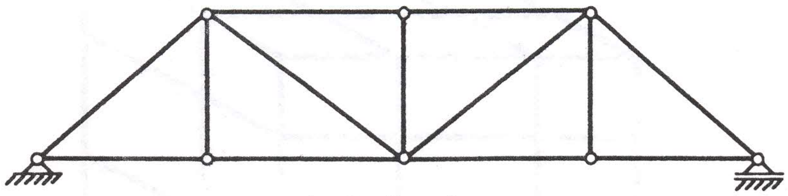
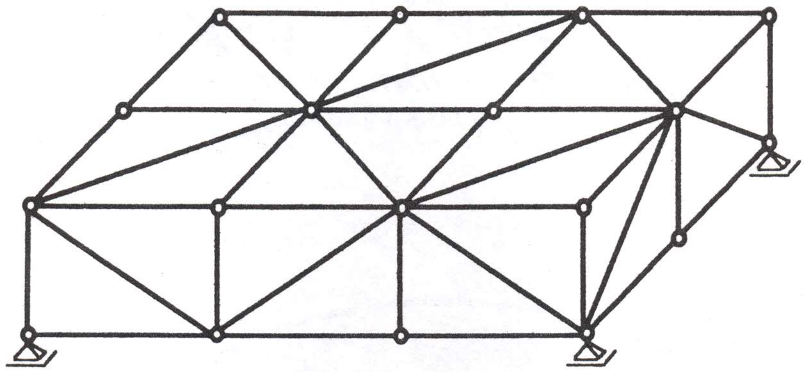
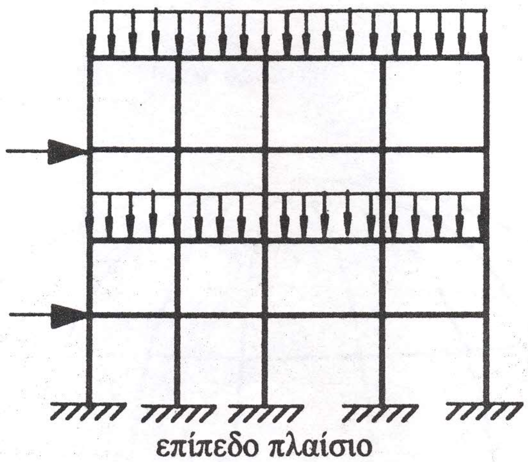


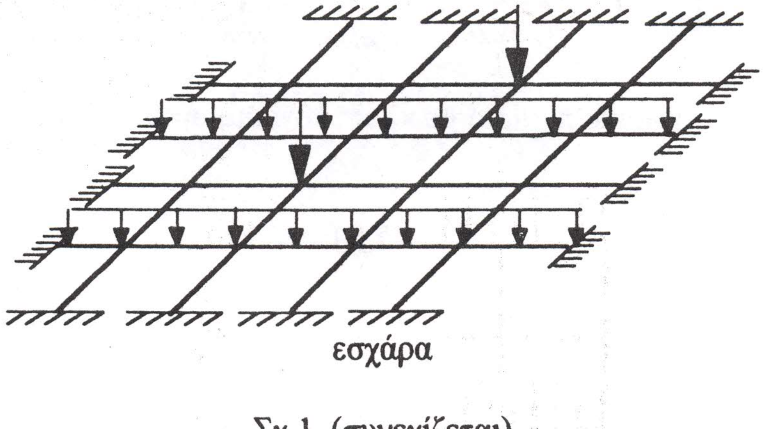
επίπεδο δικτύωμα



χωρικό δικτύωμα

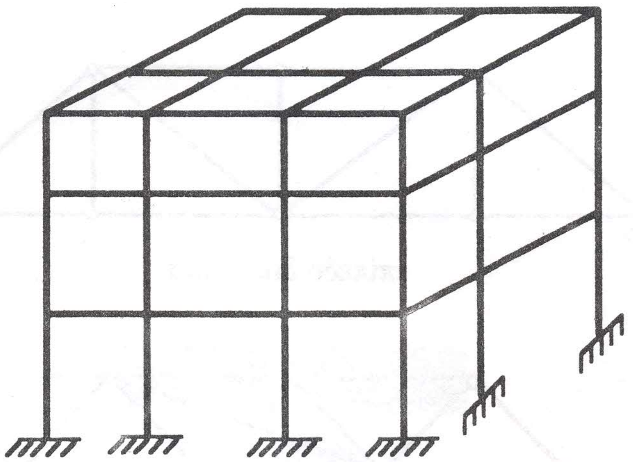


επίπεδο πλαίσιο

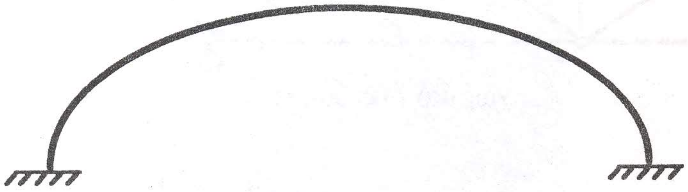


εσχάρα

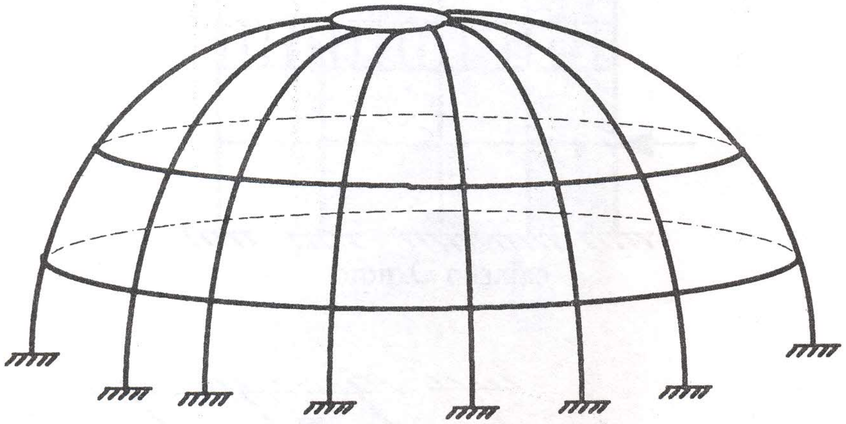
Σχ.1 (συνεχίζεται)



χωρικό πλαίσιο



επίπεδο τόξο

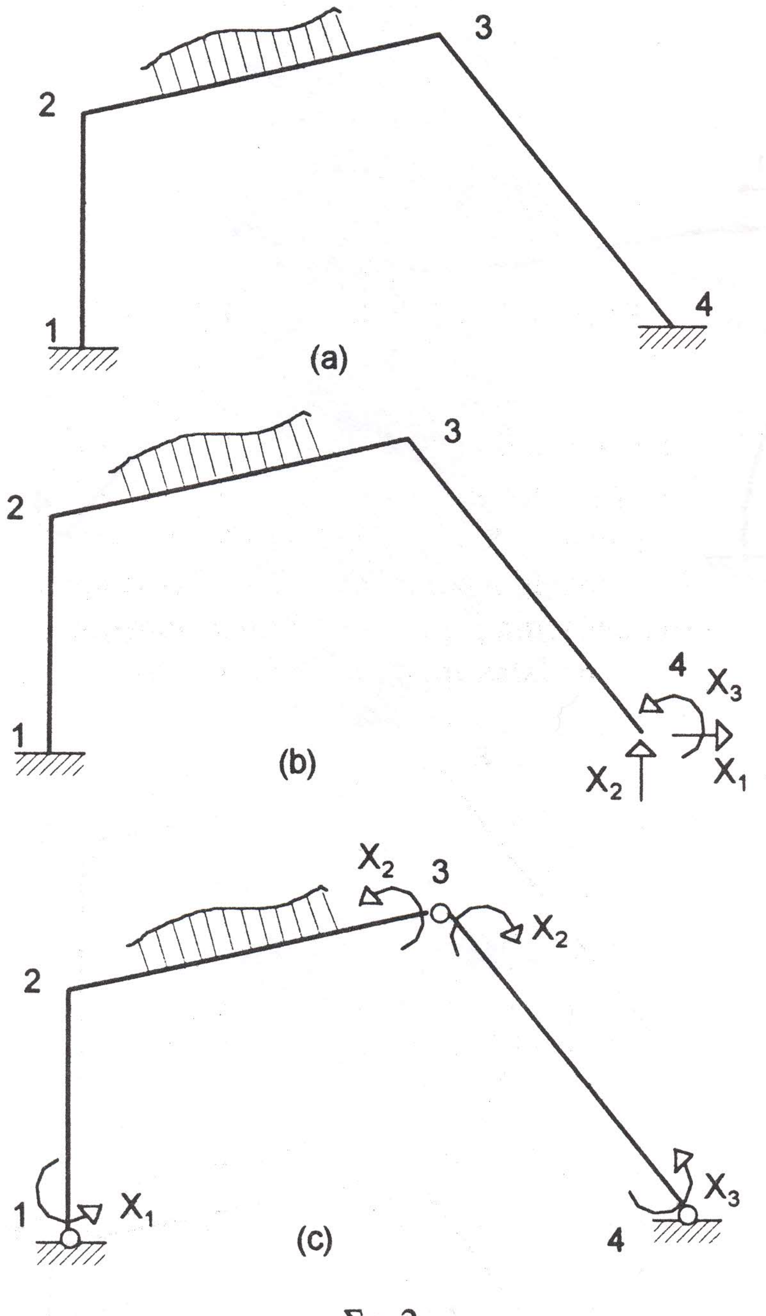


χωρικό πλαίσιο με καμπυλόγραμμους ράβδους

Σχ.1

1. ΒΑΘΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΟΡΙΣΤΙΑΣ ΦΟΡΕΩΝ

Θεωρούμε το φορέα του Σχ.2a. Ο φορέας αυτός είναι τρείς φορές υπερστατικός, δηλαδή ο βαθμός στατικής αοριστίας (ΒΣΑ) είναι 3. Από τα Σχ.2b και Σχ.2c παρατηρούμε ότι η επιλογή των υπερστατικών μεγεθών X_1, X_2, X_3 δεν είναι μονοσήμαντη. Δηλαδή, υπάρχουν πολλές (θεωρητικά άπειρες) επιλογές υπερστατικών μεγεθών. Φυσικά για κάθε μορφή φορέα υπάρχουν ορισμένες επιλογές που είναι καλλίτερες υπό την έννοια ότι μπορούν να απλουστεύσουν την επίλυση.

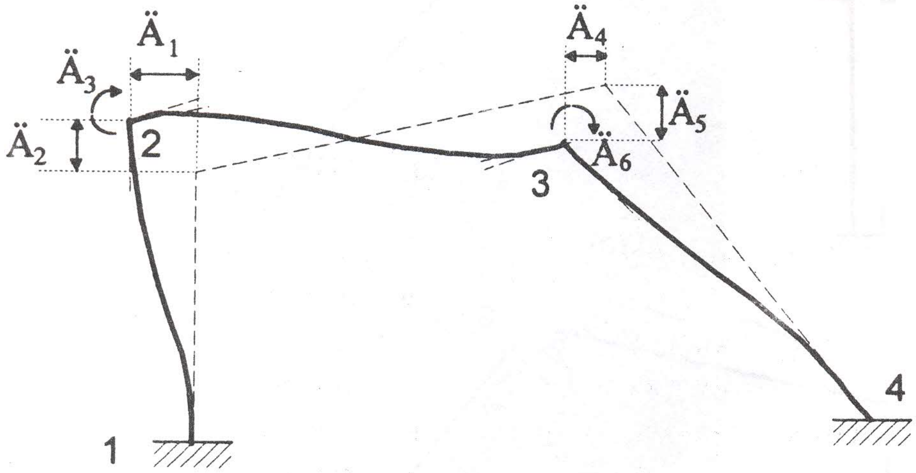


Σχ. 2

2. ΒΑΘΜΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΟΡΙΣΤΙΑΣ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Ως βαθμό κινηματικής αοριστίας (ΒΚΑ) ορίζουμε το πλήθος των δεσμεύσεων που πρέπει να επιβάλουμε στους κόμβους του ώστε όλα τα ραβδωτά στοιχεία να γίνουν αμφίπακτα. Δηλαδή, ο ΒΚΑ εφράζει το πλήθος των ελεύθερων μετατοπίσεων των κόμβων.

Στο Σχ.3 φαίνεται ο ίδιος φορέας ενδεικτά παραμορφωμένος για κάποια φόρτιση. Προφανώς ο ΒΚΑ είναι 6.



Σχ.3

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ 'Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Είναι φανερό ότι ο ΒΚΑ του φορέα είναι 6. Πλην όμως η κινηματική αοριστία του φορέα ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Η στατική επίλυση του φορέα καταλήγει στην επίλυση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Στη μέθοδο των δυνάμεων προσδιορίζονται τα τρία υπερστατικά μεγέθη X_1, X_2, X_3 από ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή όσος είναι ο ΒΣΑ.

Στη μέθοδο των μετατοπίσεων προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων $d_1, d_2, \ldots d_6$ από ένα σύστημα 6 γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή όσος είναι ο ΒΚΑ.

