

ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ

ΦΥΛΛΟ 2

1. Δείξτε ότι για κάθε (x_0, y_0) του πεδίου Ω του $\mathbb{R}^2$ οι παρακάτω Δ.Ε. έχουν μοναδική λύση $y(x) : y(x_0) = y_0$

(i) $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, όπου $P, Q \in C^{(1)}(\Omega)$ και $Q(x, y) \neq 0$, για κάθε $(x, y) \in \Omega$.

(ii) $y' = g(x)y + h(x)y^p$, όπου $g, h \in C^{(1)}(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\Omega = I \times \mathbb{R}$,

(iii) $y' = f\left(\frac{ax+by+\gamma}{\delta x+\varepsilon y+\zeta}\right)$, όπου $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ και $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta x + \varepsilon y + \zeta > 0\}$.

2. Με χρήση $\Theta.Picard$ δείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$y' = 3xy + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

έχει μοναδική λύση. Προσδιορίστε ένα διάστημα $[-h, h]$ στο οποίο ορίζεται η λύση και τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας των συναρτήσεων που σύμφωνα με το $\Theta.Picard$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη λύση.

3. Δείξτε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων

$$y_v(x) = x^v, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

συγκλίνει σημειακά στη σταθερή συνάρτηση 0 στο διάστημα $(0, 1)$ και ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση 0 στο διάστημα $(0, 1)$. Δώστε τους αντίστοιχους ορισμούς.

4. Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y' = x^2|y|, \quad y(3) = 0,$$

έχει μοναδική λύση. Προσδιορίστε ένα διάστημα $[-h, h]$ στο οποίο ορίζεται η λύση και τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας των συναρτήσεων που σύμφωνα με το $\Theta.Picard$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη λύση. Τι παρατηρείτε;

5. Με τη μέθοδο των ισοκλινών, να παρασταθεί γραφικά η οικογένεια των λύσεων των Δ.Ε.

(i) $y' = xy$, (ii) $y' = x^2 + y^2$, στο ορθογώνιο $D = [1, 3] \times [1, 3]$.