\alpha)$$

εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right\},$$

ὅπου k,c καί α εἶναι σταθεραί. (Ἡ J_0 εἶναι ἡ συνάρτησις Bessel μηδενικῆς τάξεως· βλ.Κεφ. 22, § 22.3).

14. Δείξατε ὅτι ἡ

$$u(x,t) = A\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{(kt)}}\right)$$

εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

ὅπου A καί k εἶναι σταθεραί. (Διά τόν ὁρισμόν τῆς συναρτήσεως σφάλματος erfx, ἰδέ Κεφ. 18, § 18.5).

15. Ἡ κατανομή θερμότητος T(x,t) κατά μῆκος λεπτῆς ράβδου μήκους α πληροῖ τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \alpha),$$

ὅπου R εἶναι σταθερά, t παριστᾶ χρόνον καί x εἶναι ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ ἑνός ἄκρου. Εὕρετε τήν T(x,t) ἐάν ἡ ράβδος εἶναι μονωμένη εἰς ἕκαστον ἄκρον καί ἡ ἀρχική κατανομή δίδεται ὑπό τῆς

$$T(x,0) = 2T_0\cos^2(\pi x/\alpha),$$

ὅπου T_0 εἶναι σταθερά. Δείξατε ὅτι τελικῶς ἡ ράβδος ἀποκτᾶ ὁμοιόμορφον θερμοκρασίαν T_0. **(L.U.)**

16. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

ὅπου R εἶναι σταθερά, ὑπό τάς ἀκολούθους συνθήκας

(α) ἡ θ εἶναι πεπερασμένη τοῦ $t \to \infty$ διά $0 < x < \alpha$

(β) $\theta = 100$ διά $x = 0,\ t > 0$

(γ) $\partial\theta/\partial x = 0$ διά $x = \alpha,\ t > 0$

(δ) $\theta = 100 + \sin\frac{\pi x}{2\alpha}$ διά $0 < x < \alpha,\ t > 0$.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 25.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

25.1. Εἰσαγωγή

Μία τῶν ἁπλῶν ἐφαρμογῶν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἶναι ὁ προσδιορισμός μεγίστων καί ἐλαχίστων. Ὁ λογισμός τῶν μεταβολῶν ἀσχολεῖται μέ παρόμοιον ἀλλά περισσότερον πολύπλοκον πρόβλημα, τό τῆς μεγιστοποιήσεως ἤ ἐλαχιστοποιήσεως ὁλοκληρώματος. Ἵνα ἴδωμεν ἀκριβέστερον τήν σημασίαν αὐτοῦ θεωροῦμεν τό ἀκόλουθον ἁπλοῦν γεωμετρικόν πρόβλημα τό ὁποῖον θά λυθῇ ἀργότερον εἰς τό κεφάλαιον αὐτό. Ἔστωσαν $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ δύο δοθέντα σημεῖα εἰς σύστημα Καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ἐπιθυμοῦμεν νά εὕρωμεν τήν ἐξίσωσιν καμπύλης συνδεούσης τά δύο σημεῖα καί τοιαύτης ὥστε ἡ καμπύλη αὐτή περιστρεφομένη περί τόν ἄξονα τῶν x νά σχηματίζῃ ἐπιφάνειαν ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ. Ἐάν $y(x)$ εἶναι τυχοῦσα καμπύλη συνδέουσα τά δύο σημεῖα καί ἐάν ds εἶναι ἕν ἀπειροστόν μῆκος τόξου, τότε τό ἐμβαδόν S τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης διά περιστροφῆς τῆς $y(x)$ κατά 2π ἀκτίνια περί τόν ἄξονα τῶν x δίδεται ὑπό τῆς

$$S = 2\pi \int_P^Q y(x)\, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx. \qquad (1)$$

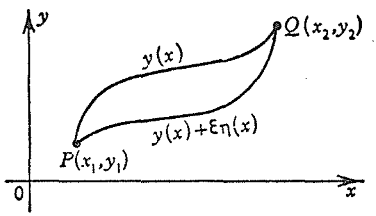
Ἐφ᾽ὅσον τό S εἶναι μία συνάρτησις τῆς συναρτήσεως y διά τοῦτο συνήθως καλεῖται συναρτησοειδές καί γράφεται $S[y]$· ὡς ἐκ τούτου τό πρόβλημα εἶναι νά εὕρωμεν μίαν συνάρτησιν y τοιαύτην ὥστε τό συναρτησοειδές $S[y]$ νά ἔχῃ ἐλαχίστην τιμήν. Τῷ ὄντι, αὐτό ἀποτελεῖ τυπικόν πρόβλημα τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν (ἤ τῆς θεωρίας τῶν συναρτησοειδῶν) ὅπου γενικός σκοπός εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν στασίμων τιμῶν ὁλοκληρώματος ὡς πρός συνάρτησιν. Παρ'ὅλον ὅμως ὅτι εἶναι σχετικῶς εὔκολον νά εὕρωμεν τάς ἀναγκαίας συνθήκας ἵνα ὁλοκλήρωμα εἶναι στάσιμον ὡς πρός συνάρτησιν εἶναι ἐν τούτοις πολύ δυσκολώτερον νά διαμορφώσωμεν ἱκανάς συνθήκας ἵνα στάσιμος τιμή εἶναι μέγιστον ἤ ἐλάχιστον. Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ τήν διαμόρφωσιν ἀναγκαίας συνθήκης ἵνα ὁλοκλήρωμα ἔχη μέγιστον ἤ ἐλάχιστον.

25.2. Ἡ Ἐξίσωσις τοῦ Euler

Τό πρόβλημα τό ὁποῖον θά ἐξετάσωμεν ἐδῶ εἶναι ἡ εὕρεσις συναρτήσεως y τοιαύτης ὥστε τό ὁλοκλήρωμα

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx \tag{2}$$

νά εἶναι στάσιμον, ὅπου $y' = dy/dx$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι παραγωγίσιμος συνάρτησις ὡς πρός τάς τρεῖς μεταβλητάς x, y καί y', καί ὅτι $y = y_1$ διά $x = x_1$, $y = y_2$ διά $x = x_2$ ὅπου x_1, x_2 εἶναι δοθέντα σταθερά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ y(x) εἶναι τυχοῦσα καμπύλη διερχομένη διά τῶν δύο σημείων (x_1,y_1), (x_2,y_2) (βλ. Σχ. 25.1)



Σχ. 25.1.

Ἔστω τώρα μικρή μεταβολή εἰς τήν συνάρτησιν y τοιαύτη ὥστε ἡ y(x) νά καθίσταται

$$y(x)+\varepsilon\eta(x), \tag{3}$$

ὅπου ε εἶναι μία μικρά παράμετρος καί η(x) εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις τοιαύτη ὥστε $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Προφανῶς, ἡ (3) παριστᾶ ἀπειρίαν καμπύλων διερχομένων ἀπό τά ἄκρα σημεῖα (x_1,y_1),(x_2,y_2) καί ἑκάστη καμπύλη χαρακτηρίζεται ἀπό μίαν συγκεκριμένην τιμήν τοῦ ε (βλ. Σχ. 25.1). Ἐάν συμβολίσωμεν μέ I^* τήν τιμήν τοῦ (2) κατά μῆκος αὐθαιρέτως μεταβαλλομένου δρόμου, τότε

$$\delta I = I^* - I = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta') - f(x, y, y')\}\, dx, \tag{4}$$

ὅπου οἱ τόνοι συμβολίζουν παραγώγισιν ὡς πρός x. Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι ἡ συνάρτησις f δύναται νά ἀναπτυχθῇ εἰς δυνάμεις τοῦ ε ἔχομεν (χρησιμοποιοῦντες τό ἀνάπτυγμα Taylor συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν)

