$$\begin{bmatrix} \hat{P}'_{3n-2} \\ \hat{P}'_{3n-1} \\ \hat{P}'_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{3n-2} \\ \hat{P}_{3n-1} \\ \hat{P}_{3n} \end{bmatrix} \tag{21.5}$$

δηλαδή το μητρώο $[r]$ στη περίπτωση αυτή είναι

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21.6}$$

το οποίο ενσωματώνεται στη κατάλληλη θέση του μητρώου $[R]$.

β) Τροποποίηση των μητρώων $[\hat{P}],[\hat{\Delta}],[\hat{K}]$, λόγω στηρίξεως του φορέα με τη βοήθεια του κατάλληλου μητρώου $[V]$.

γ) Προσδιορισμός των ελεύθερων μετατοπίσεων $[\overline{\Delta}]$ και των αντιδράσεων $[\overline{P}_s]$ (βλέπε σχέσεις (12.7) και (12.8)).

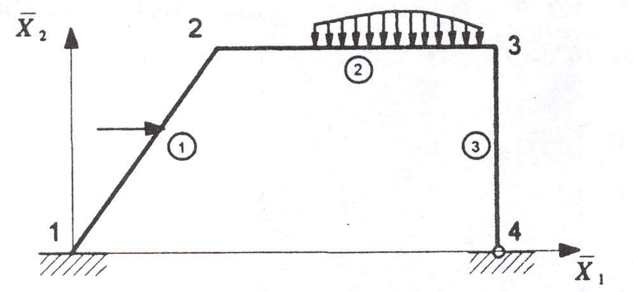
δ) Υπολογισμός των ακραίων μετατοπίσεων των στοιχείων $[\overline{D}^i]$ από τις επικόμβιες μετατοπίσεις $[\hat{\Delta}]$ και ακολούθως των ακραίων δράσεων, με τη βοήθεια των σχέσεων (19.5) και (20.1).

22. ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

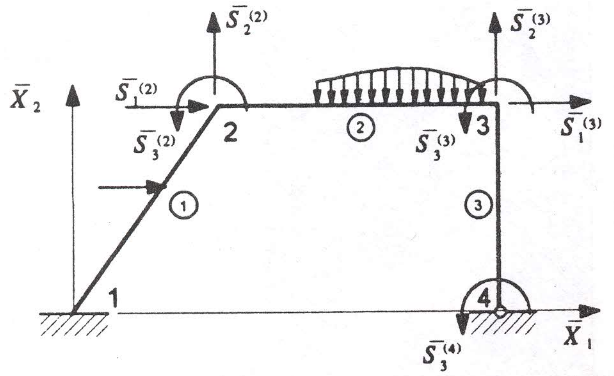
Τα επίπεδα πλαίσια μπορεί να φορτίζονται με τα παρακάτω φορτία:
α) *επικόμβια φορτία*, β) *φορτία στα ανοίγματα*, γ) *θερμοκρασιακή μεταβολή*, δ) *υποχωρήσεις στηρίξεων*, ε) *ελαττωματική κατασκευή μελών του*.

α. Επικόμβια φορτία

Τα επικόμβια φορτία αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας, όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

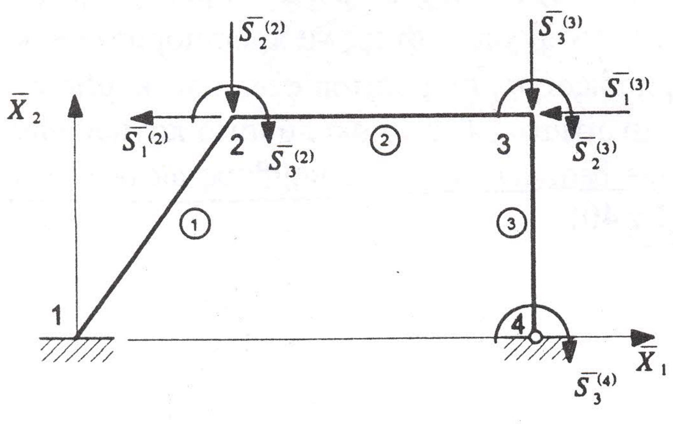


=



(I)

