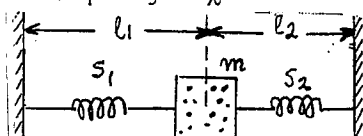


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)

3^ο Εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών
Φθινόπωρο 2010

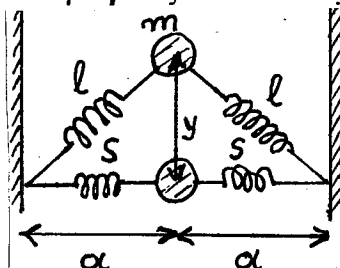
1^ο Φυλλάδιο
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Κ. Ράπτης

1. Διαμήκειες ταλαντώσεις. Ένα σώμα μάζας m συνδέεται με δύο αβαρή ελατήρια σταθερών (σκληρότητας) s_1 και s_2 πάνω σε οριζόντιο δάπεδο ελεύθερο τριβών. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι συνδεδεμένα με ακλόνητα τοιχώματα. Στη θέση ισορροπίας, το μέσο του σώματος απέχει αποστάσεις l_1 και l_2 από το αντίστοιχο τοίχωμα. Αν τα μήκη ισορροπίας για



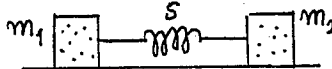
κάθε ελατήριο χωριστά (χωρίς την επίδραση του άλλου) είναι l_{01} και l_{02} , υπολογίστε: (α) την τάση που ασκείται από κάθε ελατήριο στο σώμα στη θέση (κοινής) ισορροπίας τους, (β) τη σχέση που ισχύει μεταξύ των s_1 , s_2 , l_1 , l_2 , l_{01} , l_{02} στη θέση κοινής ισορροπίας τους. (γ) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης για διαμήκειες ταλαντώσεις και (δ) τη συχνότητα των ταλαντώσεων.

2. Εγκάρσιες ταλαντώσεις. Ένα σώμα μάζας m συνδέεται με δύο ίδια αβαρή ελατήρια



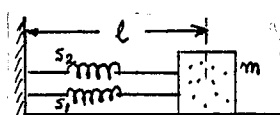
σκληρότητας s και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις κατά μήκος του άξονα y . Αν το μήκος κάθε ελατηρίου χωρίς καταπόνηση είναι a_0 και στη θέση ισορροπίας a , να βρεθεί η τάση που ασκεί κάθε ελατήριο στη μάζα στη θέση ισορροπίας και στην τυχαία (μετατοπισμένη) θέση. Γράψτε την εξίσωση κίνησης της μάζας και υπολογίστε τη συχνότητα των εγκάρσιων ταλαντώσεων υποθέτοντας ταλαντώσεις μικρού πλάτους.

3. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς s και έχουν τη δυνατότητα να ταλαντώνονται κατά μήκος της ευθείας που περνάει από τα κέντρα τους. Δείξτε ότι η συχνότητα αυτών των ταλαντώσεων είναι: $\omega_0 = (s/\mu)^{1/2}$, όπου $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μάζα του συστήματος.



4. Μία λεπτή δοκός μάζας m και μήκους l κρέμεται μέσω του άνω άκρου της από ακλόνητο σημείο. Αν την εκτρέψουμε κατά μια μικρή γωνία θ από την κατακόρυφο, να ευρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων που θα εκτελέσει. Υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν απώλειες και δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο της είναι $I = (ml^2)/12$.

5. Δύο ελατήρια σταθερών s_1 , s_2 και μηκών χωρίς καταπόνηση l_1 , l_2 είναι συνδεδεμένα σε παράλληλη διάταξη με σώμα μάζας m το οποίο μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Να ευρεθούν τα μέτρα και οι κατευθύνσεις των τάσεων που ασκούν τα ελατήρια στη μάζα στη θέση ισορροπίας όταν (α) $l_1 > l_2$,



(β) $l_1 < l_2$ και (γ) $l_1 = l_2$. Βρείτε τη συχνότητα των ταλαντώσεων του συστήματος αν η μάζα μετατοπιστεί κατά απόσταση x από τη θέση ισορροπίας. Στη θέση ισορροπίας το κέντρο της μάζας απέχει απόσταση l από το τοίχωμα.

6. Ένα σύστημα μάζας (m)-ελατηρίου (s) τίθεται σε ταλάντωση με ασθενή απόσβεση ($F_{\text{ap}} = -rv$) και αρχικές συνθήκες ($t = 0$): $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Δείξτε ότι η κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση: $x(t) = (v_0/\omega') e^{-\gamma t} \sin \omega' t$, όπου $\gamma = r/2m$ και $\omega' = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$, (ω_0 : η συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση).

