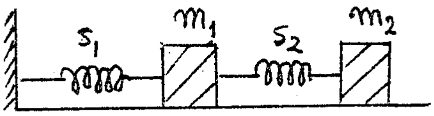
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)

3° Εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών — **2° Φυλλάδιο**
Φθινόπωρο 2009 — Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Κ. Ράπτης

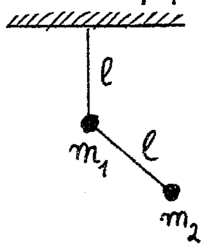
1. Συζευμένα εκκρεμή μέσω ελατηρίου. Δύο ίδια απλά εκκρεμή συνδέονται μεταξύ τους μέσω ελατηρίου το οποίο δεν υφίσταται καταπόνηση στη θέση ισορροπίας. Η μάζα κάθε σφαίρας είναι m = 1.0 kg και η σκληρότητα του ελατηρίου είναι s = 0.8 N/m. Αν το ένα εκκρεμές κρατείται στη θέση ισορροπίας, η περίοδος ταλαντώσεων του άλλου μετριέται ίση με T = 1.25 s. Να βρεθούν οι συχνότητες ω_1 και ω_2 των δύο τρόπων ταλάντωσης του συστήματος όταν αμφότερα τα εκκρεμή είναι ελεύθερα να κινηθούν.

2. Ασύμμετρο σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών. Δίνεται σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών αποτελούμενου από τις μάζες m_1, m_2 και τα ελατήρια με σκληρότητες s_1, s_2



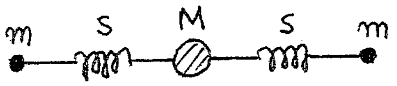
(βλέπε Σχήμα). (α) Διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών. (β) Υπολογίστε τις συχνότητες των δύο τρόπων ταλάντωσης καθώς και τους λόγους των πλατών των δύο μαζών για κάθε τρόπο ταλάντωσης. Δεν υπάρχουν απώλειες λόγω τριβών.

3. Διπλό εκκρεμές. Διπλό εκκρεμές αποτελείται από δύο σφαίρες μάζας m_1, m_2 και από



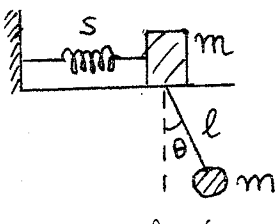
αβαρή νήματα ίδιου μήκους l. Οι δύο μάζες μπορούν να εκτελούν μικρού πλάτους κινήσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας μόνο στην οριζόντια διεύθυνση. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας. (β) Υπολογίστε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και τους λόγους των πλατών των ταλαντώσεων των δύο μαζών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.

4. Γραμμικό μόριο. Ένα συμμετρικό γραμμικό μόριο (π.χ. CO_2) μπορεί να παρασταθεί



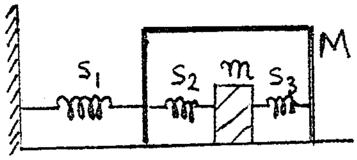
από δύο πλευρικές μάζες m, μία κεντρική μάζα M και δύο ενδιάμεσα ελατήρια σκληρότητας s. Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης κατά μήκος του άξονα του μορίου (διαμήκεις ταλαντώσεις) καθώς και οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.

5. Αρμονικός ταλαντωτής και απλό εκκρεμές. Αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απώλειες



τριβών μάζας m και σκληρότητας s είναι συζευγμένος (μέσω κατάλληλης εγκοπής στο οριζόντιο δάπεδο στήριξής του) με απλό εκκρεμές ίδιας μάζας m και μήκους l. Θεωρώντας μικρού πλάτους ταλαντώσεις για το εκκρεμές (μικρές γωνίες απόκλισης) (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών, (β)Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, καθώς και τους λόγους των πλατών των ταλαντώσεων των δύο μαζών για κάθε τρόπο ταλάντωσης. (**Υπόδειξη:** Θεωρήστε σύστημα συντεταγμένων με αρχή τη θέση ισορροπίας του αρμονικού ταλαντωτή).

6. Σύνθετο σύστημα αρμονικών ταλαντωτών. Κιβώτιο μάζας M είναι συνδεδεμένο με



ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίου σκληρότητας s_1 και μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το κιβώτιο είναι κούφιο χωρίς βάση και στο εσωτερικό του υπάρχει σώμα μάζας m το οποίο συνδέεται εκατέρωθεν με τα τα τοιχώματα του κιβωτίου μέσω ελατηρίων σταθεράς σκληρότητας s_2 και s_3. Η μάζα m μπορεί επίσης να κινείται πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο όπως και η μάζα M. Όλα τα ελατήρια έχουν κοινή διεύθυνση πάνω στην ίδια ευθεία και δεν υπάρχουν απώλειες λόγω τριβών για αμφότερες τις μάζες M και m. (α) Υποθέτοντας κάποιες οριζόντιες μετατοπίσεις (κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των ελατηρίων) του κιβωτίου και της μάζας m από τη θέση ισορροπίας του συστήματος, να διατυπώσετε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε σώμα. (β) Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην περίπτωση που ισχύουν οι σχέσεις: $M = 3m/2$ και $s_1 = s_2 + s_3$. (γ) Υπολογίστε τους λόγους των πλατών των ταλαντώσεων των δύο σωμάτων για καθένα από τους τρόπους ταλάντωσης.