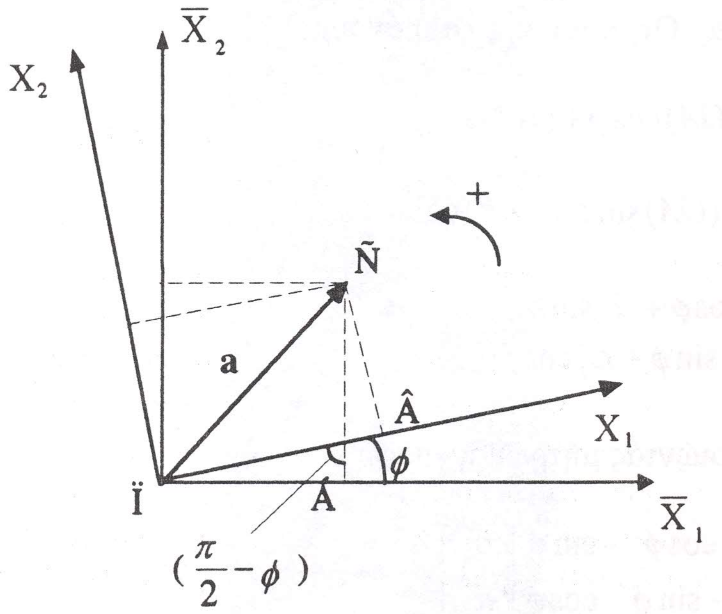
'Οταν φυσικά λύσουμε το φορέα με το "χέρι", το κριτήριο που βαρύνει αποφασιστικά είναι η τάξη του γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που θα επιλύσουμε. 'Αρα, για τον εν λόγω φορέα, η μέθοδος των δυνάμεων είναι προτιμητέα. Ακόμα και αν περιορίσουμε το ΒΚΑ σε 3 αμελώντας τις αξονικές παραμορφώσεις, η μέθοδος μετατοπίσεων (γωνιών στροφής πλέον) δεν είναι η προσφερότερη διότι απαιτούνται σύνθετες γεωμετρικές σχέσεις για τον καθορισμό των μετατοπίσεων.

Χάρις όμως στους υπολογιστές και στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επιλύσεως γραμμικών συστημάτων με ταχύτητα, ακρίβεια, ευστάθεια και οικονομία αποθηκεύσεως στη μνήμη του υπολογιστή, το κριτήριο που βαρύνει αποφασιστικά στην επιλογή της μεθόδου είναι η δυνατότητα αυτοματοποίησης της και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Επομένως, η μέθοδος που επιλύονται, πρέπει να είναι ανεξάρτητη από το είδος του φορέα (δικτύωμα, πλαίσιο, εσχάρα, μικτό), τη γεωμετρία του και τη φόρτιση του. Η επέμβαση του χρήστη πρέπει να περιορίζεται στο να δίνει τα δεδομένα που καθορίζουν τη γεωμετρία του, τις δεσμεύσεις των στηρίξεων, τα φορτία και τις μηχανικές ιδιότητες των στοιχείων. Από αυτή την άποψη η μέθοδος μετατοπίσεων είναι η πλέον πρόσφορος. Τη μέθοδο αυτή παρουσιάζουμε υπό την εξειδικευμένη της μορφής της *'Αμεσης Ακαμψίας*.

Οι σύγχρονες μέθοδοι στατικής είναι στενά συνδεδεμένες με τη γραμμική άλγεβρα και μάλιστα με την άλγεβρα των μητρώων, τα οποία αποτελούν αποκλειστικό εργαλείο για την ανάπτυξη τους και την επικοινωνία με τον υπολογιστή κατά το προγραμματισμό τους. 'Αλλωστε στη διεθνή βιβλιογραφία οι μέθοδοι αυτές είναι γνωστές και ως Μητρωικές Μέθοδοι Στατικής (Matrix Methods in Structural Analysis). Συνεπώς η καλή γνώση και εξοικείωση του σπουδαστή με την 'Αλγεβρα των μητρώων αποτελεί βασική προυπόθεση για την κατανόηση του μαθήματος.

4. ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Σε όλη την ανάπτυξη της μεθόδου ασχολούμεθα με δυνάμεις και μετατοπίσεις, οι οποίες αποτελούν διανυσματικά μεγέθη. Τα μεγέθη αυτά χρειάζεται να αναφερθούν σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων, όταν θεωρούμε ισορροπία δυνάμεων σε κόμβους ή εξετάζουμε το συμβιβαστό των παραμορφώσεων. 'Αρα, πρέπει να γνωρίζουμε πως μετασχηματίζονται οι συνιστώσεις ενός διανύσματος όταν μεταβαίνουμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σ'ένα άλλο που προκύπτει με περιστροφή. Θα εξετάσουμε πρώτα, για λόγους διδακτικούς και μόνο, τον μετασχηματισμό μέσα στο επίπεδο. Αργότερα θα εξετάσουμε και το μετασχηματισμό στον χώρο.



Σχ. 4

Θεωρούμε το σύστημα των αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ (Σχ.4), το οποίο ονομάζουμε αρχικό σύστημα, και ένα άλλο, το Ox_1x_2 το οποίο ονομάζουμε νέο. Το νέο σύστημα έχει προκύψει από το αρχικό με περιστροφή του κατά γωνία ϕ.

Το διάνυσμα **a** = (OP) με αρχή το Ο και πέρας το Ρ έχει συνιστώσες ως προς το αρχικό σύστημα $\bar{\alpha}_1 = (OA)$, $\bar{\alpha}_2 = (AP)$. Το διάνυσμα **a** παριστάνουμε μητρωικά μ'ένα μητρώο στήλη

$$\mathbf{a} = [\bar{\alpha}] = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Γενικά ένα σύμβολο μέσα σ'αγκύλες θα παριστά μητρώο. Η παύλα πάνω στο σύμβολο ή στα στοιχεία δηλώνει ότι αυτά αναφέρονται στο αρχικό σύστημα.

Το ίδιο διάνυσμα $\underline{\mathbf{a}}$ ως προς το νέο σύστημα έχει συνιστώσες α_1 = (OB), α_2 = (BP) και μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{a} = [\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Είναι προφανές ότι αν γνωρίζουμε τις συνιστώσες του διανύσματος ως προς το ένα σύστημα, τότε μπορούμε να τις υπολογίσουμε και ως προς το άλλο. Θα διατυπώσουμε τώρα τη σχέση που τις συνδέει.

Αν προβάλλουμε την τεθλασμένη γραμμή ΟΑΡ (Σχ.4) διαδοχικά πάνω στους άξονες Ox_1 και Ox_2 , λαμβάνουμε

$$(OB) = (OA)\cos\phi + (AP)\sin\phi$$

$$(BP) = -(OA)\sin\phi + (AP)\cos\phi$$

ή

$$\alpha_1 = \overline{\alpha}_1 \cos\phi + \overline{\alpha}_2 \sin\phi$$
$$\alpha_2 = -\alpha_1 \sin\phi + \alpha_2 \cos\phi$$

ή χρησιμοποιώντας μητρωική γραφή

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_2 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

ή υπό συμβολική μορφή

$$[\alpha] = [\Lambda][\overline{\alpha}] \tag{4.4}$$

όπου

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

δηλαδή τέθηκε $\lambda_{11} = \cos\phi$, $\lambda_{12} = \sin\phi$, $\lambda_{21} = -\sin\phi$, $\lambda_{22} = \cos\phi$. Το μητρώο $[\Lambda]$ που ορίζεται από τη σχέση (4.5) ονομάζεται μητρώο μετασχηματισμού.

Από τη σχέση (4.3) μπορούμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες του $[\bar{\alpha}]$ συναρτήσει των συνιστωσών του $[\alpha]$ με επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.3). Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

ή υπό συμβολική μορφή

$$[\bar{\alpha}] = [\Lambda]^{-1}[\alpha] \tag{4.7}$$

Το μητρώο $[\Lambda]^{-1}$ είναι το αντίστροφο του μητρώου $[\Lambda]$ και ορίζεται από τη σχέση

$$[\Lambda]^{-1}[\Lambda] = [\Lambda][\Lambda]^{-1} = [\mathrm{I}] \tag{4.8}$$

όπου

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

είναι το μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων 2x2.

Γενικώς ο υπολογισμός του αντιστρόφου ενός μητρώου είναι από τα πλέον δύσκολα προβλήματα της γραμμικής άλγεβρας. Το μητρώο όμως $[\Lambda]$ έχει ορισμένες "καλές" ιδιότητες και αντιστρέφεται αμέσως. Πράγματι, ας υπολογίσουμε το μητρώο βάσει του γενικού κανόνα αντιστροφής

$$[\Lambda]^{-1} = \frac{[\Lambda^*]^T}{|\Lambda|} \tag{4.10}$$

όπου $|\Lambda|$ είναι η ορίζουσα του μητρώου $[\Lambda]$ και $[\Lambda^*]^T$ είναι το ανάστροφο του μητρώου των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του $[\Lambda]$. Το ανάστροφο ενός μητρώου $[\Lambda]$ συμβολίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία με το $[\Lambda]^T$

(T=transpose) και προκύπτει από το αρχικό με εναλλαγή γραμμών και στήλων.

Είναι επομένως

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \qquad (4.11)$$

Αλγεβρικό συμπλήρωμα ενός στοιχείου λ_{ij} του μητρώου είναι η προσημασμένη ελάσσων ορίζουσα, η οποία προκύπτει από το μητρώο αν αφαιρέσουμε τη γραμμή και τη στήλη που ανήκει το στοιχείο. Το πρόσημο καθορίζεται από τη σχέση

$$sign = (-1)^{i+j}$$

i= ο δείκτης της σειράς του στοιχείου λ_{ij} και
j= ο δείκτης στήλης του στοιχείου λ_{ij}
'Αρα τα στοιχεία του μητρώου $[\Lambda^*]$ είναι

$$[\Lambda^*] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

και

$$[\Lambda^*]^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$
(4.12)

Η σχέση (4.10) με τη βοήθεια των (4.11) και (4.12) δίδει

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = [\Lambda]^T \qquad (4.13)$$

Η σχέση (4.13) εκφράζει τη σπουδαία ιδιότητα που έχει το μητρώο μετασχηματισμού $[\Lambda]$. Δηλαδή, το αντίστροφο του προκύπτει αμέσως, αφού ισούται με το ανάστροφο του. Τα μητρώα που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται ορθοκανονικά.

Για τις γραμμές του μήτρώου $[\Lambda]$ ισχύει

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} = (-\sin\phi)^2 + \cos^2 \phi = 1$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} = 0$$

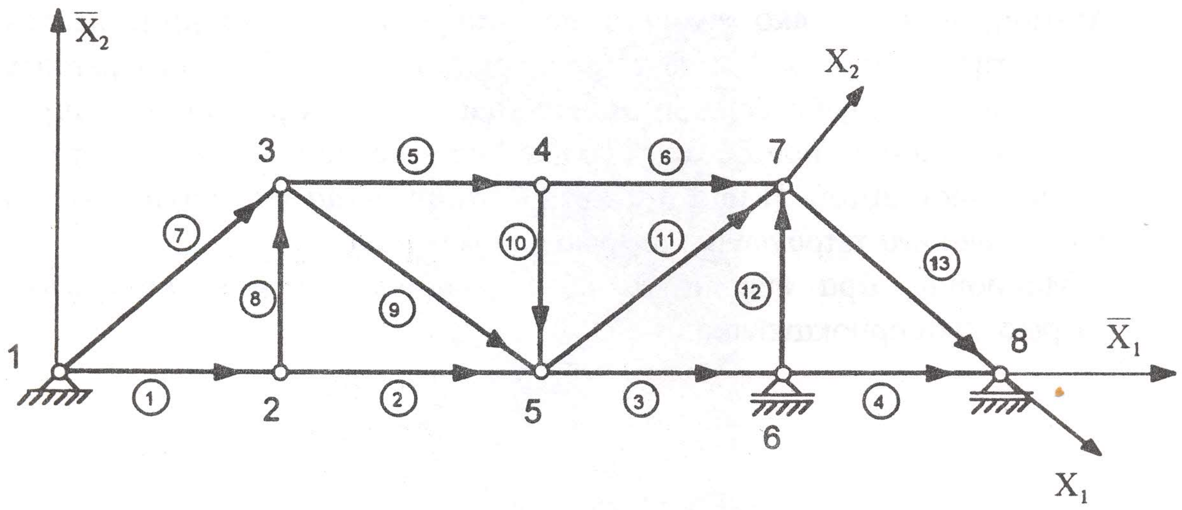
Δηλαδή, το εσωτερικό γινόμενο των στοιχείων μιάς γραμμής με τον εαυτό της ισούται με 1, ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών γραμμών είναι μηδέν. Δηλαδή τα διανύσματα που εκφράζουν οι γραμμές αυτές είναι κάθετα μεταξύ τους. Το ίδιο διαπιστώνουμε και για τις στήλες του μητρώου αυτού. Η ιδιότητα αυτή είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα τετραγωνικό μητρώο ορθοκανονικό.

Μπορούμε, άρα εύκολα να εξακριβώσουμε αν ένα τετραγωνικό μητρώο είναι ορθοκανονικό.

5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΣΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ

Ξεκινάμε πρώτα από το επίπεδο δικτύωμα, το οποίο θα επιλύσουμε με τη μέθοδο της άμεσης ακαμψίας. Αυτό γίνεται για διδακτικούς λόγους, διότι ενώ εισάγονται όλες οι έννοιες της μεθόδου, τα μητρώα που χρειαζόμαστε έχουν μικρές διαστάσεις και γίνεται ευκολότερη η κατανόηση της μεθόδου χωρίς τη πολυπλοκότητα των πράξεων.

Θεωρούμε το δικτύωμα του Σχ.5.



Σχ. 5

Η γεωμετρία του δικτυώματος μέσα στο επίπεδο του x_1x_2 καθορίζεται από τις συντεταγμένες των κόμβων του ως προς ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $\bar{x}_1\bar{x}_2$. Το σύστημα αυτό είναι αυθαίρετο, επιλέγεται όμως για ευνόητους λόγους κατά τρόπο ώστε οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων να συμπίπτουν με τις επικρατέστερες διευθύνσεις των ράβδων. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται καθολικοί άξονες (global axes) και δηλώνονται με μία παύλα πάνω από το γράμμα.