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta') - f(x, y, y')\}\, dx$$

$$= \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} I_2 + \text{ ὅροι ὡς πρός } \varepsilon^3 \text{ καί ἀνωτέρας τάξεως} \tag{5}$$

ὅπου

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\right\} dx \tag{6}$$

καί

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right\} dx. \tag{7}$$

Συνεπῶς μέχρι πρώτης τάξεως ὡς πρός ε ἡ μεταβολή δI δίδεται ὑπό τῆς

$$\delta I = \varepsilon I_1. \tag{8}$$

Τό σημεῖον τῆς δI ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ε. Δηλαδή, ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος (2) δύναται νά αὐξάνῃ δι'ὡρισμένας μεταβολάς καί νά ἐλαττοῦται δι'ὡρισμένας ἄλλας. Ἵνα ὅμως τό ὁλοκλήρωμα ἔχῃ ἀληθές μέγιστον ἤ ἐλάχιστον πρέπει ὅλαι αἱ μεταβολαί νά ἐλαττοῦνται ἤ αὐξάνωνται ἀντιστοίχως. Τοῦτο δύναται νά ἐπιτευχθῇ ἄν ἐπιβληθῇ ἡ συνθήκη

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = 0, \tag{9}$$

ἡ ὁποία, κατόπιν ὁλοκληρώσεως τοῦ τελευταίου ὅρου κατά παράγοντας καί λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, δίδει

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}\eta\, dx = 0. \tag{10}$$

'Αφοῦ ἡ $\eta(x)$ εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις, ἡ (10) πληροῦται μόνον ἐάν

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{11}$$

Αὐτή εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ Euler ἡ ὁποία πρέπει νά πληροῦται ἐάν ἡ (2) ἔχη στάσιμον τιμήν. Ὑπάρχουν διάφοροι περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις Euler δύναται νά ἁπλοποιηθῆ, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω.

Περίπτωσις Ι. 'Εάν ἡ f εἶναι ἐκπεφρασμένως ἀνεξάρτητος τῆς (ἤτοι δέν περιέχει τήν) y, τότε $\partial f/\partial y = 0$ καί ἡ (11) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{12}$$

ἤ

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c, \tag{13}$$

ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά.

Περίπτωσις 2. 'Εάν ἡ f εἶναι ἐκπεφρασμένως ἀνεξάρτητος τῆς y', τότε $\partial f/\partial y' = 0$ καί ἡ (11) γίνεται

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

Περίπτωσις 3. 'Εάν ἡ f εἶναι ἐκπεφρασμένως ἀνεξάρτητος τῆς x, τότε χρησιμοποιοῦντες τήν ταυτότητα

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+y''\frac{\partial f}{\partial y'} \tag{15}$$

ἡ (11) δύναται νά γραφῆ

$$\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \tag{16}$$

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \tag{17}$$

ὅπου c εἶναι αὐθαίρετος σταθερά.

Τά κατωτέρω παραδείγματα ἐπεξηγοῦν τήν χρῆσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Euler.

Παράδειγμα 1. Ἵνα εὕρωμεν τήν στάσιμον τιμήν τοῦ

$$I = \int_A^B \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2yx - y^2 \right\} dx, \tag{18}$$

ὅπου A = (0,0), B = (π/2, π/2) εἰς τό xy-ἐπίπεδον, χρησιμοποιοῦμεν τήν ἐξίσωσιν Euler (11) καί λαμβάνομεν

$$2x - 2y - \frac{d}{dx}\left(2 \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{19}$$

ἤ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x. \tag{20}$$

Ἐπιλύοντες τήν (20) εὑρίσκομεν

$$y = x + C \cos x + D \sin x, \tag{21}$$

ὅπου C καί D εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Ἐκ τοῦ ὅτι ἡ καμπύλη διέρχεται διά τῶν ἄκρων σημείων A(0,0), B(π/2, π/2) εὑρίσκομεν

$$C = D = 0. \tag{22}$$

Συνεπῶς ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία καθιστᾶ τήν (18) στάσιμον εἶναι ἡ

$$y = x. \tag{23}$$

Ἡ στάσιμος τιμή τοῦ I ἔστω I_S, εὑρίσκεται δι'ἀντικαταστάσεως τῆς (23) εἰς τήν (18) καί ὁλοκληρώσεως. Τοῦτο δίδει

$$I_s = \int_{x=0}^{x=\pi/2} (1 + 2x^2 - x^2)\, dx \tag{24}$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\right). \tag{25}$$

Παράδειγμα 2. Ἐπανερχόμεθα εἰς τό πρόβλημα τοῦ ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ τό ὁποῖον ἀνεφέρθη εἰς τήν § 25.1. Διά νά εὕρωμεν τήν συνάρτησιν y ή όποία παράγει στάσιμον τιμήν διά τό

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\, dx, \tag{26}$$

πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ή ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις εἶναι ἐκπεφρασμένως ἀνεξάρτητος τῆς x. Συνεπῶς ή ἐξίσωσις Euler δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ὑπό τήν μορφήν (βλ. (17)).

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = c, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right). \tag{27}$$

Ἐπειδή $f(x,y') = y\sqrt{(1+y'^2)}$, ή (27) γίνεται

$$y\sqrt{(1+y'^2)} - \frac{yy'^2}{\sqrt{(1+y'^2)}} = c, \tag{28}$$

ή όποία ἁπλοποιεῖται εἰς τήν

$$c\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(y^2-c^2)}. \tag{29}$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}+d\right), \tag{30}$$

ὅπου c καί d εἶναι σταθεραί προσδιοριζόμεναι ἐκ τοῦ περιορισμοῦ ὅτι ή (30) διέρχεται διά τῶν ἄκρων σημείων (x_1,y_1), (x_2,y_2). Ἡ καμπύλη αὐτή καλεῖται ἁλυσοειδής (catenary).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 25

1. Εὕρετε τήν στάσιμον τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_A^B \left\{2y\sin x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx,$$

ὅπου A καί B εἶναι τά σημεῖα $(0,\pi)$ καί $(\pi,0)$ ἀντιστοίχως εἰς τό xy-ἐπίπεδον. (L.U.)

2. Εὕρετε τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Euler διά τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_A^B \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx,$$

ὅπου A = (0,0) καί B = (1,2) εἰς τό xy-ἐπίπεδον.

3. Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν Euler διά τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_A^B \left\{12xy+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx,$$

ὅπου A = (0,0) καί B = (1,1).

4. Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν Euler διά τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} dx$$

δοθέντος ὅτι y = 0 διά x = 0 καί y = 1 διά x = π/2.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 26.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

26.1. Ὁρισμοί

Ὑποθέσωμεν ὅτι τά $u_1, u_2, u_3, .., u_n$ εἶναι ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας. Εἰσάγομεν τόν τελεστήν διαφορᾶς Δ τοιοῦτον ὥστε τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐνεργείας τοῦ Δ ἐπί τοῦ u_r νά ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r, \tag{1}$$

ὅπου $r = 1,2,3,...,(u-1)$. Ὅθεν

$$\Delta u_1 = u_2 - u_1, \tag{2}$$

$$\Delta u_2 = u_3 - u_2, \tag{3}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Αἱ ἐκφράσεις αὐταί καλοῦνται συνήθως αἱ πρῶται πεπερασμέναι διαφοραί τῶν $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$. Κατά τόν αὐτόν τρόπον αἱ δεύτεραι πεπερασμέναι διαφοραί $\Delta^2 u$ ὁρίζονται δι'ἐπαναλήψεως τῆς πράξεως Δ οὕτως ὥστε

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_r = \Delta(\Delta u_r) = \Delta(u_{r+1} - u_r) &= (u_{r+2} - u_{r+1}) - (u_{r+1} - u_r) \\ &= u_{r+2} - 2u_{r+1} + u_r. \end{aligned} \tag{4}$$

Συνεπῶς

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1, \tag{5}$$

$$\Delta^2 u_2 = u_4 - 2u_3 + u_2, \tag{6}$$

....