+



(II)

Σχ.39

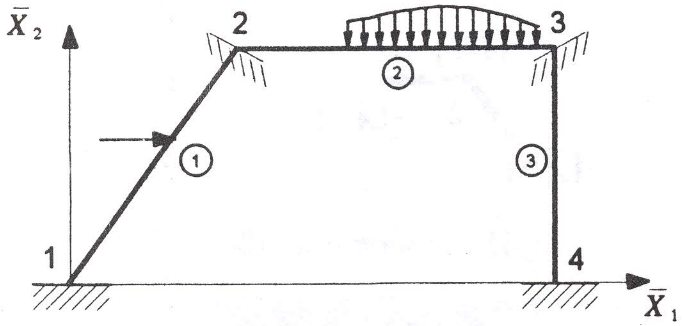
β. Φορτία στα ανοίγματα

Όταν στοιχεία του φορέα φορτίζονται με συγκεντρωμένα ή κατανεμημένα φορτία είναι φανερό ότι η μέθοδος ακαμψίας δεν μπορεί να εφαρμοσθεί όπως αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Εφαρμόζεται όμως αν αντικαταστήσουμε τα φορτία των ανοιγμάτων με ισοδύναμα επικόμβια φορτία, όπως ακριβώς έγινε με τον υπολογισμό των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων από θερμικά φορτία στο δικτύωμα.

Θεωρούμε την επαλληλία των φορτίσεων (I) και (II) του Σχ.39. Η φόρτιση (I) περιλαμβάνει τα αρχικά φορτία στα ανοίγματα και επικόμβιες δράσεις $[\hat{S}]$ κατά τις διευθύνσεις των ελεύθερων μετατοπίσεων των κόμβων, δηλαδή

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} [\bar{S}^{(1)}] \\ [\bar{S}^{(2)}] \\ [\bar{S}^{(3)}] \\ [\bar{S}^{(4)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \bar{S}_1^{(2)} \\ \bar{S}_2^{(2)} \\ \bar{S}_3^{(2)} \\ \hline \bar{S}_1^{(3)} \\ \bar{S}_2^{(3)} \\ \bar{S}_3^{(3)} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \bar{S}_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \hat{S}_4 \\ \hat{S}_5 \\ \hat{S}_6 \\ \hline \hat{S}_7 \\ \hat{S}_8 \\ \hat{S}_9 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hat{S}_{12} \end{bmatrix} \tag{22.1}$$

Η φόρτιση (II) περιλαμβάνει μόνο τα επικόμβια φορτία $-[\hat{S}]$. Είναι φανερό ότι η επαλληλία του Σχ.39 ισχύει με αυθαίρετες τιμές των επικόμβιων δράσεων $[\hat{S}]$. Μπορούν όμως αυτές να προσδιορισθούν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εμποδίζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων που προκαλούν τα φορτία στα ανοίγματα. Για το σκοπό αυτό παγιώνουμε το φορέα, δηλαδή επιβάλλουμε δεσμεύσεις στους κόμβους ώστε αυτοί να πακτώνονται στο έδαφος (Σχ.40).



Σχ.40

Στον παγιωμένο φορέα όλα τα στοιχεία του είναι αμφίπακτα.