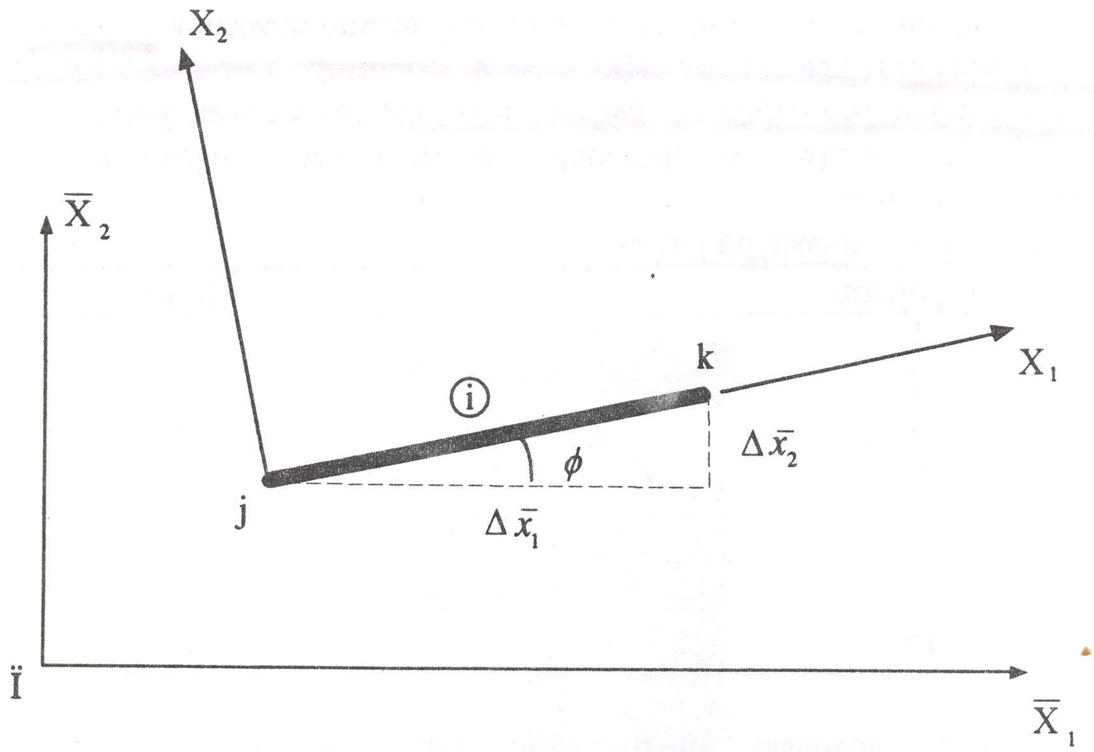
Οι κόμβοι αναγνωρίζονται με ένα αριθμό. Η αρίθμηση των κόμβων μπορεί να είναι αυθαίρετη, αλλά όπως θα δούμε αργότερα κατά την αρίθμηση επιδιώκεται η διαφορά των αριθμών δύο κόμβων που συνδέονται με ράβδο να είναι η κατά το δυνατόν μικρότερη. (Αυτό σχετίζεται με την οικονομία αποθήκευσης στοιχείων στη μνήμη του υπολογιστή).

Οι ράβδοι του φορέα (που στο εξής θα ονομάζονται στοιχεία του φορέα), αριθμούνται (στο Σχ.5 οι αριθμοί φαίνονται μέσα σε κύκλους) και σχετίζονται με τους 2 αριθμούς των κόμβων που συνδέουν. Ο κόμβος που αναφέρεται πρώτος ονομάζεται αρχή του στοιχείου και ο δεύτερος αριθμός πέρας του στοιχείου. Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα, χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο, να δηλώνουμε την αρχή του στοιχείου με τον μικρότερο αριθμό.

Έτσι για το παράδειγμα μας είναι

α/α ράβδου	Αρχή	Πέρας
1	1	2
2	2	5
3	5	6
4	6	8
.	.	.
.	.	.
.	.	.
13	7	8

Η διεύθυνση διαγραφής του στοιχείου αρχή - πέρας ορίζει τη θετική κατεύθυνση του στοιχείου. Σε κάθε στοιχείο i ορίζεται ένα επίσης δεξιόστροφο σύστημα αξόνων x_1x_2. Ο άξονας x_1 του συστήματος συμπίπτει με τον άξονα του στοιχείου και έχει φορά τη θετική κατεύθυνση του στοιχείου. Ο άξονας x_2 είναι κάθετος στο x_1. Το σύστημα των αξόνων x_1x_2 σχετίζεται αποκλειστικά με το στοιχείο και ονομάζονται τοπικοί άξονες (local axes) του στοιχείου. Στο Σχ.5 η θετική φορά των τοπικών αξόνων x_1 των στοιχείων δηλώνεται με βέλη. Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνονται οι τοπικοί άξονες του στοιχείου 13.



Σχ.6

Κάθε τοπικό σύστημα αξόνων $x_1 x_2$ σχετίζεται με το καθολικό σύστημα $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ με ένα μητρώο περιστροφής. Το μητρώο περιστροφής ενός στοιχείου *i* ορίζεται αμέσως αν υπολογισθούν τα $\cos\phi^i$ και $\sin\phi^i$ της γωνίας ϕ^i που σχηματίζει ο τοπικός άξονας x_1 του στοιχείου i με το καθολικό άξονα $\bar{x}_1$. Αυτό επιτυγχάνεται αμέσως χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες αρχής και πέρατος του στοιχείου.

Στο εξής η αρχή και το πέρας ενός στοιχείου θα δηλώνεται με τα γράμματα j, k και θα σημαίνει

j= αρχή　　　　　　　k= πέρας

Οι συντεταγμένες των κόμβων δίδονται στο καθολικό σύστημα. Αν παραστήσουμε με

$\bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j$ τις συντεταγμένες της αρχής j

και

$\bar{x}_1^k, \bar{x}_2^k$ τις συντεταγμένες του πέρατος k

του στοιχείου *i*, προφανώς έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}_1^i &= \bar{x}_1^k - \bar{x}_1^j \\ \Delta\bar{x}_2^i &= \bar{x}_2^k - \bar{x}_2^j \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Το μήκος L^i του στοιχείου δίδεται από τη σχέση

$$(L^i)^2 = (\Delta\bar{x}_1^i)^2 + (\Delta\bar{x}_2^i)^2 = [\Delta\bar{x}_1^i \quad \Delta\bar{x}_2^i]\begin{bmatrix}\Delta\bar{x}_1^i \\ \Delta\bar{x}_2^i\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

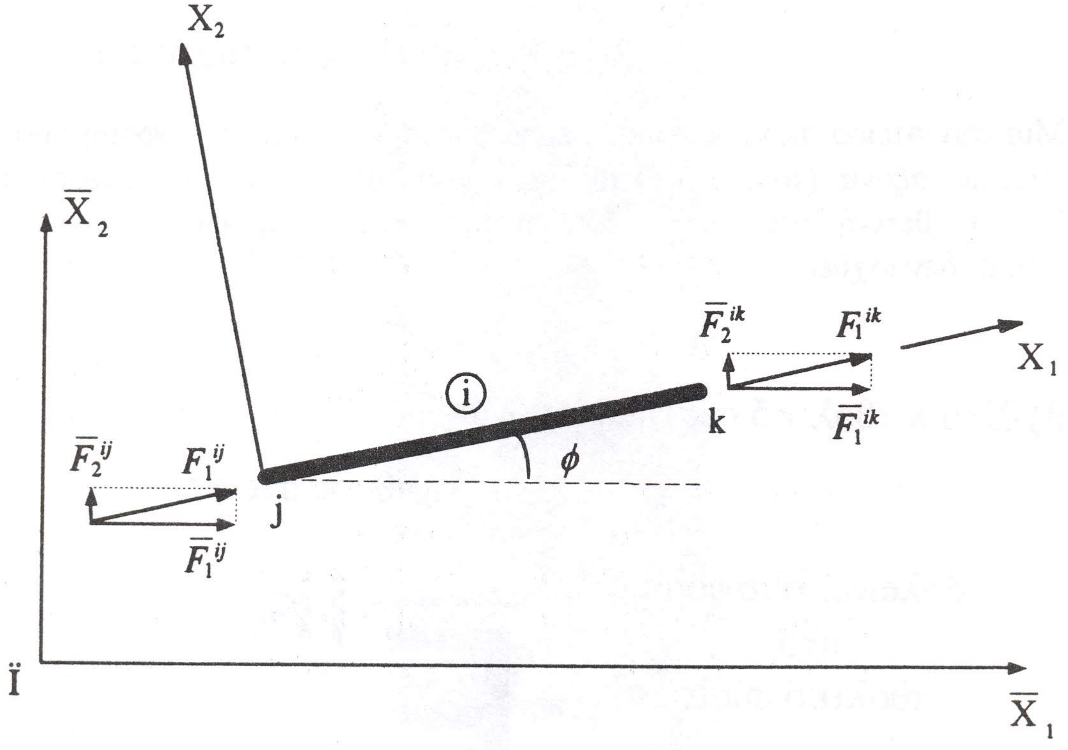
και επομένως

$$\begin{bmatrix}\cos\phi^i = \Delta\bar{x}_1^i / L^i \\ \sin\phi^i = \Delta\bar{x}_2^i / L^i\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

6. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ P1

Το στοιχείο του δικτυώματος παραλαμβάνει μόνο αξονικές δυνάμεις. Αυτό αποτελεί το πρώτο τύπο στοιχείου ραβδωτού φορέα και θα το ονομάζουμε στοιχείο *P*1 (P=plane=επίπεδο).

Σπουδαίο ρόλο, όπως θα δούμε, στην ανάπτυξη της μεθόδου παίζουν οι ακραίες δράσεις στοιχείου, δηλαδή τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στα άκρα του στοιχείου. Στο στοιχείο δικτυώματος, ως γνωστό, αναπτύσσονται μόνο αξονικές δράσεις. Στο Σχ.7 φαίνονται οι ακραίες δράσεις στοιχείου i ως προς το τοπικό και το καθολικό σύστημα αξόνων.

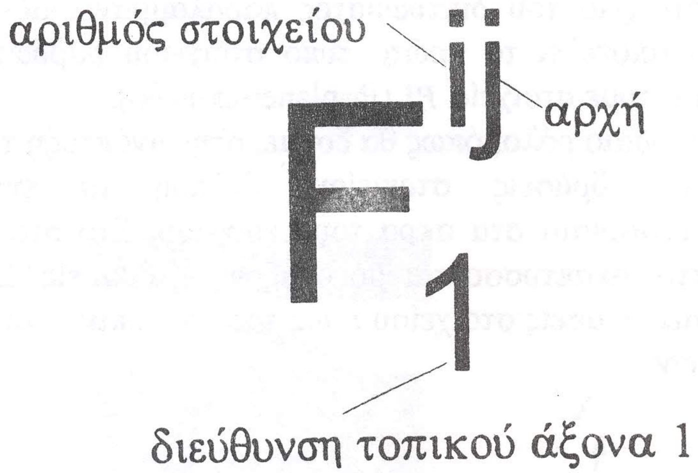


Σχ.7

Μία ακραία δράση συμβολίζεται ως εξής
F= δύναμη στο τοπικό σύστημα αξόνων
$\overline{F}$= δύναμη στο καθολικό σύστημα αξόνων

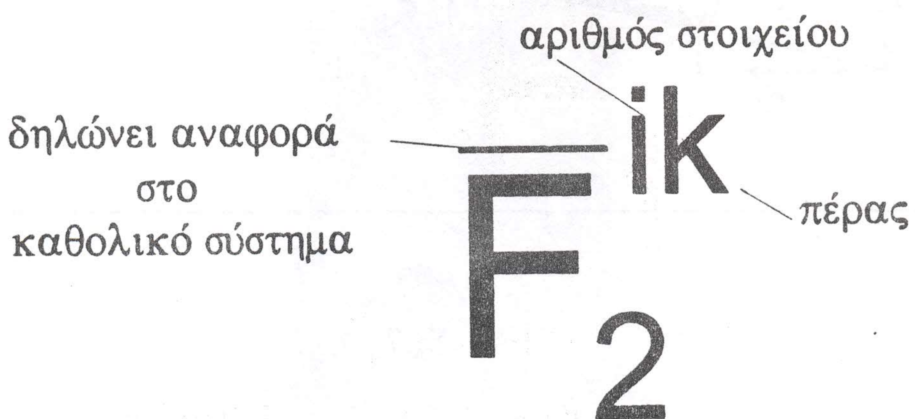
Ο δείκτης κάτω 1 ή 2 : φανερώνει τον άξονα που είναι παράλληλος στο εντατικό μέγεθος
Ο δείκτης άνω (π.χ. i j): Ο πρώτος δηλώνει τον αριθμό του στοιχείου και ο δεύτερος την αρχή ή το πέρας
Η παύλα πάνω : φανερώνει ότι η δύναμη αναφέρεται στο καθολικό σύστημα αξόνων.

α) Στο τοπικό σύστημα αξόνων



Μία συνιστώσα ακραίας δράσης είναι θετική όταν είναι ομόφορη προς το θετικό άξονα (τοπικό ή καθολικό) που αναφέρεται. Η κλασσική θεώρηση, θετική όταν είναι εφελκυστική και αρνητική όταν είναι θλιπτική, δεν ισχύει.