....

Ἀνωτέρας τάξεως πεπερασμέναι διαφοραί $\Delta u_r, \Delta u_r, ..., \Delta^m u_r$ ὁρίζονται κατά παρόμοιον τρόπον.

Ἐξίσωσις ἡ ὁποία ἐκφράζει σχέσιν μεταξύ πεπερασμένων διαφορῶν $\Delta u_r, \Delta^2 u_r, ..., \Delta^m u_r$ καλεῖται διαφοροεξίσωσις, ἡ δέ τάξις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴση πρός τήν τῆς ἀνωτέρας τάξεως πεπερασμένην διαφοράν ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τήν ἐξίσωσιν. Ἐπί παραδείγματι, αἱ

$$\Delta u_r - 5u_r = 3, \tag{7}$$

$$\Delta^2 u_r - 3\Delta u_r + 2u_r = r^2, \tag{8}$$

$$\Delta^3 u_r + r\Delta u_r + 2^r u_r = 0, \tag{9}$$

εἶναι παραδείγματα διαφοροεξισώσεων αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως πρώτης, δευτέρας καί τρίτης τάξεως. Ἡ γενική γραμμική διαφοροεξίσωσις m τάξεως ἔχει τήν μορφήν

$$a_0\Delta^m u_r + a_1\Delta^{m-1}u_r + a_2\Delta^{m-2}u_r + \ldots + a_{m-1}\Delta u_r + a_m u_r = f(r), \tag{10}$$

ὅπου $f(r)$ καί $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τοῦ r. Κατ'ἀναλογίαν πρός τήν ὁρολογίαν τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἡ (10) καλεῖται ὁμογενής ὅταν $f(r) = 0$ καί μέ σταθερούς συντελεστάς ὅταν αἱ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ εἶναι ἀριθμοί ἀνεξάρτητοι τῆς r. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ (7) καί (8) εἶναι διαφοροεξισώσεις μέ σταθερούς συντελεστάς, ἐνῶ ἡ (9) εἶναι διαφοροεξίσωσις ὁμογενής μέ μεταβλητούς συντελεστάς.

Αἱ διαφοροεξισώσεις δύνανται πάντοτε νά γραφοῦν ὑπό μορφήν διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ u_r, δι'ἀντικαταστάσεως ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῶν $\Delta u_r, \Delta^2 u_r, \ldots$.

Ἐπί παραδείγματι, χρησιμοποιοῦντες τήν (1), ἡ ἐξίσωσις (7) γίνεται

$$u_{r+1} - 6u_r = 3, \tag{11}$$

ἐνῶ, χρησιμοποιοῦντες τάς (1) καί (4), ἡ (8) γίνεται

$$(u_{r+2} - 2u_{r+1} + u_r) - 3(u_{r+1} - u_r) + 2u_r = r^2 \tag{12}$$

ἤ

$$u_{r+2} - 5u_{r+1} + 6u_r = r^2. \tag{13}$$

Ὅταν γράφωνται ὑπό τήν μορφήν αὐτήν αἱ διαφοροεξισώσεις καλοῦνται ἀναγωγικαί σχέσεις. Μία πρώτης τάξεως διαφοροεξίσωσις εἶναι λοιπόν ἀναγωγική σχέσις μεταξύ δύο διαδοχικῶν τιμῶν τῆς ἀκολουθίας, τῶν u_r καί u_{r+1}, ἐνῶ μία δευτέρας τάξεως διαφοροεξίσωσις εἶναι σχέσις μεταξύ τριῶν διαδοχικῶν τιμῶν u_r, u_{r+1} καί u_{r+2}.

26.2. Σχηματισμός Διαφοροεξισώσεων

Τά ἀκόλουθα παραδείγματα διασαφηνίζουν τόν σχηματισμόν διαφοροεξισώσεων ἀπό ἐκφράσεις αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τό u_r ὡς συνάρτησιν τῆς r.

Παράδειγμα 1. Ἐάν

$$u_r = A4^r, \tag{14}$$

ὅπου A εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερά, τότε

$$u_{r+1} = A4^{r+1} = 4u_r. \tag{15}$$

Ὅθεν ἡ ἀπαλοιφή τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς A ὁδηγεῖ εἰς μίαν πρώτης τάξεως διαφορεξίσωσιν. Γενικώτερον ἐάν ἡ ἔκφρασις διά τήν u_r περιέχη m αὐθαιρέτους σταθεράς πρέπει νά ἱκανοποιῆ μίαν m τάξεως διαφοροεξίσωσιν. Μία ἐκτενεστέρα ἐπεξήγησις δίδεται εἰς τό κατωτέρω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2. Ἐάν

$$u_r = A + B3^r, \tag{16}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεράι, τότε

$$u_{r+1} = A + B3^{r+1}, \tag{17}$$

καί

$$u_{r+2} = A + B3^{r+2}. \tag{18}$$

Ὅθεν ἀπαλείφοντες τήν B ἀπό τάς (17) καί (18) χρησιμοποιοῦντες τήν (16) ἔχομεν

$$u_{r+1} = A + 3^{r+1}\left\{\frac{u_r - A}{3^r}\right\} = 3u_r - 2A, \tag{19}$$

καί

$$u_{r+2} = A + 3^{r+2}\left\{\frac{u_r - A}{3^r}\right\} = 9u_r - 8A. \tag{20}$$

Τελικῶς ἀπαλείφοντες τήν A ἐκ τῶν (19) καί (20) λαμβάνομεν

$$u_{r+2} - 4u_{r+1} + 3u_r = 0. \tag{21}$$

Συνεπῶς ἡ (16) ἡ ὁποία περιέχει δύο αὐθαιρέτους σταθεράς πρέπει νά ἱκανοποιῇ μίαν δευτέρας τάξεως διαφοροεξίσωσιν.

Πρέπει νά εἶναι ἤδη σαφές ὅτι, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τάς συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις, ἡ γενική λύσις μιᾶς m τάξεως γραμμικῆς διαφοροεξισώσεως πρέπει νά περιέχῃ m αὐθαιρέτους σταθεράς.

26.3. Ἐπίλυσις Διαφοροεξισώσεων

Ἡ πρώτη μορφή ἐξισώσεως τήν ὁποίαν θά ἐξετάσωμεν εἶναι ἡ ὁμογενής γραμμική πρώτης τάξεως

$$u_{r+1}-a_r u_r=0, \tag{22}$$

ὅπου a_r εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις τῆς r.