Οι ακραίες δράσεις παγιώσεως του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων συνεπεία φορτίσεως των ανοιγμάτων είναι

$$[A^i_\ell] = \begin{bmatrix} (F^{ij}_1)_\ell \\ (F^{ij}_2)_\ell \\ (M^{ij}_3)_\ell \\ (F^{ik}_1)_\ell \\ (F^{ik}_2)_\ell \\ (M^{ik}_3)_\ell \end{bmatrix} \tag{22.2}$$

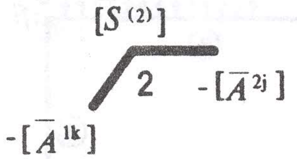
και στο καθολικό προκύπτουν από τη σχέση

$$[\overline{A}^i_\ell] = [\Lambda^i_{PPF}]^T [A^i_\ell]$$

Οι δράσεις παγιώσεως $[A^i_\ell]$ για δεδομένη φόρτιση υπολογίζονται με τον τρόπο που παρουσιάζεται πιο κάτω.

Οι επικόμβιες δράσεις $[S^{(n)}]$ n=1, 2, 3, 4 που παγιώνουν τον φορέα ονομάζονται δράσεις παγιώσεως και υπολογίζονται από την ισορροπία των κόμβων του παγιωμένου φορέα. Π.χ. για τον κόμβο #2 προκύπτει με βάση το Σχ.41.

$$[\overline{S}^{(2)}] = [\overline{A}^{1k}] + [\overline{A}^{2j}] \tag{22.3}$$



Σχ.41.Ισορροπία κόμβου #2

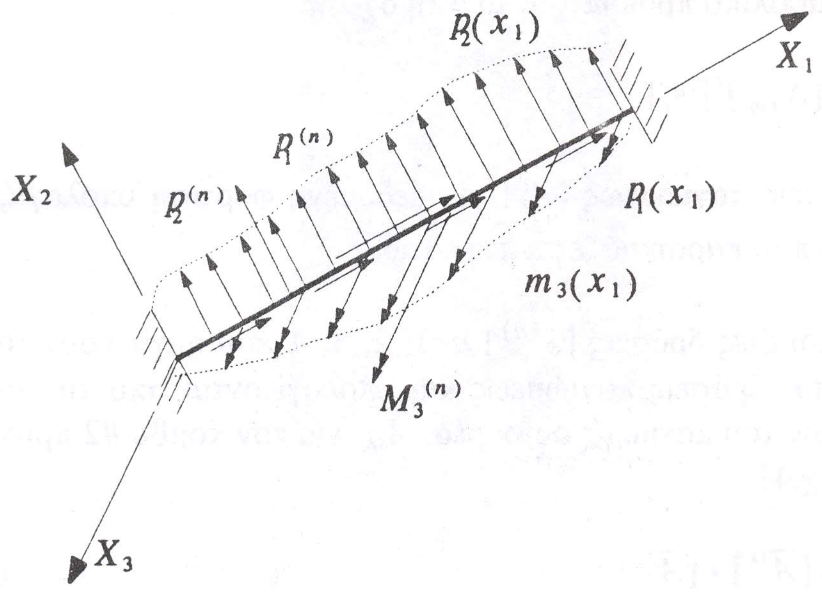
Επομένως, η επίλυση του φορέα με ενδιάμεση φόρτιση ανάγεται σε δύο επιλύσεις

α) επίλυση του παγιωμένου φορέα, η οποία ουσιαστικά είναι επίλυση αμφιπάκτων στοιχείων για δεδομένη φόρτιση.