7. Ένας μηχανικός ταλαντωτής ελατηρίου μάζας m και σκληρότητας ελατηρίου s με ασθενή απόσβεση ($F_{\text{ap}} = -rv$) ταλαντώνεται με συχνότητα ω' που είναι το 95% της ιδιοσυχνότητας ω_0 που θα είχε ο ταλαντωτής αν δεν υπήρχε απόσβεση. (α) να υπολογιστεί ο παράγων ποιότητας Q του ταλαντωτή. (β) Αν $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ και $m = 10^{-2} \text{ kg}$, να υπολογιστούν η σκληρότητα του ελατηρίου s και η αντίσταση r .

8. Ένα σώμα μάζας $m = 0.2 \text{ kg}$ κρέμεται μέσω ελατηρίου σκληρότητας s από την οροφή και στη θέση ισορροπίας το ελατήριο παρατηρείται να έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta y = 0.025 \text{ m}$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος χωρίς καταπόνηση. (α) Να προσδιοριστεί η σκληρότητα s του ελατηρίου. Στη συνέχεια το σύστημα τίθεται σε κατακόρυφες ταλαντώσεις (στη διεύθυνση του άξονα y) και υφίσταται ασθενή απόσβεση υπό την επίδραση δύναμης τριβής $F_{\tau p} = -rv$ που οφείλεται στον αέρα. (β) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος. (γ) Αν η συχνότητα ταλαντώσεων ω' είναι $\sqrt{3}/2$ της συχνότητας ω_0 που θα είχε το σύστημα χωρίς απόσβεση, να υπολογίσετε την αντίσταση (σταθερά απόσβεσης) r . (δ) Ποιά είναι η τιμή του παράγοντα ποιότητας Q και κατά πόσο θα μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 10 πλήρεις κύκλους.

9. Ένα σύστημα μάζας $m = 0.1 \text{ kg}$ και ελατηρίου σκληρότητας $s = 10 \text{ N/m}$ εκτελεί ταλαντώσεις με απόσβεση υπό την επίδραση δύναμης αντίστασης $F_{\tau p} = -rv$, όπου $r = 1.2 \text{ kg/s}$ και v η ταχύτητα. (α) Δείξτε ότι η απόσβεση είναι ασθενής και υπολογίστε τον παράγοντα ποιότητας Q . (β) Αν για $t = 0$, είναι: $x(0) = 0$ και $v(0) = 0.16 \text{ m/s}$, να υπολογιστεί η μέγιστη μετατόπιση $x_{\max}$ που θα υποστεί η μάζα. (γ) Με δεδομένα τα χαρακτηριστικά σκληρότητας και μάζας του συστήματος, προσδιορίστε την αντίσταση r_0 που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να είναι πλέον αποτελεσματική (γρηγορότερη) η απόσβεση μετά από κάποια διαταραχή.

10. Ένα μηχανικό σύστημα μάζας (m)-ελατηρίου (s) υφίσταται την επίδραση δύναμης τριβής ($F_{\tau p} = -rv$) και τίθεται σε κίνηση με συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης. Αν για $t = 0$, είναι: $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$, δείξτε ότι η κίνηση δίνεται από τη σχέση $x(t) = (v_0 t) e^{-\omega_0 t}$ και ότι η μέγιστη μετατόπιση είναι $x_{\max} = v_0 / \omega_0$.

11. Τετράγωνη οριζόντια πλάκα μάζας $m = 50 \text{ kg}$ στηρίζεται προς το δάπεδο μέσω τεσσάρων ίδιων ελατηρίων συμμετρικά τοποθετημένων στις γωνίες. Κάθε ελατήριο διαθέτει μηχανισμό ελεγχόμενης απόσβεσης χάρις σε έμβολο που προσδίδει ιξώδη δύναμη τριβής ($F_{\tau p} = -rv$). Κατά την τοποθέτηση της πλάκας, τα ελατήρια χαμηλώνουν (συμπιέζονται) κατακόρυφα κατά $\Delta y = 0.01 \text{ m}$. (α) Βρείτε τη σκληρότητα s καθενός από τα ελατήρια. (β) Στην περίπτωση κατακόρυφης διαταραχής (περαιτέρω συμπίεσης) του συστήματος, υπολογίστε την κρίσιμη τιμή r_0 της αντίστασης έτσι ώστε το σύστημα να επανέλθει γρηγορότερα στην κατάσταση ισορροπίας χωρίς ταλαντωτική κίνηση και γράψτε την αντίστοιχη σχέση μετατόπισης $x = x(t)$ της πλάκας ως προς το δάπεδο για αυτή την περίπτωση. (γ) Αν η αντίσταση γίνει $r = r_0/2$, να υπολογιστεί η συχνότητα των κατακόρυφων ταλαντώσεων του συστήματος και να γραφεί η αντίστοιχη μετατόπιση $x = x(t)$ της πλάκας ως προς το δάπεδο.

12. Ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου έχει σκληρότητα $s = 10 \text{ N/m}$ και υφίσταται ισχυρή υπεραπόσβεση ($\gamma = r/2m \gg \omega_0 = (s/m)^{1/2}$). (α) Να γραφεί η σχέση που δίνει τη μετατόπιση $x = x(t)$ από τη θέση ισορροπίας. (β) Αν η μάζα παρατηρείται να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $v = 10 \text{ mm/s}$ όταν η μετατόπισή της είναι 30 mm δεξιά της θέσης ισορροπίας, να υπολογιστεί η σταθερά απόσβεσης (αντίσταση) r του συστήματος.

13. Ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα τρεις απλές αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας κατά μήκος του άξονα x . Αν τα πλάτη είναι 0.25 , 0.20 και 0.15 mm και η διαφορά φάσης μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης ταλάντωσης είναι 45° , ενώ μεταξύ της δεύτερης και τρίτης 30° , να βρεθεί το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και η φάση της σε σχέση με την πρώτη συνιστώσα.

14. Δύο ταλαντώσεις κατά μήκος της ίδιας ευθείας περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t), \quad x_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

όπου $\omega_1 = 11\pi \text{ s}^{-1}$ και $\omega_2 = 12\pi \text{ s}^{-1}$. Να υπολογιστεί η συχνότητα του διακροτήματος και να σχεδιαστεί η συνισταμένη διαταραχή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου του διακροτήματος.

15. Να βρεθεί η συχνότητα της συνισταμένης κίνησης για κάθε ζεύγος υπερτιθέμενων ταλαντώσεων:

(α) $\sin(2\pi t - 2) + \cos(2\pi t)$

(β) $\sin(12\pi t) + \cos(13\pi t - \pi/4)$

(γ) $\sin(3t) - \cos(\pi t)$

16. Ένας ταλαντωτής ελατηρίου με απόσβεση ($F_{\tau\phi} = -rv$) μάζας $m = 0.04 \text{ kg}$ και σκληρότητας $s = 64 \text{ N/m}$ διεγείρεται από μια αρμονικά μεταβαλλόμενη δύναμη ($F = F_0 \cos \omega t$) πλάτους $F_0 = 4 \text{ N}$ και (αρχικής) συχνότητας $\omega \ll \omega_0$, όπου ω_0 η συχνότητα ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση. (α) Πόσο είναι το πλάτος $A_{\text{αρχ}}$ για $\omega \ll \omega_0$. Στη συνέχεια αυξάνεται η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης (διατηρώντας το αρχικό πλάτος της) μέχρις ότου επιτευχθεί συντονισμός. (β) Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης r που απαιτείται για να γίνει το πλάτος συντονισμού $A_{\text{συν}}$ δεκαπλάσιο του $A_{\text{αρχ}}$. (γ) Ποιά είναι η τιμή του πλάτους $A_{\text{συν}}$.

17. Ένας μηχανικός ταλαντωτής με απόσβεση εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό την επίδραση διεγείρουσας αρμονικής δύναμης. Αν, για τη μόνιμη κατάσταση, η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση $x = A \cos(\omega t)$, όπου ω η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και η δύναμη απόσβεσης δίνεται από την $F_{\tau\phi} = -rv$ (r η αντίσταση, v η ταχύτητα), να υπολογιστεί το έργο που καταναλώνεται σε ένα πλήρη κύκλο για να υπερνικηθεί η δύναμη απόσβεσης.

18. Δείξτε ότι σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση ($F_{\tau\phi} = -rv$) η μέση ισχύς $\langle P \rangle$ που καταναλώνεται για την υπερνίκηση της δύναμης απόσβεσης τείνει προς το μηδέν ανεξάρτητα της τιμής της σταθεράς απόσβεσης r σε αμφότερες τις περιπτώσεις: (α) $\omega \ll \omega_0$ και (β) $\omega \gg \omega_0$.