Θέτοντες r = 1,2,3,... εἰς τήν (22) ἔχομεν

$$u_2=a_1u_1, \tag{23}$$

$$u_3=a_2u_2=a_2a_1u_1, \tag{24}$$

$$u_4=a_3u_3=a_3a_2a_1u_1, \tag{25}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς, λαμβάνομεν δέ τελικῶς

$$u_r=a_{r-1}a_{r-2}\dots a_3a_2a_1u_1. \tag{26}$$

Ὅθεν ἐάν τό u_1 ἔχῃ γνωστήν τιμήν, ἔστω c, ἡ λύσις τῆς (22) γράφεται

$$u_r=c\prod_{p=1}^{r-1}a_p. \tag{27}$$

Ἵνα ἐπιλύσωμεν τήν μή ὁμογενῆ γραμμικήν πρώτης τάξεως ἐξίσωσιν

$$u_{r+1}-a_ru_r=b_r, \tag{28}$$

ὅπου a_r καί b_r εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις ὡς πρός r, ὁρίζομεν τήν γενικήν λύσιν τῆς (28) ὡς

$$u_r=v_r+w_r, \tag{29}$$

ὅπου v_r εἶναι ἡ γενική λύσις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$v_{r+1}-a_rv_r=0, \tag{30}$$

καί ὅπου w_r εἶναι ἡ μερική λύσις τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$w_{r+1}-a_rw_r=b_r. \tag{31}$$

(Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν χρησιμοποιηθεῖσαν διά τήν ἐπίλυσιν συνήθων γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· βλ. Κεφ. 21, § 21.4). Τά κατωτέρω παραδείγματα ἐπεξηγοῦν τάς μεθόδους αὐτάς.

Παράδειγμα 3. Ἵνα ἐπιλύσωμεν τήν ὁμογενῆ ἐξίσωσιν

$$u_{r+1}-4^r u_r=0, \text{ μέ } u_1=2, \tag{32}$$

γράφομεν

$$u_2=4u_1, \tag{33}$$

$$u_3=4^2 . u_2=4^2 . 4 . u_1, \tag{34}$$

$$u_4=4^3 . u_3=4^3 . 4^2 . 4u_1, \tag{35}$$

καί οὕτω καθ'ἑξῆς.

Συνεπῶς

$$u_r=4^{r-1}4^{r-2} \ldots 4^3 . 4^2 . 4 . u_1$$

$$=2\prod_{p=1}^{p=r-1} 4^p=2(4^{[r(r-1)]/2}). \tag{36}$$

Παράδειγμα 4. Ἵνα ἐπιλύσωμεν τήν μή ὁμογενῆ ἐξίσωσιν

$$u_{r+1}-2u_r=r \tag{37}$$

χρησιμοποιοῦμεν τήν (29) ὅτε λαμβάνομεν τήν ὁμογενῆ

$$v_{r+1}-2v_r=0, \tag{38}$$

καί τήν μή ὁμογενῆ ἐξίσωσιν

$$w_{r+1}-2w_r=r. \tag{39}$$

Ἡ γενική λύσις τῆς (38) εἶναι ἐκ τῆς (27)

$$v_r=v_1 2^{r-1}, \tag{40}$$

ὅπου v_1 εἶναι αὐθαίρετος. Ὅθεν ἡ λύσις τῆς (37) ἐξαρτᾶται ἀπό τήν δυνατότητα νά εὕρωμεν μίαν λύσιν τῆς (39). Ἵνα ἐπιτύχωμεν τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν δοκιμαστικήν λύσιν τῆς μορφῆς

$$w_r=\alpha+\beta r, \tag{41}$$

ὅπου αἱ α καί β θά προσδιορισθοῦν ὥστε ἡ (41) νά ἱκανοποιῇ τήν (39) δι'ὅλα τά r. Ἀντικαθιστῶντες τήν (41) εἰς τήν (39) εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta(r+1))-2(\alpha+\beta r)=r, \tag{42}$$

ἡ ὁποία δίδει διά συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν

$\beta-\alpha=0$, (συντελεστής τοῦ r^0),

$-\beta=1$, (συντελεστής τοῦ r).

Ὅθεν $\alpha = \beta = -1$ καί ὡς ἐκ τούτου

$$w_r = -(1+r). \tag{43}$$

Συνεπῶς ἡ λύσις τῆς (37) εἶναι

$$u_r = v_1 2^{r-1} - (1+r). \tag{44}$$

Ἐάν ἐπιπροσθέτως δοθῇ ὅτι $u_1 = c$, τότε ἐκ τῆς (44)

$$c = v_1 - 2,$$

καί ἐξ αὐτῆς

$$u_1 = (2+c)2^{r-1} - (1+r). \tag{45}$$

Ὅπως ἀκριβῶς μέ τάς μή ὁμογενεῖς διαφορικάς ἐξισώσεις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λύσις μιᾶς μή ὁμογενοῦς διαφοροεξισώσεως ἐξαρτᾶται οὐσιαστικῶς ἀπό τήν ἐκλογήν καταλλήλου δοκιμαστικῆς συναρτήσεως διά τήν μερικήν λύσιν. Ἐπί τῇ βάσει πείρας ἡ ἐκλογή εἶναι εὔκολος δι'ἁπλᾶς ἐξισώσεις καί παρ'ὅλον ὅτι ὑπάρχει μία ἐναλλακτική μέθοδος ἡ ὁποία δέν ἀπαιτεῖ δοκιμαστικήν συνάρτησιν δέν ἔχει καί μεγάλην σημασίαν ἐδῶ.

Ἐν συνεχείᾳ, ἐρχόμεθα εἰς τήν δευτέραν μορφήν διαφοροεξισώσεως ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ τελευταία πρός συζήτησιν εἰς τό παρόν. Αὐτή εἶναι ἡ δευτέρας τάξεως ἐξίσωσις μέ σταθερούς συντελεστάς

$$a_0 u_{r+2} + a_1 u_{r+1} + a_1 u_r = f(r), \tag{46}$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ εἶναι ἀριθμοί ἀνεξάρτητοι τῆς r καί $f(r)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις τοῦ r. Ὅπως ἀκριβῶς μέ τήν πρώτης τάξεως ἐξίσωσιν, ἡ γενική λύσις τῆς (46) ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$u_r = v_r + w_r, \tag{47}$$

ὅπου v_r εἶναι ἡ γενική λύσις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$a_0 v_{r+2} + a_1 v_{r+1} + a_2 v_r = 0, \tag{48}$$

καί w_r εἶναι μία λύσις τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως

$$a_0 w_{r+2} + a_1 w_{r+1} + a_2 w_r = f(r). \tag{49}$$

Ὁμογενεῖς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (48) δύνανται πάντοτε νά λυθοῦν διά τῶν μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἀκολουθοῦνται εἰς τά κατωτέρω τρία παραδείγματα.

Παράδειγμα 5. Ἵνα ἐπιλύσωμεν τήν

$$u_{r+2}-5u_{r+1}+6u_r=0 \tag{50}$$

θέτομεν $u_r = x^r$ καί λαμβάνομεν

$$x^{r+2}-5x^{r+1}+6x^r=0 \tag{51}$$

ἤ

$$x^r(x^2-5x+6)=0. \tag{52}$$

Ὅθεν ὑποθέτοντες $x \neq 0$, ἡ (50) ἀνάγεται εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ὡς πρός x μέ ρίζας $x = 2$ καί $x = 3$.

Συνεπῶς αἱ

$$u_r=2^r \text{ καί } u_r=3^r \tag{53}$$

εἶναι ἀμφότεραι δυναταί λύσεις τῆς (50). Ἡ γενική λύσις εἶναι αὐθαίρετος γραμμικός συνδυασμός τῶν λύσεων αὐτῶν τῆς μορφῆς

$$u_r=A2^r+B3^r, \tag{54}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Αὐτό εἶναι σύμφωνον καί μέ τήν συνθήκην ὅτι ἡ λύσις μιᾶς δευτέρας τάξεως ἐξισώσεως πρέπει νά περιέχῃ δύο αὐθαιρέτους σταθεράς. Αἱ A καί B ὁρίζονται, βεβαίως, ὅταν δοθοῦν τιμαί εἰς δύο τυχόντας ὅρους τῆς ἀκολουθίας u_r, ἔστω τούς u_1 καί u_2.