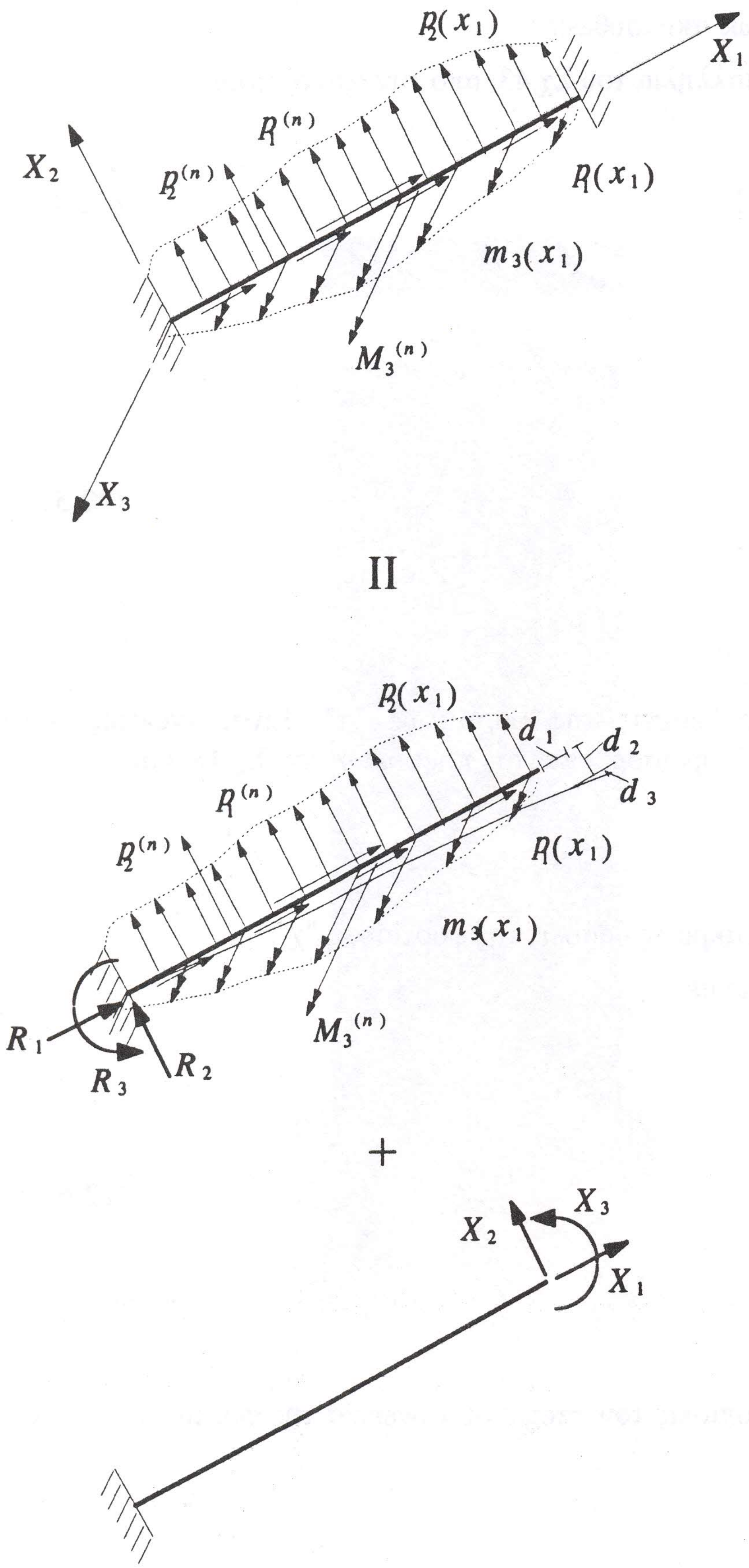
β) επίλυση του φορέα με τη μέθοδο ακαμψίας, όταν στους κόμβους ασκούνται οι αντίθετες των δράσεων παγιώσεως, δηλ. $-[\hat{S}]$.

β1. Υπολογισμός των δράσεων παγιώσεως για φόρτιση ανοίγματος.

Το στοιχείο μπορεί να φορτίζεται με κατανεμημένο αξονικό φορτίο $p_1(x_1)$, κατανεμημένο εγκάρσιο φορτιο $p_2(x_1)$, κατανεμημένη ροπή $m_3(x_1)$, αξονικά συγκεντρωμένα φορτία $P_1^{(n)}$, εγκάρσια συγκεντρωμένα φορτία $P_2^{(n)}$ και συγκεντρωμένες ροπές $M_3^{(n)}$, όπως φαίνεται στο Σχ.42.