β) Στο καθολικό σύστημα αξόνων



Σχ.8

Ορίζουμε τα τοπικά μητρώα ακραίων δράσεων στοιχείου *P*1 ως

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [A^{ik}] = \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

Επίσης, ορίζουμε το μητρώο όλων των τοπικών ακραίων δράσεων ως

$$[A^i] = \begin{bmatrix} [A^{ij}] \\ [A^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \\ \hline F_1^{ik} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Ομοίως, ορίζουμε τα αντίστοιχα μητρώα ακραίων δράσεων στοιχείου $P1$ στο καθολικό σύστημα αξόνων ως

$$[\overline{A}^{ij}] = \begin{bmatrix} \overline{F}_1^{ij} \\ \overline{F}_2^{ij} \end{bmatrix}, \quad [\overline{A}^{ik}] = \begin{bmatrix} \overline{F}_1^{ik} \\ \overline{F}_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$[A^i] = \begin{bmatrix} [\overline{A}^{ij}] \\ [\overline{A}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{F}_1^{ij} \\ \overline{F}_2^{ij} \\ \hline \overline{F}_1^{ik} \\ \overline{F}_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι οι ακραίες δράσεις έχουν φυσικό νόημα υπό την έννοια της κλασσικής στατικής μόνο στο τοπικό σύστημα αξόνων. Π.χ. η F_1^{ij} είναι αξονική δύναμη, ενώ η $\overline{F}_2^{ij}$ δεν έχει ανάλογο νόημα.

Τα μητρώα ακραίων δράσεων που ορίζονται με τις σχέσεις (6.1), ενώ έχουν πάντοτε μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο, το πρώτο, έχουν διευρυνθεί με ένα μηδενικό στοιχείο για να υπάρχει, χωρίς όμως να είναι απαραίτητο, σύμμορφη συσχέτιση με τα αντίστοιχα μητρώα (6.3) στο καθολικό σύστημα.

Ο μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων από το καθολικό στο τοπικό σύστημα και αντιστρόφως γίνεται με το μητρώο $[\Lambda]$, ήτοι θα είναι

$$\begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi^i & \sin\phi^i \\ -\sin\phi^i & \cos\phi^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{F}_1^{ij} \\ \overline{F}_2^{ij} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

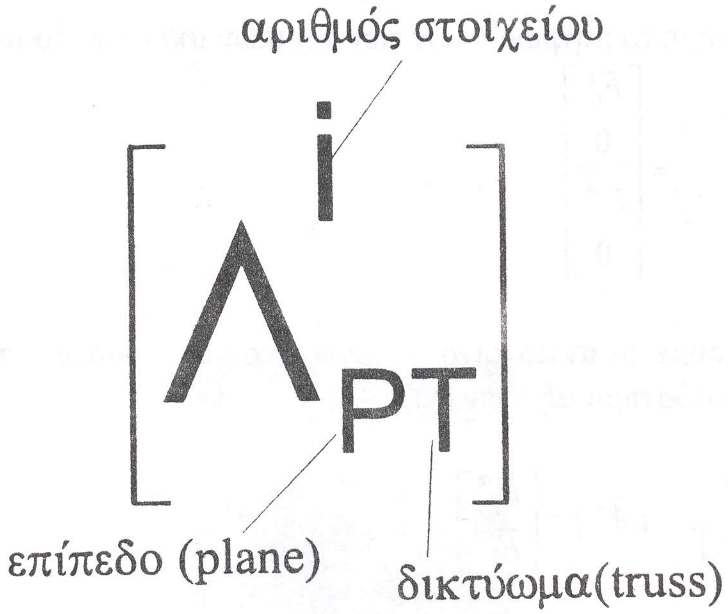
ή

$$[A^{ij}] = [\Lambda^i_{PT}][\overline{A}^{ij}] \tag{6.6}$$

όπου

$$[\Lambda^i_{PT}] = [\Lambda^i]$$

ο συμβολισμός εξηγείται στο Σχ.9.



Σχ. 9 Συμβολισμός μητρώου περιστροφής στοιχείου P1

Όμοιες σχέσεις ισχύουν και για το πέρας k

$$[A^{ik}]=[\Lambda^{i}_{PT}][\overline{A}^{ik}] \qquad (6.7)$$

Επίσης ισχύουν και οι αντίστροφες σχέσεις

$$[\overline{A}^{ij}]=[\Lambda^{i}_{PT}]^{T}[A^{ij}] \qquad (6.8)$$

$$[\overline{A}^{ik}]=[\Lambda^{i}_{PT}]^{T}[A^{ik}] \qquad (6.9)$$

Για τα μητρώα όλων των ακραίων δράσεων ισχύει η σχέση

$$\begin{bmatrix}[A^{ij}]\\ [A^{ik}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\Lambda^{i}_{PT}] & [0]\\ [0] & [\Lambda^{i}_{PT}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\overline{A}^{ij}]\\ [\overline{A}^{ik}]\end{bmatrix} \qquad (6.10)$$

όπου

$$[0]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

είναι το μηδενικό μητρώο διαστάσεως 2x2.

Προφανώς η σχέση (6.10) μετά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού στο δεξιό μέλος δίδει τις δύο σχέσεις (6.6) και (6.7). Περαιτέρω η σχέση (6.10) γράφεται

$$[A^i]=[\Lambda^i_{PPT}][\overline{A}^i] \tag{6.11}$$

και η αντιστροφή της

$$[\overline{A}^i]=[\Lambda^i_{PPT}]^T[A^i] \tag{6.12}$$

όπου τέθηκε

$$[\Lambda^i_{PPT}]=\begin{bmatrix}[\Lambda^i_{PT}] & [0]\\ [0] & [\Lambda^i_{PT}]\end{bmatrix} \tag{6.13}$$

Οι σχέσεις (6.1) έως (6.13) επιδέχονται απλοποίηση, εαν ορίσουμε ως τοπικά μητρώα ακραίων δράσεων τα

$$[A^{ij}]=[F_1^{ij}],\ \ [A^{ik}]=[F_1^{ik}] \tag{6.14}$$

$$[A^i]=\begin{bmatrix}F_1^{ij}\\ F_1^{ik}\end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Η σχέση (6.10) μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix}F_1^{ij}\\ F_1^{ik}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi^i & \sin\phi^i & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\phi^i & \sin\phi^i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{F}_1^{ij}\\ \overline{F}_2^{ij}\\ \overline{F}_1^{ik}\\ \overline{F}_2^{ik}\end{bmatrix} \tag{6.16}$$

ή

$$[A^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}][\overline{A}^i] \tag{6.17}$$

και η αντιστροφή της

$$[\overline{A}^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[A^i] \tag{6.18}$$

όπου το μητρώο $[A^i]$ ορίζεται από τη σχέση (6.15) και

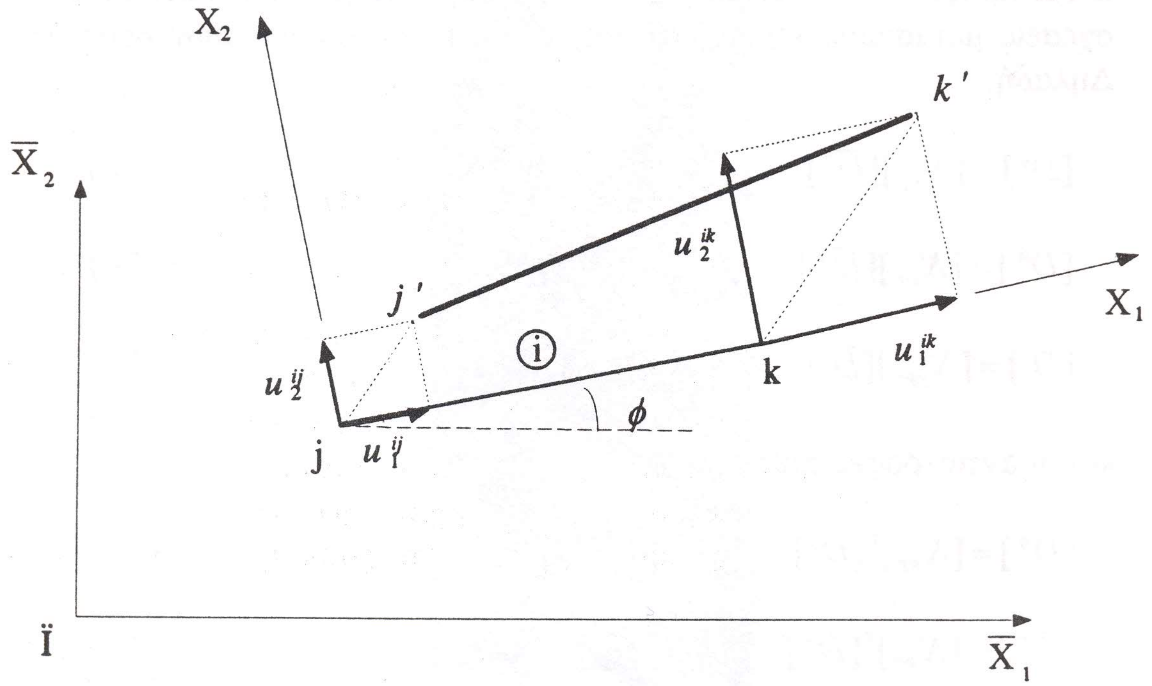
$$[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]=\begin{bmatrix}\cos\phi^i & \sin\phi^i & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\phi^i & \sin\phi^i\end{bmatrix} \tag{6.19}$$

$$[\hat{\Lambda}^{i}_{PPT}]^{T} = \begin{bmatrix} \cos\phi^{i} & 0 \\ \sin\phi^{i} & 0 \\ 0 & \cos\phi^{i} \\ 0 & \sin\phi^{i} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

7. ΜΗΤΡΩΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ P1

'Όταν το δικτύωμα παραμορφώνεται συνεπεία κάποιας φορτίσεως οι κόμβοι του, επομένως και τα άκρα των ράβδων που συντρέχουν σ'αυτούς, υφίστανται μετατοπίσεις. Κατ' αντιστοιχία με τις ακραίες δράσεις θα ορίσουμε τα μητρώα των μετατοπίσεων.

Στο Σχ.10 φαίνεται ένα στοιχείο P1 πριν και μετά την παραμόρφωση. Επειδή το στοιχείο υφίστανται μόνο αξονική καταπόνηση ο άξονας του παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση.



Σχ.10

Ορίζουμε τα εξής μητρώα ακραίων μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων

$$[D^{ij}] = \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \end{bmatrix} \quad [D^{ik}] = \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D^{ij}] \\ [D^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ - \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Ομοίως ορίζουμε και τα αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα αξόνων

$$[\overline{D}^{ij}] = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^{ij} \\ \overline{u}_2^{ij} \end{bmatrix}, \quad [\overline{D}^{ik}] = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^{ik} \\ \overline{u}_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

$$[\overline{D}^{i}] = \begin{bmatrix} [\overline{D}^{ij}] \\ [\overline{D}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^{ij} \\ \overline{u}_2^{ij} \\ \hdashline \overline{u}_1^{ik} \\ \overline{u}_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Είναι προφανές ότι για τα μητρώα των ακραίων μετατοπίσεων ισχύουν σχέσεις μετασχηματισμού αντίστοιχες μ'εκείνες των ακραίων δράσεων. Δηλαδή,

$$[D^{ij}] = [\Lambda^{i}_{PT}][\overline{D}^{ij}] \tag{7.5}$$

$$[D^{ik}] = [\Lambda^{i}_{PT}][\overline{D}^{ik}] \tag{7.6}$$

$$[D^{i}] = [\Lambda^{i}_{PPT}][\overline{D}^{i}] \tag{7.7}$$

και οι αντίστροφες τους

$$[\overline{D}^{ij}] = [\Lambda^{i}_{PT}]^{T}[D^{ij}] \tag{7.8}$$

$$[\overline{D}^{ik}] = [\Lambda^{i}_{PT}]^{T}[D^{ik}] \tag{7.9}$$

$$[\overline{D}^{i}] = [\Lambda^{i}_{PPT}]^{T}[D^{i}] \tag{7.10}$$

Είναι φανερό ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις u_2^{ij} και u_2^{ik} δεν παράγουν ένταση στη ράβδο παρά μόνο την μεταφέρουν εγκάρσια και την περιστρέφουν ως στερεό σώμα. Είναι σκόπιμο, άρα να ορίσουμε μητρώα τοπικών ακραίων μετατοπίσεων αντίστοιχα των (6.14) και (6.15) των ακραίων δράσεων. Ήτοι

$$[D^{ij}] = [u_1^{ij}], \quad [D^{ik}] = [u_1^{ik}] \tag{7.11}$$

$$[D^{i}] = \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ik} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Για τα μητρώα (7.4) και (7.12) ισχύουν σχέσεις μετασχηματισμού ανάλογες των (6.17) και (6.18), ήτοι

$$[D^i] = [\hat{\Lambda}^i_{PPT}][\overline{D}^i] \tag{7.13}$$

$$[\overline{D}^i] = [\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[D^i] \tag{7.14}$$

8. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ P1

Θα αναζητήσουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις ακραίες μετατοπίσεις και τις ακραίες δράσεις ενός στοιχείου *P1*, υπό την εξής έννοια.