Παράδειγμα 6. Ἵνα ἐπιλύσωμεν τήν

$$u_{r+2}-4u_{r+1}+5u_r=0 \tag{55}$$

πάλιν θέτομεν $u_r = x^r$ καί λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν

$$x^2-4x+5=0. \tag{56}$$

Ἐπειδή ἡ (56) δίδει $x = 2 \pm i$ γράφομεν

$$\left.\begin{aligned} 2+i&=Re^{i\theta},\\ 2-i&=Re^{-i\theta},\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

ὅπου

$$R=\sqrt{5}, \quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}. \tag{58}$$

Συνεπῶς αἱ δύο δυναταί λύσεις τῆς (55) εἶναι

$$u_r=(\sqrt{5}e^{i\theta})^r=5^{r/2}(\cos r\theta+i\sin r\theta), \tag{59}$$

καί

$$u_r = (\sqrt{5}e^{-i\theta})^r = 5^{r/2}(\cos r\theta - i\sin r\theta). \tag{60}$$

Ἡ γενική λύσις τῆς (55) εἶναι αὐθαίρετος γραμμικός συνδυασμός τῶν (59) καί (60) τῆς μορφῆς

$$u_r = A5^{r/2}(\cos r\theta + i\sin r\theta) + B5^{r/2}(\cos r\theta - i\sin r\theta), \tag{61}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ἡ ἀνωτέρω γράφεται ἀνετώτερον ὡς

$$u_r = 5^{r/2}\{C\cos r\theta + D\sin r\theta\}, \tag{62}$$

ὅπου C καί D εἶναι νέαι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Παράδειγμα 7. Εἰς μερικάς περιπτώσεις, ὅπως διά τήν ἐξίσωσιν

$$u_{r+2} - 6u_{r+1} + 9u_r = 0, \tag{63}$$

ἡ ἀντικατάστασις $u_r = x^r$ ὁδηγεῖ εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μέ ἴσας ρίζας. Ἐπί παραδείγματι, ἡ (63) γίνεται

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \tag{64}$$

ἡ ὁποία δίδει x = 3 (διπλῆ ρίζα).

Ὅθεν λαμβάνομεν μόνον μίαν ἀνεξάρτητον λύσιν τῆς (63), δηλαδή τήν $u_r = 3^r$. Συνεπῶς, ὅπως εἰς τάς διαφορικάς ἐξισώσεις, προσπαθοῦμεν νά εὕρωμεν μίαν ἄλλην λύσιν γράφοντες

$$u_r = v_r 3^r, \tag{65}$$

ὅπου v_r εἶναι συνάρτησις τῆς r.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (63) εὑρίσκομεν

$$v_{r+2} - 2v_{r+1} + v_r = 0, \tag{66}$$

τῆς ὁποίας ἡ λύσις εὐκόλως εὑρίσκεται ὅτι εἶναι

$$v_r = Ar + B, \tag{67}$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ὅθεν ἡ γενική λύσις τῆς (63) εἶναι (χρησιμοποιοῦντες τήν (65))

$$u_r = (Ar + B)3^r, \tag{68}$$

ἡ ὁποία περιέχει τόν ὀρθόν ἀριθμόν αὐθαιρέτων σταθερῶν.

Πράγματι ὁ ἀναγνώστης δύναται εὐκόλως νά ἐπαληθεύσῃ ὅτι ἐάν μία ὁμογενής δευτέρας τάξεως διαφοροεξίσωσις ὁδηγῇ εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μέ ἴσας ρίζας, ἔστω x = c, τότε ἡ γενική λύσις εἶναι πάντοτε

$$u_r = (Ar+B)c^r. \tag{69}$$

(Ὁ αὐτός παράγων ἐμφανίζεται εἰς παρομοίας περιπτώσεις κατά τήν λύσιν συνήθων γραμμικῶν δευτέρας τάξεως διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστάς).

Τελικῶς τό κατωτέρω παράδειγμα ἐπεξηγεῖ τήν μέθοδον ἐπιλύσεως μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως μέ σταθερούς συντελεστάς.

Παράδειγμα 8. Ἵνα λύσωμεν τήν

$$u_{r+2}-4u_{r+1}+3u_r = 1, \tag{70}$$

γράφομεν $u_r = v_r + w_r$ ὡς εἰς (47) καί λαμβάνομεν

$$v_{r+2}-4v_{r+1}+3v_r = 0, \tag{71}$$

καί

$$w_{r+2}-4w_{r+1}+3w_r = 1. \tag{72}$$

Συμφώνως πρός τό Παράδειγμα 5, ἡ λύσις τῆς (71) εὐκόλως φαίνεται ὅτι εἶναι ἡ

$$v_r = A3^r+B1^r = A3^r+B. \tag{73}$$

Ἡ λύσις τῆς (72) ἀπαιτεῖ καί πάλιν τήν χρῆσιν δοκιμαστικῆς συναρτήσεως. Θέτοντες

$$w_r = \alpha r, \tag{74}$$

καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (72) καί συγκρίνοντες τούς συντελεστάς, εὑρίσκομεν

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}. \tag{75}$$

Ὅθεν μία λύσις τῆς (72) (ἡ ὁποία καί μόνον ἐπαρκεῖ) εἶναι

$$w_r = -\frac{r}{2}. \tag{76}$$

Συνεπῶς ἡ γενική λύσις τῆς (70) εἶναι

$$u_r = A3^r+B-\frac{r}{2}. \tag{77}$$

Ὅπως εἰς τάς μή ὁμογενεῖς πρώτης τάξεως ἐξισώσεις, ἡ ὀρθή ἐκλογή δοκιμαστικῆς συναρτήσεως διά τήν εὕρεσιν μερικῆς λύσεως εἶναι εἰς μεγάλον βαθμόν ζήτημα κοινῆς λογικῆς καί πείρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 26

1. Λύσατε τάς ἐξισώσεις ὑπό τάς δεδομένας ἀρχικάς συνθήκας

(α) $u_{r+2}-5u_{r+1}+6u_r=0, \quad u_1=1, \quad u_2=3.$
(β) $u_{r+2}-2u_{r+1}+4u_r=0, \quad u_1=1, u_2=2.$
(γ) $4u_{r+2}-4u_{r+1}+u_r=2^r.$
(δ) $u_{r+1}-3u_r=4^r+r.$

2. Δείξατε ὅτι ἡ $u_r = 4^r/6$ εἶναι λύσις τῆς διαφοροεξισώσεως

$$u_{r+3}-6u_{r+2}+11u_{r+1}-6u_r=4^r,$$

καί εὕρετε τήν γενικήν λύσιν.

3. Δείξατε ὅτι ἡ γενική λύσις τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως

$$u_n-2(\cosh\alpha)u_{n-1}+u_{n-2}=0$$

δύναται νά γραφῇ ὡς

$$u_n=Ae^{(n+1)\alpha}+Be^{-(n+1)\alpha},$$

ὅπου A καί B εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Δείξατε ὅτι ἡ n τάξεως ὁρίζουσα

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} k & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & k & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & k & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & k & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & k \end{vmatrix}$$

(ὅπου $k = 2\cosh\alpha$) ἱκανοποιεῖ τήν ἀναγωγικήν σχέσιν.

Ἀποδείξατε ὅτι

$$\Delta_n=\frac{\sinh(n+1)\alpha}{\sinh\alpha}. \qquad \text{(C.U.)}$$

4. Ἐάν $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ἱκανοποιῇ τήν ἀναγωγικήν σχέσιν

$$u_{r+2}-2au_{r+1}+(a^2+\lambda^2)u_r=0,$$

$(r = 0,1,\ldots)$ καί $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ἀποδείξατε ὅτι διά $\lambda > 0$

$$u_n = \frac{1}{\lambda}(\alpha^2+\lambda^2)^{n/2}\sin\left(n\tan^{-1}\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

Εὕρετε τόν ἀντίστοιχον τύπον διά τό u_n, ὑποκείμενον εἰς τάς αὐτάς ἀρχικάς συνθήκας, ὅταν $\lambda = 0$. **(L.U.)**

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 27.

ΑΠΛΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

27.1. Εἴδη ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων

Εἰς ὡρισμένα προβλήματα δέν εἶναι ἀσύνηθες νά συναντήσωμεν ἐξισώσεις εἰς τάς ὁποίας ἡ ἄγνωστος συνάρτησις ἐμφανίζεται ὑπό τό σύμβολον τοῦ ὁλοκληρώματος. Τοιούτου εἴδους ἐξισώσεις καλοῦνται ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις καί εἶναι συνήθως δύσκολον νά λυθοῦν ἀναλυτικῶς. Δύο σπουδαῖα εἴδη ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τάς ὁποίας θά ἐξετάσωμεν κατωτέρω εἶναι α) ἡ γραμμική ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις τοῦ πρώτου εἴδους ὁριζομένη ὑπό

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)\,dy, \qquad (1)$$

καί β) ἡ γραμμική ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου εἴδους ὁριζομένη ὑπό

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x, y)u(y)\,dy, \quad (\lambda=\text{σταθερά}) \qquad (2)$$

Εἰς ἀμφοτέρας τάς ἐξισώσεις,u εἶναι ἡ ἄγνωστος συνάρτησις ἐνῶ αἱ συναρτήσεις f(x), K(x,y) καί τά ὅρια ὁλοκληρώσεως α καί b ὑποτίθενται γνωστά. Ἡ συνάρτησις K(x,y) καλεῖται πυρήν τῆς ἐξισώσεως.

Διάφοροι εἰδικαί μορφαί τῆς (1) καί (2) εἶναι γνωσταί μέ εἰδικά ὀνόματα. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν α καί b εἶναι σταθεραί, ἡ (2) καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ Fredholm καί καλεῖται ὁμογενής ἐάν f(x) = 0, ἐνῶ ἐάν α = 0, b = x (ἤτοι μεταβαλλόμενα ὅρια ὁλοκλη -

ρώσεως) ἡ (2) καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ Volterra (πάλιν ὁμογενής ἐάν $f(x) = 0$). Ἐάν ὅμως εἰς τάς (1) καί (2) τό a ἤ τό b ἤ ἀμφότερα εἶναι ἄπειρα ἤ ἐάν ὁ πυρήν $K(x,y)$ γίνεται ἄπειρος εἰς τήν περιοχήν ὁλοκληρώσεως ἡ ἐξίσωσις καλεῖται ἰδιάζουσα καί εἰδικαί τεχνικαί εἶναι ἀναγκαῖαι διά τήν λύσιν αὐτῆς.

Δέν εἶναι δυνατόν εἰς τό ἀνά χεῖρας νά εἰσέλθωμεν εἰς τήν γενικήν θεωρίαν τῶν διαφόρων εἰδῶν ἐξισώσεων ἀλλά τά κατωτέρω παραδείγματα διευκρινίζουν μερικάς μεθόδους εὑρέσεως ἀκριβῶν λύσεων ἁπλῶν τινων ἐξισώσεων. Πάντως ὁ ἀναγνώστης πρέπει νά ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του ὅτι αἱ ἁπλαῖ αὐταί μέθοδοι εἶναι κατ'ἀνάγκην περιοριστικαί καί ὅτι ὅταν ἀντιμετωπίζωμεν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν εἰς τήν πρᾶξιν μία ἀριθμητική μέθοδος εἶναι συνήθως ἡ καλυτέρα, ἐάν ὄχι ἡ μόνη, μέθοδος εὑρέσεως λύσεως.

27.2. Μερικαί Μέθοδοι Ἐπιλύσεως

Παράδειγμα 1. Ὅταν ὁ πυρήν $K(x,y)$ δύναται νά γραφῇ ὡς

$$K(x, y) = g(x)h(y), \tag{3}$$

ὅπου $g(x)$ καί $h(y)$ εἶναι ἀντιστοίχως συναρτήσεις τοῦ x μόνον καί τοῦ y μόνον, ἡ ἐξίσωσις Fredholm δύναται νά λυθῇ κατά τρόπον ἁπλοῦν. Τοῦτο προκύπτει ἐάν θέσωμεν τήν (3) εἰς τήν (2) καί λάβωμεν ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ $g(x)$ εἶναι σταθερά ὅσον ἀφορᾶ τήν ὁλοκλήρωσιν ὡς πρός y· ἐπομένως δύναται νά ἐξαχθῇ ἐκτός τοῦ συμβόλου τῆς ὁλοκληρώσεως καί ἔχομεν

$$u(x) = f(x) + \lambda g(x)\int_a^b h(y)u(y)\,dy. \tag{4}$$

Ὅθεν ἐπειδή

$$\int_a^b h(y)u(y)\,dy = C \text{ (=σταθερά)}, \tag{5}$$

ἔχομεν τήν λύσιν

$$u(x) = f(x) + \lambda C g(x). \tag{6}$$

Ἡ τιμή τῆς C δύναται νά εὑρεθῇ θέτοντες τήν (6) εἰς τήν (5).

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου αὐτῆς θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν

$$u(x) = \cosh x - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\int_0^1 xyu(y)\,dy \tag{7}$$

ἡ ὁποία εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἔχει τήν λύσιν

$$u(x) = \cosh x - \frac{x}{2} + \frac{Cx}{3}, \tag{8}$$

ὅπου

$$C = \int_0^1 yu(y)\,dy. \tag{9}$$

Ὅθεν ἐκ τῶν (8) καί (9) ἔχομεν

$$C = \int_0^1 y\left(\cosh y - \frac{y}{2} + \frac{Cy}{3}\right) dy, \tag{10}$$

ἡ ὁποία ἁπλοποιουμένη δίδει

$$C = \frac{15}{16} - \frac{9e^{-1}}{8}. \tag{11}$$

Συνεπῶς

$$u(x) = \cosh x - \frac{x}{2} + \left(\frac{5}{16} - \frac{3e^{-1}}{8}\right)x \tag{12}$$

$$= \cosh x - \frac{3}{16}(1 + 2e^{-1})x. \tag{13}$$

Παράδειγμα 2. Ἡ ὁμογενής ἐξίσωσις τοῦ Fredholm

$$u(x) = \lambda\int_0^{\pi/2} \sin x \sin y u(y)\,dy \tag{14}$$

ἔχει λύσιν μόνον δι'εἰδικήν τιμήν τῆς λ. Ἵνα εὕρωμεν τό λ (τήν χαρακτηριστικήν τιμήν) καί τήν ἀντίστοιχον λύσιν u (τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν) γράφομεν

$$u(x) = \lambda \sin x \int_0^{\pi/2} \sin y u(y)\,dy = C\lambda \sin x, \tag{15}$$

ὅπου

$$C = \int_0^{\pi/2} \sin y u(y)\,dy. \tag{16}$$

Ὅθεν θέτοντες τήν (15) εἰς τήν (16) ἔχομεν

$$C = C\lambda \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\, dy = \frac{C\pi\lambda}{4} \tag{17}$$

ἡ ὁποία, ὑποτιθεμένου ὅτι $C \neq 0$, δίδει $\lambda = 4/\pi$. Ἡ ἀντιστοιχοῦσα λύσις εἰς τήν τιμήν λ εἶναι (ἐκ τῆς (15))

$$u(x) = A \sin x, \tag{18}$$

ὅπου A εἶναι αὐθαίρετος σταθερά.