Σχ.42


$P_2(x_1)$
X_1
$P_1^{(n)}$
X_2
$P_2^{(n)}$
$P_1(x_1)$
$m_3(x_1)$
$M_3^{(n)}$
X_3
II
$P_2(x_1)$
d_1
d_2
d_3
$P_1^{(n)}$
$P_2^{(n)}$
$P_1(x_1)$
$m_3(x_1)$
R_1
$M_3^{(n)}$
R_3
R_2
+
X_3
X_2
X_1

Σχ.43.

Οι ακραίες δράσεις παγιώσεως $[A_\ell^i]$ του στοιχείου P2 μπορούν να προσδιορισθούν ως ακολούθως:

Θεωρούμε την επαλληλία του Σχ.43, από την οποία έχουμε

$$[A_\ell^i] = [A_\pi^i] + [A_\chi^i] \tag{22.4}$$

όπου

$$[A_\pi^i] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22.5}$$

είναι οι ακραίες δράσεις της φορτίσεως "π". Είναι γνωστές διότι υπολογίζονται από την ισορροπία του προβόλου του Σχ.43 και

$[A_\chi^i]$

είναι οι άγνωστες ακραίες δράσεις της φορτίσεως "χ".

Εάν παραστήσουμε με

$$[D_\pi^i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{22.6}$$

τις ακραίες μετατοπίσεις του στοιχείου συνεπεία της φορτισεως "π" και με

$[D_\chi^i]$

τις άγνωστες ακραίες μετατοπίσεις του στοιχείου συνεπεία της φορτισεως "χ", τότε θα πρέπει να ισχύει

$$[D_{\pi}^{i}]+[D_{\chi}^{i}]=[0]$$

ή

$$[D_{\chi}^{i}]=-[D_{\pi}^{i}] \qquad (22.7)$$

δηλαδή

$$[D_{\chi}^{i}]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \end{bmatrix} \qquad (22.8)$$

Για τις ακραίες δράσεις $[A_{\chi}^{i}]$ ισχύει η σχέση

$$[A_{\chi}^{i}]=[k^{i}][D_{\chi}^{i}]$$

ή δυνάμει της (22.7)

$$[A_{\chi}^{i}]=-[k^{i}][D_{\chi}^{i}] \qquad (22.9)$$

όπου $[k^{i}]$ είναι το ολικό τοπικό μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Με βάση τη σχέση (22.9), η (22.4) δίνει

$$[A_{\ell}^{i}]=[A_{\pi}^{i}]-[k^{i}][D_{\pi}^{i}] \qquad (22.10)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $[D_{\pi}^{ij}]=[0]$ η σχέση (22.10) γράφεται απλούστερα

$$\begin{bmatrix} (F_1^{ij})_\ell \\ (F_2^{ij})_\ell \\ (M_3^{ij})_\ell \\ (F_1^{ik})_\ell \\ (F_2^{ik})_\ell \\ (M_3^{ik})_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{14}^i & k_{15}^i & k_{16}^i \\ k_{24}^i & k_{25}^i & k_{26}^i \\ k_{34}^i & k_{35}^i & k_{36}^i \\ k_{44}^i & k_{45}^i & k_{46}^i \\ k_{54}^i & k_{55}^i & k_{56}^i \\ k_{64}^i & k_{65}^i & k_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

'Οπως αναφέραμε οι αντιδράσεις R_1, R_2, R_3 υπολογίζονται από τον πρόβολο του Σχ.43. Οι μετατοπίσεις d_1, d_2, d_3 υπολογίζονται με την αρχή των δυνατών έργων (μέθοδο μοναδιαίου φορτίου).