Αν στα άκρα του στοιχείου *P1* δώσουμε τις μετατοπίσεις $[D^i]$ ποιές είναι οι δράσεις $[A^i]$ που πρέπει να ασκηθούν στο στοιχείο ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία του ή υπό άλλη διατύπωση, ποιές δυνάμεις $[A^i]$ πρέπει να ασκηθούν στ' άκρα του στοιχείου για να παραχθούν μετατοπίσεις $[D^i]$. Η σχέση όπως αναμένεται θα είναι μία γραμμική σχέση της μορφής

$$[A^i]=[k^i][D^i] \qquad (8.1)$$

ή

$$\begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_1^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_1^{ik} \end{bmatrix} \qquad (8.2)$$

Τα στοιχεία k_{ij}^i του μητρώου $[k^i]$ μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν εάν εξετάσουμε το φυσικό νόημα τους. Πράγματι, αν θέσουμε $u_1^{ij}=1$ και $u_1^{ik}=0$, τότε η σχέση (8.2) δίδει

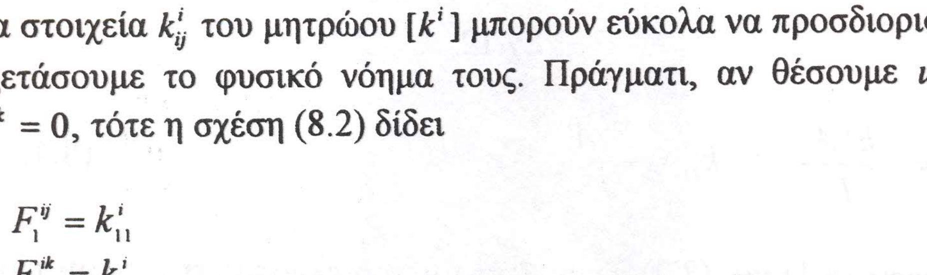
$$F_1^{ij}=k_{11}^i$$
$$F_1^{ik}=k_{21}^i$$

δηλαδή είναι

k_{11}^i= η αξονική δύναμη που αναπτύσσεται στο άκρο j, όταν επιβληθεί σ'αυτό μετατόπιση $u_1^{ij}=1$, ενώ το άκρο k παραμένει αμετάθετο.

k_{21}^i= η αξονική δύναμη που αναπτύσσεται στο άκρο k, όταν στο άκρο j επιβάλλεται μετατόπιση $u_1^{ij}=1$, ενώ το k παραμένει αμετάθετο.

Δηλαδή είναι οι ακραίες δράσεις του προβλήματος του Σχ.11.

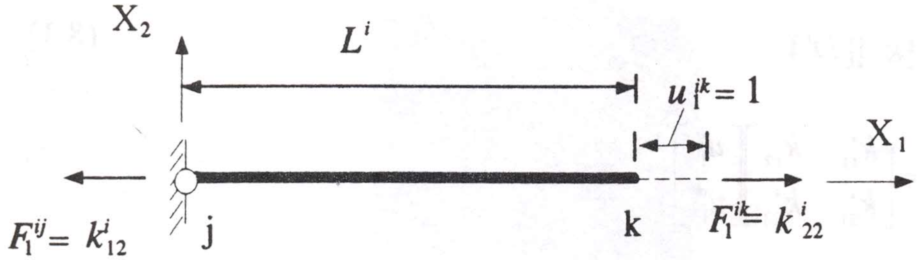


Σχ.11

Είναι φανερό ότι οι δυνάμεις αυτές δίδονται από τις σχέσεις

$$k_{11}^{i} = \frac{E^{i} A^{i}}{L^{i}}, \qquad k_{21}^{i} = -\frac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} \tag{8.3}$$

Καθ'όμοιο τρόπο υπολογίζονται και τα στοιχεία k_{12}^{i} και k_{22}^{i} του μητρώου $[k^{i}]$. Δίνουμε $u_1^{ik} = 1$ και $u_1^{ij} = 0$ (Σχ.12) και λαμβάνουμε



Σχ.12

$$k_{12}^{i} = -\frac{E^{i} A^{i}}{L^{i}}, \qquad k_{22}^{i} = \frac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} \tag{8.4}$$

Στις σχέσεις (8.1) και (8.2) είναι E^{i}=το μέτρο ελαστικότητος του υλικού του στοιχείου και A^{i} η σταθερή διατομή τους. Προφανώς οι σχέσεις αυτές ισχύουν για στοιχεία σταθερής διατομής. Εάν η διατομή του στοιχείου είναι μεταβλητή, τότε οι ανάλογες σχέσεις θα πρέπει να εξαχθούν, είτε με τη μέθοδο των δυνάμεων (ακριβής μέθοδος), είτε με προσεγγιστικές τεχνικές (κατά τμήματα σταθερή διατομή του στοιχείου και στατική συμπύκνωση, ή με συναρτήσεις σχήματος βάσει της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων). 'Αρα για στοιχείο *P1* σταθερής διατομής το μητρώο ακαμψίας υπολογίζεται από τη σχέση

$$[k^{i}] = \begin{bmatrix} \dfrac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} & -\dfrac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} \\ -\dfrac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} & \dfrac{E^{i} A^{i}}{L^{i}} \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Το μητρώο $[k^{i}]$ ονομάζεται *ολικό τοπικό μητρώο ακαμψίας του στοιχείου* και είναι συμμετρικό βάσει της αρχής της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων. Η σχέση (8.1) αποτελεί τις καταστατικές εξισώσεις του στοιχείου. Το μητρώο $[k^i]$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Αυτό είναι προφανές αφού η ορίζουσα του είναι μηδενική, $|k^i| = 0$. Η φυσική ερμηνεία της μη αντιστρεψιμότητος της σχέσεως (8.1) σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να προσδιορισθούν οι ακραίες μετατοπίσεις όταν δίδονται οι ακραίες δράσεις του στοιχείου, διότι στις πραγματικές μετατοπίσεις υπεισέρχονται και οι μετατοπίσεις του στοιχείου ως στερεού σώματος. Το πρόβλημα είναι το αντίστοιχο του δεύτερου προβλήματος συνοριακών τιμών της θεωρίας της ελαστικότητας, όπου το πεδίο των μετατοπίσεων δεν ύπολογίζεται μονοσήμαντα, όταν δίδονται οι τάσεις στο σύνορο.

Τα στοιχεία k^i_{ij} του μητρώου ακαμψίας μπορούν να υπολογισθούν με ενεργειακή μέθοδο.

Το έργο παραμορφώσεως του στοιχείου συνεπεία των μετακινήσεων u_1^{ij} και u_1^{ik} των άκρων του δίδεται από τη σχέση

$$U = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_{11}\tau_{11}dx_1dx_2dx_3 = \iiint_V \frac{1}{2}E\varepsilon_{11}^2dx_1dx_2dx_3 \tag{8.6}$$

είναι όμως

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L^i} = \frac{u_1^{ik} - u_1^{ij}}{L^i}$$

και η ανωτέρω σχέση μετά την ολοκλήρωση δίδει

$$U = \frac{1}{2}\frac{E^iA^i}{L^i}(u_1^{ik} - u_1^{ij})^2 \tag{8.7}$$

Οι συνολικές δυνάμεις F_1^{ij} και F_1^{ik} προκύπτουν με παραγώγιση της ανωτέρω σχέσεως, ως προς τις μετατοπίσεις u_1^{ij} και u_1^{ik}. Άρα

$$F_1^{ij} = \frac{\partial U}{\partial u_1^{ij}} = -\frac{E^iA^i}{L^i}(u_1^{ik} - u_1^{ij}) \tag{8.8}$$

$$F_1^{ik} = \frac{\partial U}{\partial u_1^{ik}} = \frac{E^iA^i}{L^i}(u_1^{ik} - u_1^{ij}) \tag{8.9}$$

Από τις σχέσεις (8.8) και (8.9) λαμβάνουμε:

α) Για $u_1^{ij} = 1,\ u_1^{ik} = 0$

$$k_{11}^i = F_1^{ij} = \frac{E^iA^i}{L^i} \qquad k_{21}^i = F_1^{ik} = -\frac{E^iA^i}{L^i} \tag{8.10}$$

β) Για $u_1^{ij} = 0,\ u_1^{ik} = 1$

$$k_{12}^i = F_1^{ij} = -\frac{E^iA^i}{L^i} \qquad k_{22}^i = F_1^{ik} = \frac{E^iA^i}{L^i} \tag{8.11}$$

Δηλαδή λαμβάνονται τα στοιχεία του μητρώου ακαμψίας $[k^i]$.

Η συμμετρία του μητρώου ακαμψίας αποδεικνύεται εύκολα ως εξής. Το έργο παραμορφώσεως ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή

$$U = \frac{1}{2}[F_1^{ij} \quad F_1^{ik}]\begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_1^{ik} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[u_1^{ij} \quad u_1^{ik}]\begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_1^{ik} \end{bmatrix}$$

ή

$$U = \frac{1}{2}[A^i]^T[D^i] = \frac{1}{2}[D^i]^T[A^i] \qquad (8.12)$$

Η σχέση (8.12) με την βοήθεια της (8.1) γράφεται

$$[D^i]^T[k^i]^T[D^i] = [D^i]^T[k^i][D^i]$$

ή

$$[D^i]^T([k^i]^T - [k^i])[D^i] = 0$$

Επειδή η ανωτέρω σχέση ισχύει για κάθε $[D^i]$ πρέπει

$$[k^i]^T - [k^i] = 0 \quad \text{ή} \quad [k^i]^T = [k^i]$$

δηλαδή το μητρώο $[k^i]$ είναι συμμετρικό αφού είναι ίσο με το ανάστροφο του.

9. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ Ρ1 ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Το ολικό καθολικό μητρώο ακαμψίας είναι εκείνο που συνδέει το μητρώο $[\overline{A}^i]$ με το $[\overline{D}^i]$ βάσει σχέσης ανάλογης με την (8.1). Δηλαδή

$$[\overline{A}^i]=[\overline{k}^i][\overline{D}^i] \tag{9.1}$$

Από τη σχέση (6.18) έχουμε

$$[\overline{A}^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[A^i]$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.1) λαμβάνουμε

$$[\overline{A}^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[k^i][D^i]$$

Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της σχέσεως (7.13) δίδει

$$[\overline{A}^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[k^i][\hat{\Lambda}^i_{PPT}][\overline{D}^i]$$
(9.2)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (9.1) και (9.2) λαμβάνουμε

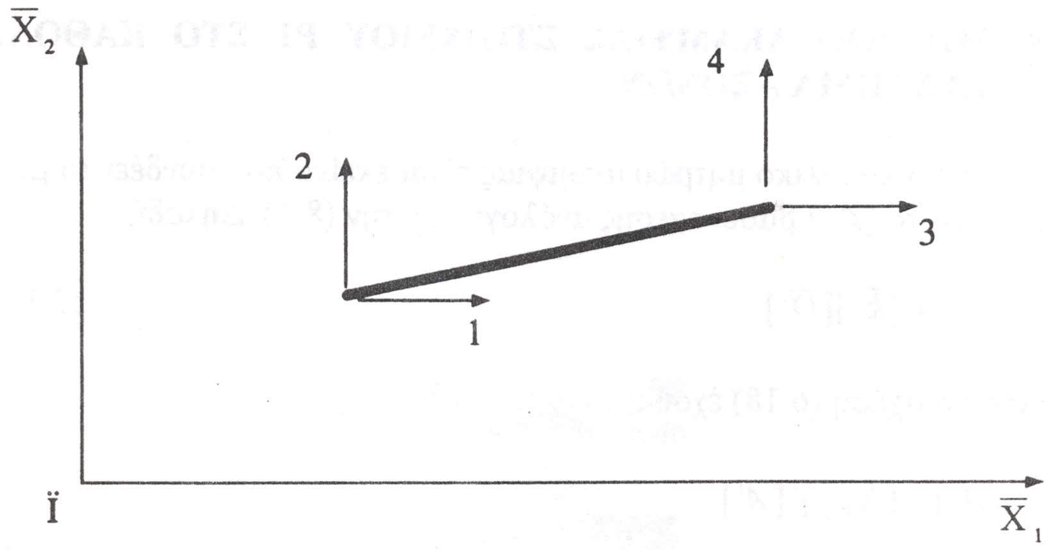
$$[\overline{k}^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T[k^i][\hat{\Lambda}^i_{PPT}] \tag{9.3}$$

Το μητρώο (9.3) έχει διαστάσεις 4x4 είναι δηλαδή της μορφής

$$[\overline{k}^i]=\left[\begin{array}{cc|cc} \overline{k}^i_{11} & \overline{k}^i_{12} & \overline{k}^i_{13} & \overline{k}^i_{14} \\ \overline{k}^i_{21} & \overline{k}^i_{22} & \overline{k}^i_{23} & \overline{k}^i_{24} \\ \hline \overline{k}^i_{31} & \overline{k}^i_{32} & \overline{k}^i_{33} & \overline{k}^i_{34} \\ \overline{k}^i_{41} & \overline{k}^i_{42} & \overline{k}^i_{43} & \overline{k}^i_{44} \end{array}\right] \tag{9.4}$$

Το φυσικό νόημα του τυπικού στοιχείου $\overline{k}^i_{ij}$ του μητρώου ακαμψίας (9.4) προκύπτει ως εξής.

Ονομάζουμε με 1, 2 τις διευθύνσεις κατά τους άξονες $\overline{x}_1$ $\overline{x}_2$ στο άκρο j και με 3,4 τις διευθύνσεις κατά τους ίδιους άξονες στο άκρο k (βλέπε Σχ.13).



Σχ. 13

Τότε είναι

k_{ij}=δύναμη κατά τη διεύθυνση i για μοναδιαία μετατόπιση κατά τη διεύθυνση j, όταν οι μετατοπίσεις κατά τις άλλες διευθύνσεις είναι μηδέν.