Παράδειγμα 3. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Volterra δύναται μερικάς φοράς νά μετασχηματισθῇ εἰς μίαν συνήθη διαφορικήν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία δύναται νά λυθῇ εὐκολώτερον ἀπό τήν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν. Ὡς παράδειγμα, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$u(x) = 2x + 4\int_0^x (y-x)u(y)\, dy. \tag{19}$$

Τότε παραγωγίζοντες ὡς πρός x χρησιμοποιοῦντες τάς μεθόδους τοῦ Κεφ. 15, § 15.2 (ἐξίσωσις (16)), ἔχομεν

$$\frac{d}{dx}u(x) = 2 + 4\left[\left\{(y-x)u(y)\right\}_{y=x} - \int_0^x u(y)\, dy\right], \tag{20}$$

$$= 2 - 4\int_0^x u(y)\, dy. \tag{21}$$

Παραγωγίζοντες καί πάλιν λαμβάνομεν

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -4u(x), \tag{22}$$

ἡ ὁποία ἔχει λύσιν

$$u(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, \tag{23}$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθεραί. Αἱ τιμαί τῶν σταθερῶν αὐτῶν δύνανται νά εὑρεθοῦν δι'ἀντικαταστάσεως τῆς (23) εἰς τήν (19) καί ὁλοκληρώσεως. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν $A = 0$ καί $B = 1$. Συνεπῶς ἀπό τήν (23) ἡ λύσις τῆς (19) εἶναι

$$u(x) = \sin 2x. \tag{24}$$

Παράδειγμα 4. Ὁ μετασχηματισμός Laplace (βλ. Κεφ. 23) καί τό συνελικτικόν θεώρημα δοθέν εἰς τό Κεφ. 23, Πρόβλημα 5, χρησιμεύουν εἰς τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Volterra

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,y)u(y)\,dy \tag{25}$$

ὅταν ὁ πυρήν ἔχη τήν μορφήν

$$K(x,y)=g(x-y). \tag{26}$$

Πράγματι λαμβάνοντες τόν μετασχηματισμόν Laplace τῆς (25) μέ πυρῆνα διδόμενον ὑπό τῆς (26) καί χρησιμοποιοῦντες τό συνελικτικόν θεώρημα

$$L\left\{\int_0^x g(x-y)u(y)\,dy\right\}=\bar{g}(p)\bar{u}(p), \tag{27}$$

ἔχομεν

$$\bar{u}(p)=\bar{f}(p)+\lambda\bar{g}(p)\bar{u}(p), \tag{28}$$

ἤ

$$\bar{u}(p)=\frac{\bar{f}(p)}{1-\lambda\bar{g}(p)}. \tag{29}$$

Συνεπῶς ἀντιστρέφοντες

$$u(x)=L^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(p)}{1-\lambda\bar{g}(p)}\right\}. \tag{30}$$

Εἰς ὡρισμένας ἁπλᾶς ἐξισώσεις ἡ ἀντιστροφή εἶναι εὔκολος. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν

$$u(x)=x+\int_0^x u(y)\sin(x-y)\,dy \tag{31}$$

τότε, κατά τήν (28),

$$\bar{u}(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{\bar{u}(p)}{p^2+1}, \tag{32}$$

(ἐπειδή $L\{x\}=1/p^2$ καί $L\{\sin x\}=1/[p^2+1]$). Ἄρα

$$\bar{u}(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}. \tag{33}$$

Αὐτή εὐκόλως ἀντιστρέφεται καί δίδει

$$u(x)=x+\frac{x^3}{6} \tag{34}$$

ὡς λύσιν τῆς (31).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 27

1. Λύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(y)\, dy.$$

2. Διά διαχωρισμοῦ τοῦ πυρῆνος ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$u(x) = \sin x + \int_0^\infty e^{-\alpha(x+y)} u(y)\, dy,$$

ὅπου α εἶναι πραγματική σταθερά καί δείξατε ὅτι ἡ λύσις δέν ἰσχύει ὅταν α = 0 καί α = 1/2.

3. Εὕρετε τάς ἰδιοτιμάς καί ἰδιοσυναρτήσεις τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων

(α) $u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x-y)^2 u(y)\, dy,$

(β) $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x+y) u(y)\, dy.$

4. Χρησιμοποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν Laplace καί τό συνελικτικόν θεώρημα, ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν

$$u(x) = \sin 2x + \int_0^x u(x-y) \sin y\, dy.$$

* * *

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Προβλήματα Κεφ. 15

1. (*a*) $-e^{-x}/(2x)$, (*b*) $[4/(3x)][\sqrt{(1+8x^4)}-\sqrt{(1+x^4)}]$.

Προβλήματα Κεφ. 17

1. (*a*) $\frac{32}{3}$, (*b*) -2.
2. (i) $-\frac{278}{15}$, (ii) -19.
3. 1.

Προβλήματα Κεφ. 18

1. $\Gamma(4{\cdot}1)=6{\cdot}810$, $\Gamma(-3{\cdot}9)=0{\cdot}492$.

Προβλήματα Κεφ. 19

1. (*a*) 1·178, (*b*) 1·060, (*c*) 0·658, (*d*) 0·028, (*e*) 1·202, (*f*) 5·403.
2. 0·600.
3. 3·54.
4. 0·1249, (ἀκριβής τιμή 0·1250).

Προβλήματα Κεφ. 20

3. $$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sinh\pi}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\sinh\pi\cos rx}{1+r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^r\cosh\pi]r\sin rx}{1+r^2}\right\}.$$

7. $$\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\{1-(\pi+1)(-1)^r\}\frac{\sin rx}{r}.$$

9. (i) $$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin(r\pi/2)}{\pi r^2}-\frac{1}{r}(-1)^r\right)\sin rx.$$

(ii) $$\frac{3\pi}{8}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\pi r^2}[\cos(r\pi/2)-1]\cos rx.$$

12. $$\frac{4}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(r\pi/2)}{r^2}\right)\sin rx.$$

Προβλήματα Κεφ. 21

1. (a) $y = 2x+1$,
(b) $x^3(3y-2) = 4$,
(c) $y = 2x/(Cx^2+1)$,
(d) $\frac{3}{5}(x+2y) - \frac{4}{25}\log_e(5x+10y+13) = x+C$,
(e) $y = [(\sin x)/x] - \cos x - (\pi/x)$.

2. (i) $y = \frac{1}{2}(x+1)^5 + (x+1)^3$,
(ii) $y = (Ax+B)e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x$.

3. (i) $y = [x^2/(x+1)](x^2-3x+C)$,
(ii) $y = Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 - x)$.

4. (i) $y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + 2 - \frac{1}{2}e^{2x}$,
(ii) $y = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\dfrac{x}{2} - \dfrac{(x+1)}{(x+2)^2}\log_e(1+x) + C\dfrac{(x+1)}{(x+2)^2}$.

5. (i) $y = (Ce^x/x^x) - (1/x^x)$,
(ii) $y = A\cosh nx + B\sinh nx + (x/2n)e^{nx}$.

6. (a) ἀκριβ.$(1+e^y)\sin x = \text{const.}$,
(b) $y = e^{[(A/x)-(x^2/3)]}$,
(c) $x^2+y^2 = Ay$,
(d) ἀκριβ.$x^4 - 4x^3y + 10x^2y^2 - 28xy^3 + \frac{4}{5}y^5 + \frac{8}{3}y^3 = \text{const.}$

7. $y = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{1}{48}e^{2x}$.