γ. Θερμοκρασιακή μεταβολή

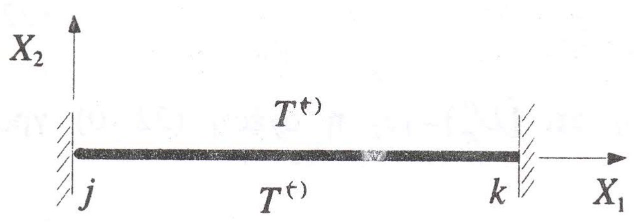
Γιά τον υπολογισμό των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων θεωρούμε την επαλληλία δύο φορτίσεων

α) Ο παγιωμένος φορέας με μοναδική φόρτιση την μεταβολή της θερμοκρασίας. Από την ισορροπία κόμβων θα προκύψουν οι δράσεις παγιώσεως.

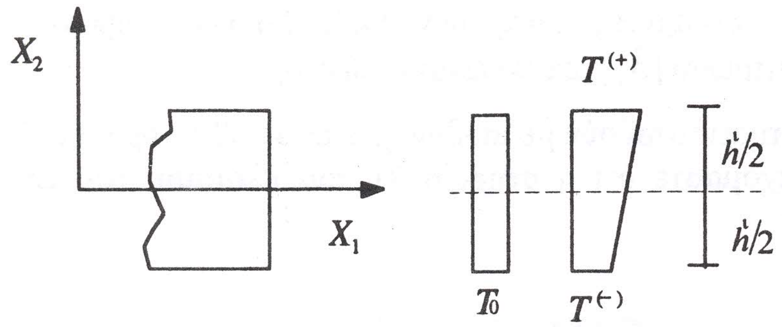
β) Ο φορέας με φόρτιση $-[\hat{S}]$.

γ1. Δράσεις παγιώσεως για θερμοκρασιακή μεταβολή

Για τα στοιχεία πλαισίου η θερμοκρασιακή μεταβολή αναλύεται σε μία ομοιόμορφη μεταβολή της ΔT_c της διατομής, που προκαλεί αξονική ένταση στη ράβδο, και μία μεταβολή ΔT μεταξύ θετικού και αρνητικού πέλματος, που προκαλεί καμπτική ένταση. Ή κατανομή της θερμοκρασίας κατά το ύψος της διατομής θεωρείται γραμμική. Επομένως, εάν T_o η αρχική θερμοκρασία του φορέα τότε με βάση το Σχ.45 έχουμε



Σχ.44. Στοιχείο Ρ2 με μεταβολή θερμοκρασίας



Σχ.45.

$$\Delta T_c = \frac{T^{(+)} + T^{(-)}}{2} - T_o$$

$$\Delta T = T^{(+)} - T^{(-)}$$

όπου

$T^{(+)}$= η θερμοκρασία του πέλματος του στοιχείου προς το μέρος του $+x_2$ (θετικού ημιάξονα x_2)

$T^{(-)}$= η θερμοκρασία του πέλματος του στοιχείου προς το μέρος του $-x_2$ (αρνητικού ημιάξονα x_2).

Για στοιχείο σταθερής διατομής οι δράσεις παγιώσεων, όταν $\Delta T_c \rangle 0$ και $\Delta T \rangle 0$ είναι με βάσει το Σχ.46

$$[\acute{A}^i] = \begin{bmatrix} (F_1^{ij})_t \\ (F_2^{ij})_t \\ (M_3^{ij})_t \\ (F_1^{ik})_t \\ (F_2^{ik})_t \\ (M_3^{ik})_t \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} E^i A^i \alpha \Delta T_c \\ 0 \\ -\dfrac{E^i I^i \alpha \Delta T}{h^i} \\ \hdashline -E^i A^i \alpha \Delta T_c \\ 0 \\ \dfrac{E^i I^i \alpha \Delta T}{h^i} \end{array}\right]$$

όπου h^i είναι το ύψος της διατομής και α ο συντελεστής γραμμικής διατομής του υλικού.

δ. Υποχωρήσεις στηρίξεων

Οι υποχωρήσεις στηρίξεων αντιμετωπίζονται με δύο τρόπους:

α. Κατά τη μόρφωση του μητρώου $[\hat{\Delta}]$ οι στηρίξεις που υποχωρούν λαμβάνουν τις δεδομένες τιμές των υποχωρήσεων, δηλαδή τα στοιχεία του μητρώου $[\hat{\Delta}_s]$ δεν θα είναι μηδενικά.