Η σχέση (9.1) γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} [\bar{A}^{ij}] \\ [\bar{A}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{k}^i_{jj}] & [\bar{k}^i_{jk}] \\ [\bar{k}^i_{kj}] & [\bar{k}^i_{kk}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{D}^{ij}] \\ [\bar{D}^{ik}] \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

Όπου τα μητρώα $[\bar{k}^i_{jj}]$, $[\bar{k}^i_{jk}]$, $[\bar{k}^i_{kj}]$, $[\bar{k}^i_{kk}]$ έχουν προκύψει με επιμερισμό του μητρώου (9.4) σε τέσσερα υπομητρώα διαστάσεων 2x2. Δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} [\bar{k}^i_{jj}] &= \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{11} & \bar{k}^i_{12} \\ \bar{k}^i_{21} & \bar{k}^i_{22} \end{bmatrix}, \quad [\bar{k}^i_{jk}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{13} & \bar{k}^i_{14} \\ \bar{k}^i_{23} & \bar{k}^i_{24} \end{bmatrix} \\ [\bar{k}^i_{kj}] &= \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{31} & \bar{k}^i_{32} \\ \bar{k}^i_{41} & \bar{k}^i_{42} \end{bmatrix}, \quad [\bar{k}^i_{kk}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{33} & \bar{k}^i_{34} \\ \bar{k}^i_{43} & \bar{k}^i_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Η σχέση (9.5) μετά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού αναπτύσσεται στις ακόλουθες δύο σχέσεις

$$[\bar{A}^{ij}] = [\bar{k}^i_{jj}][\bar{D}^{ij}] + [\bar{k}^i_{jk}][\bar{D}^{ik}] \tag{9.7}$$

$$[\bar{A}^{ik}] = [k^i_{kj}][\bar{D}^{ij}] + [\bar{k}^i_{kk}][\bar{D}^{ik}] \tag{9.8}$$

10. ΜΗΤΡΩΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Θεωρούμε το δικτύωμα του Σχ.14. Οι επικόμβιες δράσεις είναι δύο ειδών: Εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία και αντιδράσεις. Σε κάθε κόμβο υπάρχουν δύο συνιστώσες. Η μία κατά τον άξονα $\bar{x}_1$ και η άλλη κατά τον $\bar{x}_2$. Για το συγκεκριμένο δικτύωμα έχουμε:

$$[\bar{P}^{(1)}]=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(1)}\\ \bar{P}_2^{(1)}\end{bmatrix},\quad [\bar{P}^{(2)}]=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(2)}\\ \bar{P}_2^{(2)}\end{bmatrix},\quad [\bar{P}^{i}]=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(i)}\\ \bar{P}_2^{(i)}\end{bmatrix},\quad [\bar{P}^{(6)}]=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(6)}\\ \bar{P}_2^{(6)}\end{bmatrix} \tag{10.1}$$

Οι επικόμβιες δράσεις αναφέρονται στο καθολικό σύστημα.

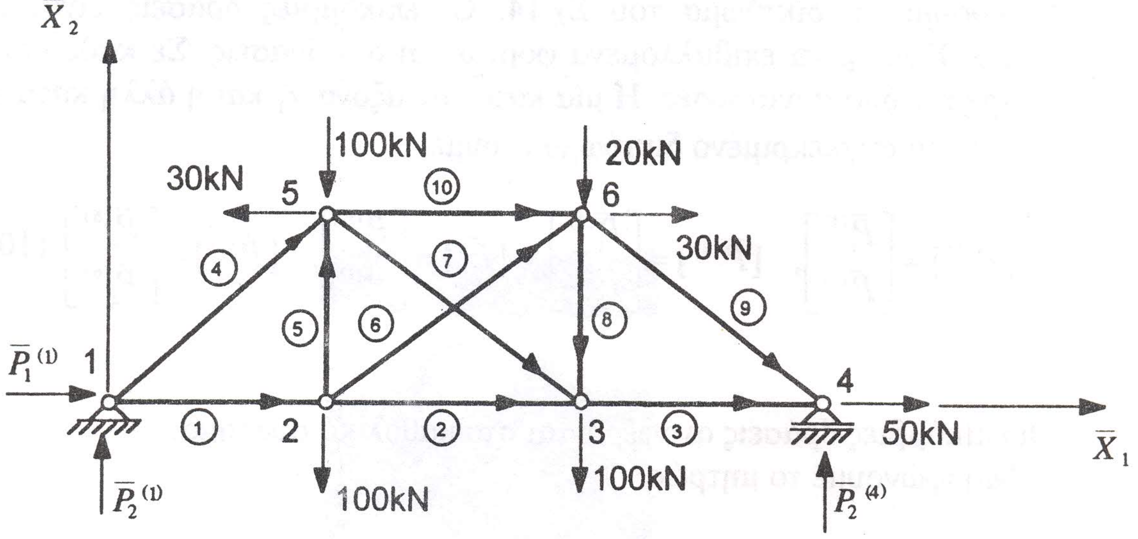
Μορφώνουμε το μητρώο

$$[\hat{P}]=\begin{bmatrix}[\bar{P}^{(1)}]\\ [\bar{P}^{(2)}]\\ .\\ .\\ [\bar{P}^{(i)}]\\ .\\ .\\ [\bar{P}^{(6)}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(1)}\\ \bar{P}_2^{(1)}\\ \hdashline \bar{P}_1^{(2)}\\ \bar{P}_2^{(2)}\\ \hdashline .\\ \hdashline \bar{P}_1^{(i)}\\ \bar{P}_2^{(i)}\\ \hdashline .\\ \hdashline \bar{P}_1^{(6)}\\ \bar{P}_2^{(6)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{P}_1\\ \hat{P}_2\\ \hat{P}_3\\ \hat{P}_4\\ \hat{P}_5\\ \hat{P}_6\\ \hat{P}_7\\ \hat{P}_8\\ \hat{P}_9\\ \hat{P}_{10}\\ \hat{P}_{11}\\ \hat{P}_{12}\end{bmatrix} \tag{10.2}$$

Το μητρώο $[\hat{P}]$ του οποίου τα στοιχεία είναι όλες οι επικόμβιες δράσεις, εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις, ονομάζεται *μητρώο όλων των επικόμβιων δράσεων*. Είναι φανερό ότι οι συνιστώσες του κόμβου i, θα καταλάβουν τις θέσεις $2i-1$ και $2i$ στο μητρώο $[\hat{P}]$. Δηλαδή

$$[\bar{P}^{(i)}]=\begin{bmatrix}\bar{P}_1^{(i)}\\ \bar{P}_2^{(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{P}_{2i-1}\\ \hat{P}_{2i}\end{bmatrix} \tag{10.3}$$

Για το παράδειγμα του Σχ.14 το μητρώο όλων των επικόμβιων δράσεων είναι



Σχ.14

$$[\hat{P}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hdashline 0 \\ -100 \\ \hdashline 0 \\ -100 \\ \hdashline +50 \\ \hat{P}_8 \\ \hdashline -30 \\ -100 \\ \hdashline +30 \\ -20 \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

Στο ανωτέρω μητρώο $[\hat{P}]$ τα στοιχεία $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_8$ αντιστοιχούν στις αντιδράσεις (δεσμευμένους κόμβους) και είναι άγνωστα, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι γνωστά και αντιστοιχούν σε άγνωστες μετατοπίσεις.

Αντίστοιχα με το μητρώο όλων των επικόμβιων δράσεων ορίζουμε *το μητρώο όλων των επικόμβιων μετατοπίσεων*. Για το κόμβο i είναι

$$[\overline{\Delta}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \overline{\Delta}_1^{(i)} \\ \overline{\Delta}_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{2i-1} \\ \hat{\Delta}_{2i} \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

'Αρα για το δικτύωμα του Σχ.14 το μητρώο όλων των επικόμβιων μετατοπίσεων είναι

$$
[\hat{\Delta}] = \begin{bmatrix} [\overline{\Delta}^{(1)}] \\ [\overline{\Delta}^{(2)}] \\ \cdot \\ \cdot \\ [\overline{\Delta}^{(i)}] \\ \cdot \\ \cdot \\ [\overline{\Delta}^{(6)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1 \\ \hat{\Delta}_2 \\ \hat{\Delta}_3 \\ \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_8 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hat{\Delta}_{10} \\ \hat{\Delta}_{11} \\ \hat{\Delta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\Delta}_3 \\ \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hat{\Delta}_7 \\ 0 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hat{\Delta}_{10} \\ \hat{\Delta}_{11} \\ \hat{\Delta}_{12} \end{bmatrix} \qquad (10.6)
$$

Στο μητρώο $[\hat{\Delta}]$ οι συνιστώσες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_8$ που αντιστοιχούν στις στηρίξεις είναι γνωστές ($\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_8 = 0$). Οι υπόλοιπες συνιστώσες είναι άγνωστες και αποτελούν τις ελεύθερες μετατοπίσεις των κόμβων. 'Οπως και οι συνιστώσες του μητρώου $[\hat{P}]$, έτσι και οι συνιστώσες του μητρώου $[\hat{\Delta}]$ αναφέρονται στο καθολικό σύστημα αξόνων.

11. ΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Το επόμενο βήμα της μεθόδου άμεσης ακαμψίας είναι η αναζήτηση σχέσεως μεταξύ των μητρώων $[\hat{P}]$ και $[\hat{\Delta}]$. Είναι φανερό ότι θα πρόκειται για μία γραμμική σχέση της μορφής

$$\hat{P}_i = \hat{k}_{i1}\hat{\Delta}_1 + \hat{k}_{i2}\hat{\Delta}_2 + \ldots + \hat{k}_{ij}\hat{\Delta}_j + \ldots + \hat{k}_{iN}\hat{\Delta}_{iN} \qquad (11.1)$$

όπου $\hat{k}_{ij}$ είναι σταθερές που εκφράζουν τους συντελεστές επιρροής των επικόμβιων μετατοπίσεων στην διαμόρφωση της επικόμβιας δράσης $\hat{P}_i$. Γράφοντας τη σχέση (11.1) για i=1,2,...N, όπου N είναι το σύνολο των στοιχείων των μητρώων $[\hat{P}]$ και $[\hat{\Delta}]$ λαμβάνουμε

$$\hat{P}_1 = \hat{k}_{11}\hat{\Delta}_1 + \hat{k}_{12}\hat{\Delta}_2 + \ldots + \hat{k}_{1N}\hat{\Delta}_N$$

$$\hat{P}_2 = \hat{k}_{21}\hat{\Delta}_1 + \hat{k}_{22}\hat{\Delta}_2 + \ldots + \hat{k}_{2N}\hat{\Delta}_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{P}_N = \hat{k}_{N1}\hat{\Delta}_1 + \hat{k}_{N2}\hat{\Delta}_2 + \ldots + \hat{k}_{NN}\hat{\Delta}_N$$

ή υπό μητρωική μορφή

$$\Rightarrow \ [\hat{P}] = [\hat{K}][\hat{\Delta}] \ \Leftarrow \qquad (11.2)$$

όπου

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & . & . & . & \hat{k}_{1N} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & . & . & . & \hat{k}_{2N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \hat{k}_{N1} & \hat{k}_{N2} & . & . & . & \hat{k}_{NN} \end{bmatrix} \qquad (11.3)$$

Το μητρώο $[\hat{K}]$ ονομάζεται *ολικό μητρώο ακαμψίας* του φορέα. Το φυσικό νόημα του στοιχείου $\hat{k}_{ij}$ είναι δύναμη κατά τη διεύθυνση της συνιστώσας i για μοναδιαία μετατόπιση κατά τη διεύθυνση j, $\hat{\Delta}_j = 1$, όταν οι λοιπές μετατοπίσεις είναι μηδέν, $\hat{\Delta}_{m \neq j} = 0$.

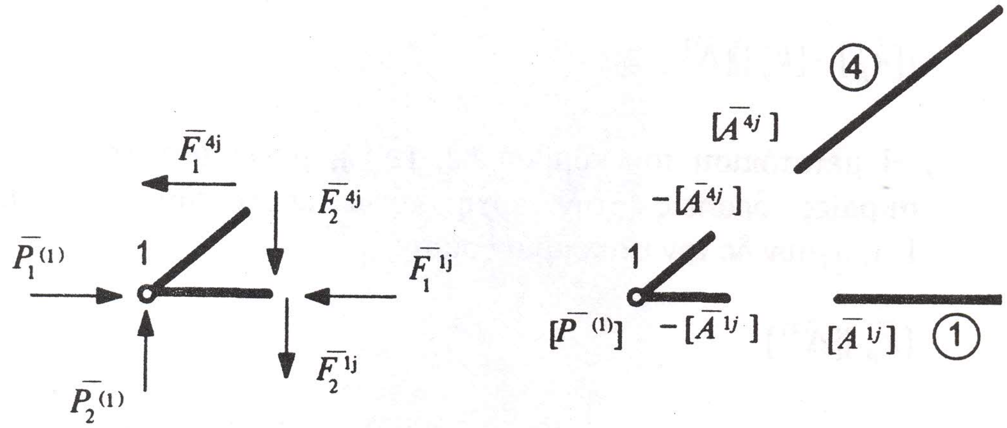
Το ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα υπολογίζεται θεωρώντας την ισορροπία των κόμβων του δικτυώματος ως κατωτέρω.

Για το δικτύωμα του Σχ.14 η ισορροπία του κόμβου #1 σύμφωνα με το Σχ.15 δίδει

$$[\bar{P}^1] = [\bar{A}^{1j}] + [\bar{A}^{4j}] \tag{11.4}$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.7)

$$[\bar{P}^1] = [\bar{k}^4_{jj}][\bar{D}^{4j}] + [\bar{k}^4_{jk}][\bar{D}^{4k}] + [\bar{k}^1_{jj}][\bar{D}^{1j}] + [\bar{k}^1_{jk}][\bar{D}^{1k}] \tag{11.5}$$



Σχ.15

Επειδή οι μετατοπίσεις των άκρων των ράβδων στο καθολικό σύστημα αξόνων είναι ίδιες με τις μετατοπίσεις των κόμβων με τους οποίους είναι συνδεδεμένες (συμβιβαστό των παραμορφώσεων), θα έχουμε

$$[\bar{D}^{1j}] = [\bar{D}^{4j}] = [\bar{\Delta}^{(1)}]$$

$$[\bar{D}^{1k}] = [\bar{\Delta}^{(2)}]$$

$$[\bar{D}^{4k}] = [\bar{\Delta}^{(5)}]$$

Με τη βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων η σχέση (11.4) γράφεται

$$\begin{aligned}[\bar{P}^{(1)}] = {} & ([\bar{k}^1_{jj}] + [\bar{k}^4_{jj}])[\Delta^{(1)}] + [\bar{k}^1_{jk}][\Delta^{(2)}] + [0][\bar{\Delta}^{(3)}] + [0][\bar{\Delta}^{(4)}] \\ & + [\bar{k}^4_{jk}][\bar{\Delta}^{(5)}] + [0][\bar{\Delta}^{(6)}]\end{aligned} \tag{11.6}$$

Ανάλογες σχέσεις θα προκύψουν από την ισορροπία και των υπόλοιπων κόμβων. Είναι δυνατό όμως να μορφώσουμε τις υπόλοιπες εξισώσεις ισορροπίας αμέσως κατά τρόπο μηχανιστικό αποφεύγοντας την θεώρηση ισορροπίας καθενός κόμβου κατά τρόπο εποπτικό.