8. (i) $y = Ae^{2x} + Be^{-x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$,
(ii) $y = (Ax+B)e^{-x} + \frac{1}{2}e^x - x^2e^{-x}$,
(iii) $y = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{3}e^x\sin x$,
(iv) $y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x) - (\frac{1}{2}e^{2x}\cos x)(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x) + (\frac{1}{4}x^2e^{2x})\sin x$.

9. $y = \sin x + \sin 2x + \cos 2x + 2x + 1$.

10. $y = A\cos(2\sin\theta) + B\sin(2\sin\theta) + 3 - 2\sin^2\theta$.

11. $y = A\cos(\log_e x) + B\sin(\log_e x)$.

12. $n = -2$,
$y = (1/x^2)e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + (1/2x)e^{-x}\sin x$.

14. (i) $y = Ax + (B/x)$,
(ii) $y = Ax^2 + (B/x^2) + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2\log_e x$,
(iii) $y = (A/x^2) + x[B\cos(\sqrt{3}\log_e x) + C\sin(\sqrt{3}\log_e x)] - \sin(\log_e x) + 8\cos(\log_e x)$.

15. (i) $x = Ae^{-t} + Be^{3t}$, $y = Ae^{-t} - Be^{+3t}$,
(ii) $x = At + B + Ce^{\sqrt{2}t} + De^{-\sqrt{2}t}$, $y = At + B - Ce^{\sqrt{2}t} - De^{-\sqrt{2}t}$.

16. $x = \frac{3}{2}t(e^t - e^{-t})$, $y = \frac{3}{2}(3+t)e^t - \frac{1}{2}(1-3t)e^{-t}$.

17. $x = (At+B)e^{-at} + (Ct+D)e^{at}$,
$y = (At+B)e^{-at} - (Ct+D)e^{at} + (1/2a^2)\sin at$.

18. $x = Ae^{kt}+De^{-2kt}$, $y = Be^{kt}+De^{-2kt}$, $z = -(A+B)e^{kt}+De^{-2kt}$.

19. (*a*) $\frac{1}{4}\log_e\{[1+\sin 2(x-2y)]/[1-\sin 2(x-2y)]\} = x+C$,
(*b*) $\tan y = (x^2/3)+(c/x)$.

20. (*a*) $4y = 1+\sinh[(A\pm x)/\sqrt{2}]$,
(*b*) $y = \tan(A\pm x)$,
(*c*) $y = 4Ax^2/(1-Ax^2)$,
(*d*) $y = \cosh(\pm x+A)$.

22. (*a*) $x = be^{-2y}$, (*b*) $y^2 = b-2x$, (*c*) $x^2+y^2-2by = 0$, ὅπου εἰς ὅλας τάς περιπτώσεις τό b εἶναι σταθερά

27. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 1+t & t & 3t \\ 5t+\frac{3}{2}t^2 & 2t+\frac{3}{2}t^2+1 & 6t+\frac{9}{2}t^2 \\ -2t-\frac{t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2} & 1-3t-\frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Προβλήματα Κεφ. 22

1. $y = \frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}+\ldots$; ἀκριβής λύσις $y = 2e^x-x^2-2x-2$.

2. $y = x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}-\frac{3x^4}{64}+\frac{61x^5}{1920}+\ldots$.

3. $y = x-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{3\,.\,8}-\frac{x^4}{3\,.\,8\,.\,15}+\ldots$.

4. (*a*) $y = A\left(1-\frac{4x}{3}+\frac{4x^2}{15}\right)+\frac{B}{\sqrt{x}}\left(1-5x+\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)$,
(*b*) $y = A(1+3x+6x^2+\ldots)+B\sqrt{x}\left(1+\frac{7x}{3}+\frac{63x^2}{15}+\ldots\right)$,
(*c*) $y = A\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{20}-\frac{x^3}{480}+\ldots\right)$
$+Bx^{1/3}\left(1-\frac{1}{4}x+\frac{x^2}{56}-\frac{x^3}{1680}+\ldots\right)$.

5. $y_1 = Ax\left(1-\frac{x^2}{2\,.\,4}+\frac{x^4}{2\,.\,4\,.\,4\,.\,6}-\ldots\right)$.

6. $b = 2a$, $c = 2a/3$. $|x| < 2$.

7. Δευτέρα λύσις :

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2-k^2)(4^2-k^2)\dots\{(2n)^2-k^2\}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

8. $b_2 = \frac{1}{4}$.

12. $\upsilon = A\left(1 - \frac{2n}{2!}x^2 + \frac{2n(2n-1)}{4!} - \dots\right)$

Προβλήματα Κεφ. 23

2. (a) $-\sin x + \sqrt{2}\sin(x\sqrt{2})$,
   (b) $-1 + e^x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

3. (a) $y = (\frac{1}{20}e^{-2x})(39\cos 2x + 47\sin 2x) + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$,
   (b) $y = e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}$, $z = \frac{2}{3}(1 - e^{-3x})$.

Προβλήματα Κεφ. 24

1. (a) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

   (b) $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

   (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

   (d) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$.

2. (α) Ὑπερβολική $u = F(x+(2+\sqrt{7})y) + G(x+(2-\sqrt{7})y)$,
   (β) Παραβολική ; $u = F(x+y) + (rx+sy)G(x+y)$, r καί s αὐθαίρετοι σταθεραί
   (γ) Ἐλλειπτική ; $u = F(x+2iy) + G(x-2iy)$.

4. $f(\theta) = C\cos\theta + D\sin\theta$.

5. $w = \alpha^2$, $V = 2e^{-x}\sin(t-x)$.

6. $V = e^{-4y}\cos 2x$.

7. $V = C\sec l \sin(l-x)e^{-at}$.

8. $\tan(wa/c) = wa/c$.

10. $V = (A\cos pt + B\sin pt)e^{(1-p^2)x/4}$.

11. $z = \sum_k e^{-(k^2+1)y}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$,

$$z = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{(n^2+1)(1-y)}\sin nx.$$

12. $V = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(kn^2\pi^2 t)/a^2}\sin\frac{n\pi x}{a}$, ὅπου

$$B_n = \frac{4V_0}{\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

15. $T = T_0\left(1+\cos\frac{2\pi x}{\alpha}\, e^{-4\pi^2 kt/\alpha^2}\right)$

16. $\theta = 100+\sin\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right) e^{-k\pi^2 t/4\alpha^2}$

Προβλήματα Κεφ. 25

1. $I = 5\pi/2$.
2. $y = 2x$.
3. $y = x^3$.
4. $y = \sin x$.

Προβλήματα Κεφ. 26

1. (a) $u_r = 3^{r-1}$,
   (b) $u_r = (2^r/\sqrt{3})\sin(\pi r/3)$,
   (c) $u_r = (Ar+B)(\frac{1}{2})^r + (2^r/9)$,
   (d) $u_r = A3^r + 4^r - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}$.
2. $u_r = A + B2^r + C3^r + (4^r/6)$.
3. $u_n = n\alpha^{n-1}$.

Προβλήματα Κεφ. 27

1. $u = e^x$.
2. $u = \sin x + \frac{2\alpha}{(\alpha^2+1)(2\alpha-1)} e^{-\alpha x}$.
3. (a) $\lambda = 0$, $u = 0$; $\lambda = -\frac{3}{4}$, $u = Ax$; $1-\frac{2}{3}\lambda = \pm 2\lambda/\sqrt{5}$,
   $u = B(1 \pm \sqrt{5}x^2)$,
   (b) $\lambda = 0$, $u = 0$; $\lambda = 1/\pi$, $u = A$;
   $\lambda = 2/\pi$, $u = B\cos 2x$; $\lambda = -2/\pi$, $u = C\sin 2x$,

   ὅπου A,B καί C εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.
4. $u = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x$.

* * *

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