β. Μπορούν να αντικατασταθούν με ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις. Για παράδειγμα δεχόμαστε ότι η στήριξη #1 του πλαισίου του Σχ.25 υποχωρεί κατά

$$[\overline{\Delta}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \overline{d}_1 \\ \overline{d}_2 \\ \overline{d}_3 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε πάλι την επαλληλία φορτίσεων (Ι) και (ΙΙ). 'Οπου όμως η φόρτιση (Ι) του παγιωμένου φορέα οφείλεται μόνο στις μετατοπίσεις της αρχής του στοιχείου (1), δηλαδή στις μετατοπίσεις

$$[\overline{D}^1] = \begin{bmatrix} \overline{d}_1 \\ \overline{d}_2 \\ \overline{d}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι ακραίες δράσεις παγιώσεως στην περίπτωση αυτή θα δίδονται από τη σχέση

$$[\overline{A}^1] = [\overline{k}^1][\overline{D}^1]$$

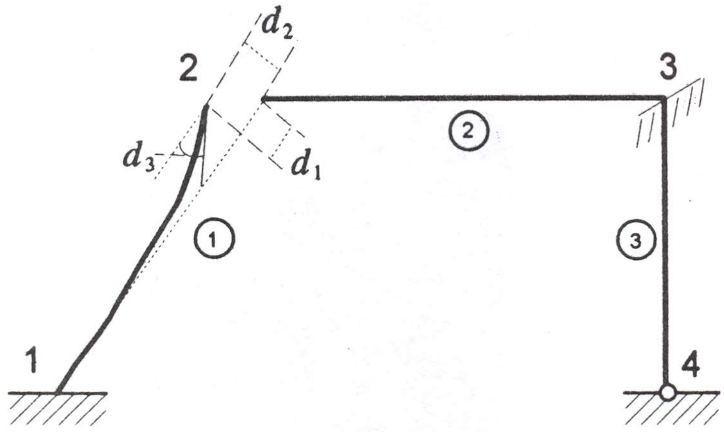
όπου $[\overline{k}^1]$ είναι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου (1) στο καθολικό σύστημα αξόνων.

Οι δράσεις παγιώσεως θα προκύψουν πάλι από την ισορροπία των κόμβων του παγιωμένου φορέα.

ε) Ελαττωματική κατασκευή των μελών

Στα προκατασκευασμένα πλαίσια είναι δυνατό ωρισμένα στοιχεία να παρουσιάζουν αρχικά γεωμετρικά ελαττώματα, π.χ. να έχουν μήκος μικρότερο ή μεγαλύτερο ή να είναι ελαφρώς καμπυλωμένα. Κατά τη συναρμογή τους επί τόπου του έργου, είναι ενδεχόμενο η ατέλεια ν'αρθεί με εξαναγκασμό. Στη περίπτωση αυτή αναπτύσσεται στον φορέα ένταση μορφής αυτεντατικής κατάστασης. Η ένταση αυτή στον φορέα μπορεί να προσδιορισθεί με τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας ως εξής.

Έστω ότι το στοιχείο (1) είναι ελαττωματικό όπως στο Σχ.47



Σχ.46

Για να παγιώσουμε το στοιχείο πρέπει να επιβάλλουμε στο πέρας του τις μετατοπίσεις

$$[D^{1k}] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

συνεπεία των οποίων αναπτύσσονται οι ακραίες δράσεις

$$[A^1] = [k^1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

που μετασχηματίζονται στο καθολικό σύστημα ως

$$[\overline{A}^1] = [\Lambda^1_{PPF}]^T [A^1]$$

Οι δράσεις παγιώσεως των κόμβων υπολογίζονται πάλι από την ισορροπία των κόμβων του παγιωμένου φορέα.