Στην εξίσωση (11.6) παρατηρούμε ότι στην διαμόρφωση της επικόμβιας δράσεως $[\overline{P}^{(1)}]$ συμβάλλουν, εκτός από τη μετατόπιση του κόμβου #1, μόνο οι μετατοπίσεις των κόμβων που συνδέονται με τον κόμβο #1 μέσω ράβδων.

'Αρα στην διαμόρφωση της $[\overline{P}^{(1)}]$ συμβάλλουν:

1) Η μετατόπιση του κόμβου #1, $[\overline{\Delta}^{(1)}]$, μέσω των στοιχείων 1 και 4 με ακραίες δράσεις στην αρχή για μετατόπιση της αρχής. Παράγουν δε την επικόμβια δράση:

$$\left([\overline{k}^{1}_{jj}]+[k^{4}_{jj}]\right)[\overline{\Delta}^{(1)}]$$

2) Η μετατόπιση του κόμβου #2, $[\overline{\Delta}^{(2)}]$, μέσω του στοιχείου 1 με ακραίες δράσεις στην αρχή λόγω μετατόπισης του πέρατος. Παράγουν δε την επικόμβια δράση:

$$[\overline{k}^{1}_{jk}][\overline{\Delta}^{(2)}]$$

3) Η μετατόπιση του κόμβου #5, $[\overline{\Delta}^{(5)}]$, μέσω του στοιχείου 4 με ακραίες δράσεις στην αρχή λόγω μετατόπισης του πέρατος. Παράγουν δε την επικόμβια δράση.

$$[\overline{k}^{4}_{jk}][\overline{\Delta}^{(5)}]$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω λογική συμπληρώνεται ο παρακάτω πίνακας.

	$[\overline{\Delta}^{(1)}]$	$[\overline{\Delta}^{(2)}]$	$[\overline{\Delta}^{(3)}]$	$[\overline{\Delta}^{(4)}]$	$[\overline{\Delta}^{(5)}]$	$[\overline{\Delta}^{(6)}]$
$[\overline{P}^{(1)}]$	$[\overline{k}^{1}_{jj}]+[\overline{k}^{4}_{jj}]$	$[\overline{k}^{1}_{jk}]$	$[0]$	$[0]$	$[\overline{k}^{4}_{jk}]$	$[0]$
$[\overline{P}^{(2)}]$	$[\overline{k}^{1}_{kj}]$	$[\overline{k}^{1}_{kk}]+[\overline{k}^{2}_{jj}]+[\overline{k}^{5}_{jj}]+[\overline{k}^{6}_{jj}]$	$[\overline{k}^{2}_{jk}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{5}_{jk}]$	$[\overline{k}^{6}_{jk}]$
$[\overline{P}^{(3)}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{2}_{kj}]$	$[\overline{k}^{2}_{kk}]+[\overline{k}^{3}_{jj}]+[\overline{k}^{7}_{kk}]+[\overline{k}^{8}_{kk}]$	$[\overline{k}^{3}_{jk}]$	$[\overline{k}^{7}_{kj}]$	$[\overline{k}^{8}_{kj}]$
$[\overline{P}^{(4)}]$	$[0]$	$[0]$	$[\overline{k}^{3}_{kj}]$	$[\overline{k}^{3}_{kk}]+[\overline{k}^{9}_{kk}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{9}_{kj}]$
$[\overline{P}^{(5)}]$	$[\overline{k}^{4}_{kj}]$	$[\overline{k}^{5}_{kj}]$	$[\overline{k}^{7}_{jk}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{4}_{kk}]+[\overline{k}^{5}_{kk}]+[\overline{k}^{7}_{jj}]+[\overline{k}^{10}_{jj}]$	$[\overline{k}^{10}_{jk}]$
$[\overline{P}^{(6)}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{6}_{kj}]$	$[\overline{k}^{8}_{jk}]$	$[\overline{k}^{9}_{jk}]$	$[\overline{k}^{10}_{kj}]$	$[\overline{k}^{7}_{kk}]+[\overline{k}^{8}_{jj}]+[\overline{k}^{9}_{jj}]+[\overline{k}^{10}_{kk}]$

Αρα

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{k}^1_{jj}]+[\bar{k}^4_{jj}] & [\bar{k}^1_{jk}] & [0] & [0] & [\bar{k}^4_{jk}] & [0] \\ [\bar{k}^1_{kj}] & \begin{matrix}[\bar{k}^1_{kk}]+[\bar{k}^2_{jj}]+\\ [\bar{k}^5_{jj}]+[\bar{k}^6_{jj}]\end{matrix} & [\bar{k}^2_{jk}] & [0] & [\bar{k}^5_{jk}] & [\bar{k}^6_{jk}] \\ [0] & [\bar{k}^2_{kj}] & \begin{matrix}[\bar{k}^2_{kk}]+[\bar{k}^3_{jj}]+\\ [\bar{k}^7_{kk}]+[\bar{k}^8_{kk}]\end{matrix} & [\bar{k}^3_{jk}] & [\bar{k}^7_{kj}] & [\bar{k}^8_{kj}] \\ [0] & [0] & [\bar{k}^3_{kj}] & [\bar{k}^3_{kk}]+[\bar{k}^9_{kk}] & [0] & [\bar{k}^9_{kj}] \\ [\bar{k}^4_{kj}] & [\bar{k}^5_{kj}] & [\bar{k}^7_{jk}] & [0] & \begin{matrix}[\bar{k}^4_{kk}]+[\bar{k}^5_{kk}]+\\ [\bar{k}^7_{jj}]+[\bar{k}^{10}_{jj}]\end{matrix} & [\bar{k}^{10}_{jk}] \\ [0] & [\bar{k}^6_{kj}] & [\bar{k}^8_{jk}] & [\bar{k}^9_{jk}] & [\bar{k}^{10}_{kj}] & \begin{matrix}[\bar{k}^7_{kk}]+[\bar{k}^8_{jj}]+\\ [\bar{k}^9_{jj}]+[\bar{k}^{10}_{kk}]\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

Τα στοιχεία του μητρώου $[\hat{K}]$ είναι υπομητρώα διαστάσεων 2x2. 'Αρα οι διαστάσεις του είναι 12x12.

12. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ, ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Η σχέση (11.2) που συνδέει το μητρώο $[\hat{P}]$ με το μητρώο $[\hat{\Delta}]$ μέσω του μητρώου $[\hat{K}]$ επιτρέπει τον προσδιορισμό των στοιχείων του $[\hat{P}]$ όταν δίδονται τα στοιχεία του $[\hat{\Delta}]$. Η σχέση αυτή αναφέρεται στον ελεύθερο φορέα και δεν μπορεί να αντιστραφεί, δηλαδή αν δοθεί το $[\hat{P}]$ δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθεί το $[\hat{\Delta}]$, διότι υπεισέρχεται η κίνηση του φορέα ως στερεού σώματος που εκφράζεται με τον μηδενισμό της ορίζουσας του μητρώου $[\hat{K}]$, δηλ. $\left|\hat{K}\right| = 0$. Επομένως, πρέπει προηγουμένως να στηριχθεί ο φορέας, ώστε να εμποδισθεί η κίνηση του ως στερεού σώματος. Στο επίπεδο, ο βαθμός ελευθερίας κινήσεως είναι 3, άρα πρέπει να δεσμευθούν τρείς τουλάχιστον συνιστώσες επικόμβιων μετατοπίσεων, δηλαδή ο βαθμός του μητρώου $[\hat{K}]$ είναι N-3.

Είναι ευνόητο ότι οι στηρίξεις πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να αποφεύγεται ή απειροστή γεωμετρική κινητικότητα του φορέα. Στήριξη του φορέα σημαίνει προκαθορισμό των αντίστοιχων μετατοπίσεων (έχουν τιμή μηδέν, όταν οι στηρίξεις είναι ανυποχώρητες, ή είναι ένας αριθμός της τάξεως μεγέθους των μετατοπίσεων, όταν η στήριξη υποχωρεί).

Στο μητρώο $[\hat{\Delta}]$ οι επικόμβιες μετατοπίσεις είναι διατεταγμένες βάσει του αύξοντα αριθμού του κόμβου στον οποίο αναφέρονται. Μετά τη στήριξη του φορέα ανακατατάσσουμε τις μετατοπίσεις, έτσι ώστε οι άγνωστες μετατοπίσεις να προταχθούν και οι γνωστές να ακολουθήσουν. Π.χ. για το δικτύωμα που εξετάζουμε το μητρώο (10.6) μετά την αναδιάταξη θα είναι

$$[\hat{\Delta}_m] = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_3 \\ \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hat{\Delta}_{10} \\ \hat{\Delta}_{11} \\ \hat{\Delta}_{12} \\ \hdashline \hat{\Delta}_1 \\ \hat{\Delta}_2 \\ \hat{\Delta}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_3 \\ \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hat{\Delta}_{10} \\ \hat{\Delta}_{11} \\ \hat{\Delta}_{12} \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overline{\Delta}_f] \\ [\overline{\Delta}_s] \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

όπου

$$[\overline{\Delta}_f] = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_3 \\ \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hat{\Delta}_{10} \\ \hat{\Delta}_{11} \\ \hat{\Delta}_{12} \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad [\overline{\Delta}_s] = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1 \\ \hat{\Delta}_2 \\ \hat{\Delta}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

είναι δύο υπομητρώα που περιλαμβάνουν, αντιστοίχως, τις άγνωστες (ελεύθερες) και τις γνωστές (στηρίξεων) επικόμβιες μετατοπίσεις. Στο μητρώο $[\hat{\Delta}_m]$ ο δείκτης m δηλώνει το τροποποιημένο μητρώο (αρχικό της λέξεως *modified*). Στο μητρώο $[\overline{\Delta}_f]$ ο δείκτης f δηλώνει ελεύθερες μετατοπίσεις (αρχικό της λέξεως *free*). Τέλος, ο δείκτης s στο μητρώο $[\overline{\Delta}_s]$ δηλώνει μετατοπίσεις στηρίξεων (αρχικό της λέξεως *support*).

Μετά την μόρφωση του τροποποιημένου μητρώου μετατοπίσεων $[\hat{\Delta}_m]$ τροποποιείται και το μητρώο των επικόμβιων δράσεων, κατ'αντιστοιχία. Δηλαδή

$$[\hat{P}_m] = \begin{bmatrix} \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \\ \hdashline \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ +50 \\ -30 \\ -100 \\ +30 \\ -20 \\ \hdashline \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overline{P}_f] \\ [\overline{P}_s] \end{bmatrix} \qquad (12.3)$$

όπου

$$[\overline{P}_f] = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ +50 \\ -30 \\ -100 \\ +30 \\ -20 \end{bmatrix} \qquad [\overline{P}_s] = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_8 \end{bmatrix} \qquad (12.4)$$

Στη προκειμένη περίπτωση το μητρώο $[\overline{P}_f]$ περιλαμβάνει μόνο τις γνωστές επικόμβιες δράσεις και αντιστοιχεί στο μητρώο $[\overline{\Delta}_f]$, ενώ το μητρώο $[\overline{P}_s]$ περιλαμβάνει τις άγνωστες αντιδράσεις και αντιστοιχεί στο μητρώο $[\overline{\Delta}_s]$.

Μετά την μόρφωση των τροποποιημένων μητρώων $[\hat{\Delta}_m]$ και $[\hat{P}_m]$ τροποποιείται και το μητρώο ακαμψίας $[\hat{K}]$. Βάσει της σχέσεως (11.2) και των (12.1) και (12.3) η τροποποίηση του $[\hat{K}]$ συνίσταται αφ'ενός στην εναλλαγή των γραμμών του, ώστε αυτές να αντιστοιχούν στα στοιχεία του $[\hat{P}_m]$, και αφετέρου στην εναλλαγή των στηλών ώστε αυτές να αντιστοιχούν στα στοιχεία του $[\hat{\Delta}_m]$. Το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει κατ'αυτό τον τρόπο ονομάζεται *τροποποιημένο ολικό μητρώο ακαμψίας* του φορέα και συμβολίζεται με $[\hat{K}_m]$. Μετά την τροποποίηση η εξίσωση (11.2) γράφεται

$$[\hat{P}_m]=[\hat{K}_m][\hat{\Delta}_m] \tag{12.5}$$

Η σχέση (12.5) με την βοήθεια των (12.1) και (12.3) και κατάλληλο επιμερισμό του μητρώου $[\hat{K}_m]$ γράφεται

$$\begin{bmatrix}[\bar{P}_f]\\ [\bar{P}_s]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}]\\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\bar{\Delta}_f]\\ [\bar{\Delta}_s]\end{bmatrix} \tag{12.6}$$

όπου

$[\bar{K}_{ff}]$: τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων *fxf*

$[\bar{K}_{fs}]$: ορθογωνικό μητρώο διαστάσεων *fxs*

$[\bar{K}_{sf}]$: ορθογωνικό μητρώο διαστάσεων *sxf*

$[\bar{K}_{ss}]$: τετραγωνικό μητρώο *sxs*

όταν f=το πλήθος των ελεύθερων μετατοπίσεων και s=το πλήθος των δεσμευμένων μετατοπίσεων *f*+*s*=*N*. Για το παράδειγμα που εξετάζουμε είναι *f*=9, *s*=3.