7. Ενέργεια συζευμένων (μέσω ελατηρίου) εκκρεμών. Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια δύο ίδιων απλών εκκρεμών (μάζας m και μήκους l το καθένα) συζευγμένων μέσω ελατηρίου σκληρότητας s (όπως στην Άσκηση 1) μπορεί να εκφραστεί ως $U = aq_1^2 + bq_2^2$, όπου q_1, q_2 είναι οι κανονικές συντεταγμένες και a, b σταθερές. Δέξτε επίσης ότι η κινητική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί ως $K = c\dot{q}_1^2 + d\dot{q}_2^2$, όπου c, d σταθερές. Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c, και d συναρτήσει των m, l, s και g.

8. Ομογενής χορδή. Μία ομογενής χορδή (μεγάλου, σχεδόν απείρου, μήκους) πυκνότητας μάζας $\mu = 0.1$ kg/m είναι τεντωμένη υπό τη επίδραση τάσης $T = 50$ N. Το ένα άκρο της χορδής ($z = 0$) εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0.02$ m με περίοδο $\tau = 0.1$ s, έτσι που να δημιουργούνται οδεύοντα κύματα προς τη θετική κατεύθυνση της χορδής. Να βρεθούν: (α) η ταχύτητα διάδοσης v και το μήκος κύματος λ των κυμάτων και (β) αν στην αρχή της χορδής (z =0) για $t = 0$, η μετατόπιση είναι $y = 0.01$ m με το μέγεθος $\partial y/\partial t$ αρνητικό, ποια είναι η εξίσωση που περιγράφει τα οδεύοντα κύματα.

9. Μεταφερόμενη ισχύς σε χορδή. Δείξτε ότι η μέση ισχύς που μεταφέρεται από ένα αρμονικό οδεύον κύμα κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής είναι: $\langle P \rangle = (½)Z_0\omega^2A^2$, όπου Z_0 είναι η χαρακτηριστική αντίσταση της χορδής, ω η γωνιακή συχνότητα και A το πλάτος των ταλαντώσεων.

10. Εγκάρσια κύματα σε περιοδική δομή. Δίνεται μία γραμμική περιοδική δομή N ίδιων ατόμων (σωμάτων) μάζας m σε διαδοχική απόσταση l μεταξύ τους. Τα άτομα συνδέονται μεταξύ τους με ελαστικούς δεσμούς τάσης μέτρου T, ενώ για τα ακραία (υπ΄αριθμόν 1 και N) οι ελαστικοί δεσμοί καταλήγουν σε ακλόνητα τοιχώματα. Δείξτε ότι η συχνότητα του n-στου τρόπου ταλάντωσης για στάσιμα κύματα στην περιοδική διάταξη δίνεται από τη σχέση: $\omega_n = 2\sqrt{\frac{T}{ml}}\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}$ (σχέση διασποράς). Επίσης, δείξτε ότι η μέγιστη συχνότητα στην εν λόγω περιοδική δομή είναι: $\omega_{max} \approx 2(T/ml)^{1/2}$.

11. Στάσιμα κύματα σε χορδή. Να δειχθεί ότι για ένα στάσιμο κύμα πάνω σε τεντωμένη χορδή μήκους L με ακλόνητα άκρα, τα σημεία της χορδής που παραμένουν πάντοτε στη θέση ισορροπίας (δεσμοί) δίνονται από τη σχέση: $z = (m/n)L$, [m = 0,1,2,3.... n = 1,2,3....], ενώ τα σημεία που παρουσιάζουν μέγιστη μετατόπιση (κοιλίες) δίνονται από την: $z = \{(2m-1)/n\}(L/2)$, [m = 1,2,3...., n = 1,2,3....], όπου το m αντιστοιχεί στο m-στό ελάχιστο ή μέγιστο, αντίστοιχα και n στην τάξη του στάσιμου κύματος (ή ισοδύναμα στον n-στό τρόπο ταλάντωσης της χορδής). Ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις στην περίπτωση που τα δύο άκρα της χορδής είναι ελεύθερα να κινούνται;

12. Ενέργεια στάσιμων κυμάτων χορδής. Να δειχθεί ότι η ενέργεια του n-στου τρόπου ταλάντωσης για στάσιμα κύματα σε τεντωμένη χορδή με ακλόνητα άκρα δίνεται από τη σχέση: $E_{n,\text{ολ.}} = (1/4)\rho L \omega_n^2 A_n$, όπου ρ είναι η γραμμική πυκνότητα της χορδής, L το μήκος και ω_n και A_n η συχνότητα και το πλάτος του n-στου τρόπου ταλάντωσης της χορδής, αντίστοιχα.

13. Στάσιμα κύματα σε γέφυρα. Γέφυρα μήκους $L = 50$ m είναι κατασκευασμένη από ομογενές υλικό σταθερής διατομής και υποτίθεται ότι προσομοιάζει ιδανική χορδή με ακλόνητα άκρα. Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της γέφυρας (στάσιμα κύματα) και αποφανθείτε, στην περίπτωση που προσβληθεί από σεισμό διάρκειας $\Delta t = 1$ s, αν κινδυνεύει να καταστραφεί. Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη γέφυρα: $\upsilon = 200$ m/s.

14. Διαμήκη κύματα. Μία διαμήκης διαταραχή που δημιουργείται από ένα σεισμό διαδίδεται σε απόσταση $z = 5000$ km σε χρόνο $t = 15$ min. Να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του Young E των πετρωμάτων που διαδίδεται η διαταραχή, αν η μέση πυκνότητά τους είναι: $\rho = 2700$ kg/m^3.