Εάν χάριν απλότητος θέσουμε

$$[\bar{K}_{ff}]=[\bar{K}] \qquad [\bar{P}_f]=[\bar{P}] \qquad \kappa\alpha\iota \;\; [\bar{\Delta}_f]=[\bar{\Delta}]$$

και εκτελέσουμε τις πράξεις στην εξίσωση (12.6), λαμβάνουμε

$$[\bar{P}]=[\bar{K}][\bar{\Delta}]+[\bar{K}_{fs}][\bar{\Delta}_s] \tag{12.7}$$

$$[\bar{P}_s]=[\bar{K}_{sf}][\bar{\Delta}]+[\bar{K}_{ss}][\bar{\Delta}_s] \tag{12.8}$$

Στην εξίσωση (12.7) η μόνη άγνωστος είναι το μητρώο $[\bar{\Delta}]$. Επιλύοντας ως προς αυτό λαμβάνουμε

$$[\bar{\Delta}]=[\bar{K}]^{-1}\left([\bar{P}]-[\bar{K}_{fs}][\bar{\Delta}_s]\right) \tag{12.9}$$

Το μητρώο $[\bar{K}]$ είναι τετραγωνικό και έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός. Επομένως, υπάρχει το αντίστροφο του. Μετά τον προσδιορισμό του μητρώου $[\bar{\Delta}]$, οι αντιδράσεις υπολογίζονται από την σχέση (12.8). 'Όταν οι στηρίξεις του φορέα δεν υποχωρούν είναι $[\bar{\Delta}_s]=[0]$, η λύση απλουστεύεται

$$[\overline{\Delta}]=[\overline{K}]^{-1}[P] \qquad (12.10)$$

$$[\overline{P}_s]=[\overline{K}_{sf}][\overline{\Delta}] \qquad (12.11)$$

Μετά τον υπολογισμό των άγνωστων επικόμβιων μετατοπίσεων $[\overline{\Delta}]$ μπορούμε να υπολογίσουμε και τις ακραίες δράσεις των στοιχείων του φορέα ως εξής:

α) Υπολογίζονται οι ακραίες μετατοπίσεις των ράβδων $[\overline{D}^i]$ στο καθολικό σύστημα αξόνων από το $[\overline{\Delta}]$.

β) Υπολογίζονται οι ακραίες μετατοπίσεις των στοιχείων στο τοπικό σύστημα αξόνων με τη βοήθεια της σχέσης

$$[D^i]=[\hat{\Lambda}^i_{PPT}][\overline{D}^i]$$

γ) Υπολογίζονται οι ακραίες δράσεις των στοιχείων στο τοπικό σύστημα αξόνων από τη σχέση

$$[A^i]=[k^i][D^i]$$

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε τις παρακάτω χρήσιμες παρατηρήσεις

α) Το μητρώο $[\hat{K}]$ αναφέρεται στον ελεύθερο φορέα και υπολογίζεται μία μόνο φορά. Δεν μπορεί να αντιστραφεί. Ονομάζεται *ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα.*

β) Το μητρώο $[\overline{K}]$ προκύπτει από το $[\hat{K}]$ μετά τη στήριξη του φορέα και τροποποίηση. Μπορεί να αντιστραφεί. Μεταβάλλεται όμως με τον τρόπο στηρίξεως του φορέα. Ονομάζεται *μητρώο ακαμψίας του φορέα* για την δεδομένη στήριξη.

γ) Το μητρώο $[K]^{-1}$ αντιστρέφεται μόνο μία φορά, έστω και αν ο φορέας υποβάλλεται σε πολλές διαφορετικές φορτίσεις (βλ. σχέσεις (12.10) και (12.11).

13. ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ 'Η ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Η τροποποίηση των μητρώων $[\hat{P}]$ και $[\hat{\Delta}]$ μπορεί να γίνει με την βοήθεια ενός ορθοκανονικού μητρώου. Π.χ. τα μητρώα $[\hat{P}_m]$ και $[\hat{P}]$ των σχέσεων (10.2) και (12.3) μπορούμε να τα συνδέσουμε με την παρακάτω σχέση.

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_8 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

ή

$$[\hat{P}_m] = [V][\hat{P}] \tag{13.2}$$

όπου

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Το μητρώο $[V]$ που επενεργεί δια της πράξεως του πολλαπλασιασμού στο $[\hat{P}]$ και δίνει το $[\hat{P}_m]$ ονομάζεται *μητρώο μεταθέσεως ή αναδιατάξεως*. Προκύπτει δε εύκολα από το μοναδιαίο μητρώο εάν σε κάθε γραμμή του το μοναδιαίο στοιχείο (μη μηδενικό) πάρει τη θέση του δείκτη του αναδιατεταγμένου στοιχείου.

Είναι φανερό ότι το μητρώο $[V]$ πληροί τις συνθήκες ορθοκανονικότητος, δηλαδή:

$$\sum_{j=1}^{N} V_{ij} V_{kj} = 0, \quad \textit{οταν} \ i \neq k \quad \textit{και} \qquad \left[\sum_{j=1}^{N} (V_{ij})^2 \right]^{1/2} = 1$$

Επομένως ισχύει

$$[\hat{P}] = [V]^T [\hat{P}_m]$$

Το ίδιο μητρώο $[V]$ τροποποιεί και το μητρώο $[\hat{\Delta}]$. Δηλαδή είναι

$$[\hat{\Delta}_m] = [V][\hat{\Delta}] \tag{13.3}$$

$$[\hat{\Delta}] = [V]^T [\hat{\Delta}_m] \tag{13.4}$$

Το μητρώο $[V]$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τροποποίηση του μητρώου $[\hat{K}]$. Πράγματι, ξεκινώντας από την σχέση (13.2) και χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις σχέσεις (11.2) και (13.4) λαμβάνουμε

$$[\hat{P}_m] = [V][\hat{P}] = [V][\hat{K}][\hat{\Delta}] = [V][\hat{K}][V]^T [\hat{\Delta}_m] \tag{13.5}$$

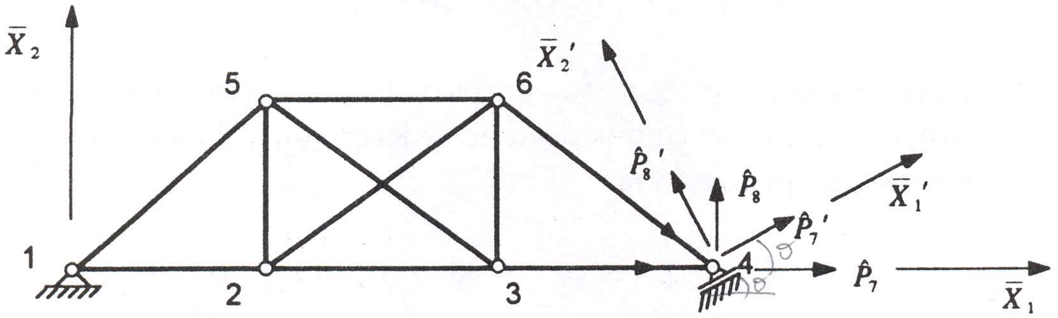
Συγκρίνοντας την σχέση (13.5) με την (12.5) λαμβάνουμε

$$[\hat{K}_m] = [V][\hat{K}][V]^T \tag{13.6}$$

14. ΛΟΞΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Στο παράδειγμα του δικτυώματος του Σχ.14 ή στήριξη στον κόμβο #1 είναι άρθρωση και δίνει δύο συνιστώσες αντιδράσεων, οι οποίες λαμβάνονται κατά τις διευθύνσεις των καθολικών αξόνων $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$. Επίσης, η απλή στήριξη (κύλιση) στον κόμβο #4 επιτρέπει τη μετατόπιση κατά τον άξονα $\bar{x}_1$, και δεσμεύει την μετατόπιση κατά τον άξονα $\bar{x}_2$. Επομενως, στην περίπτωση αυτή, τόσο οι επικόμβιες δράσεις, όσο και οι επικόμβιες μετατοπίσεις αναφέρονται με συνιστώσες τους στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$.

Είναι, όμως δυνατό η απλή στήριξη στον κόμβο #4 να είναι κεκλιμένη κατά γωνία θ (βλ. Σχ.16). Στη περίπτωση αυτή οι επικόμβιες μετατοπίσεις $\hat{\Delta}_7$ και $\hat{\Delta}_8$ καθώς και οι αντίστοιχες επικόμβιες δράσεις $\hat{P}_7$ και $\hat{P}_8$ είναι διάφορες του μηδενός. Τούτο φαίνεται κατά αρχάς ότι αντιβαίνει στην αρχή καλής τοποθετήσεως του προβλήματος, ότι δηλαδή στις στηρίξεις δεν είναι δυνατό να είναι άγνωστη κατά μία διεύθυνση συγχρόνως η επικόμβια δράση και η αντίστοιχη επικόμβια μετατόπιση. Στην πραγματικότητα, όμως πρόκειται περί φαινομενικής αντινομίας. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τους άξονες $\bar{x}_1'$ και $\bar{x}_2'$ εστραμμένους κατά γωνία θ, τότε είναι προφανές ότι



Σχ.16

$\hat{\Delta}_7' = \alpha\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta$ $\qquad$ $\hat{P}_7' = \gamma\nu\omega\sigma\tau\eta$

$\hat{\Delta}_8' = \gamma\nu\omega\sigma\tau\eta$ $\qquad$ $\hat{P}_8' = \alpha\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta$

Μεταξύ των συνιστωσών των επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων αναφορικά με τα συστήματα $\bar{x}_1\bar{x}_2$ και $\bar{x}_1'\bar{x}_2'$ θα ισχύουν προφανώς οι παρακάτω σχέσεις μετασχηματισμού.

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_7' \\ \hat{\Delta}_8' \end{bmatrix} = [r] \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_8 \end{bmatrix} \tag{14.1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P}'_7 \\ \hat{P}'_8 \end{bmatrix} = [r] \begin{bmatrix} \hat{P}_7 \\ \hat{P}_8 \end{bmatrix} \tag{14.2}$$

όπου

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{14.3}$$

είναι το μητρώο μετασχηματισμού από το καθολικό σύστημα $\bar{x}_1\bar{x}_2$ στο καθολικό σύστημα $\bar{x}'_1\bar{x}'_2$.

Για την μέθοδο της άμεσης ακαμψίας το πρόβλημα της λοξής στηρίξεως αντιμετωπίζεται κατά τους κατώτερους δύο τρόπους.

α) Θεωρούμε ως αγνώστους τις επικόμβιες μετατοπίσεις $\hat{\Delta}_7$ και $\hat{\Delta}_8$ και τις επικόμβιες δράσεις $\hat{P}_7$ και $\hat{P}_8$, αυξάνοντας τις εξισώσεις (12.5) κατά δύο ώστε να είναι ισάριθμες με το πλήθος των αγνώστων. Δηλαδή λύνουμε τις εξισώσεις (12.5) μαζί με τις

$$-\hat{\Delta}_7 \sin\theta + \hat{\Delta}_8 \cos\theta = \hat{\Delta}'_8 \ (\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta) \ (\pi.\chi.=0)$$
$$\hat{P}_7 \cos\theta + \hat{P}_8 \sin\theta = \hat{P}'_7 = \gamma\nu\omega\sigma\tau\eta \quad (\pi.\chi.=0)$$

β) Πριν τροποποιήσουμε τα μητρώα $[\hat{P}],[\hat{\Delta}]$ και $[\hat{K}]$ συνεπεία στηρίξεως του φορέα σύμφωνα με το Κεφάλαιο 12, επιφέρουμε την παρακάτω τροποποίηση.

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}'_7 \\ \hat{P}'_8 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_8 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \end{bmatrix} \tag{14.4}$$

Θέτοντας

$$[R]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.5}$$

$$[\hat{P}_m]=\begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7' \\ \hat{P}_8' \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \end{bmatrix} \qquad [\hat{\mathrm{P}}]=\begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_8 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{12} \end{bmatrix}$$

και παρατηρώντας ότι το μητρώο $[R]$ είναι ορθοκανονικό η σχέση (14.4) γράφεται

$$[\hat{P}_m]=[R][\hat{P}] \quad \eta \quad [\hat{\mathrm{P}}]=[\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{m}}] \tag{14.6}$$

Ομοίως έχουμε

$$[\hat{\Delta}_m] = [R][\hat{\Delta}] \qquad [\hat{\Delta}] = [R]^T[\Delta_m] \tag{14.7}$$

Το μητρώο $[\hat{K}]$ τροποποιείται ως εξής

$$[\hat{P}_m] = [R][\hat{P}] = [R][\hat{K}][\hat{\Delta}] = [R][\hat{K}][R]^T[\hat{\Delta}_m]$$

επομένως

$$[\hat{K}_m] = [R][\hat{K}][R]^T \tag{14.8}$$

Μετά την στήριξη του φορέα ακολουθεί νέα τροποποίηση με το μητρώο μεταθέσεως $[V]$ σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στα κεφάλαια 12 και 13. Οπότε έχουμε

$$[\hat{P}_{mm}] = [\hat{K}_{mm}][\hat{\Delta}_{mm}] \tag{14.9}$$

όπου προφανώς είναι

$$[\hat{P}_{mm}] = [V][\hat{P}_m] = [V][R][\hat{P}] \tag{14.10}$$

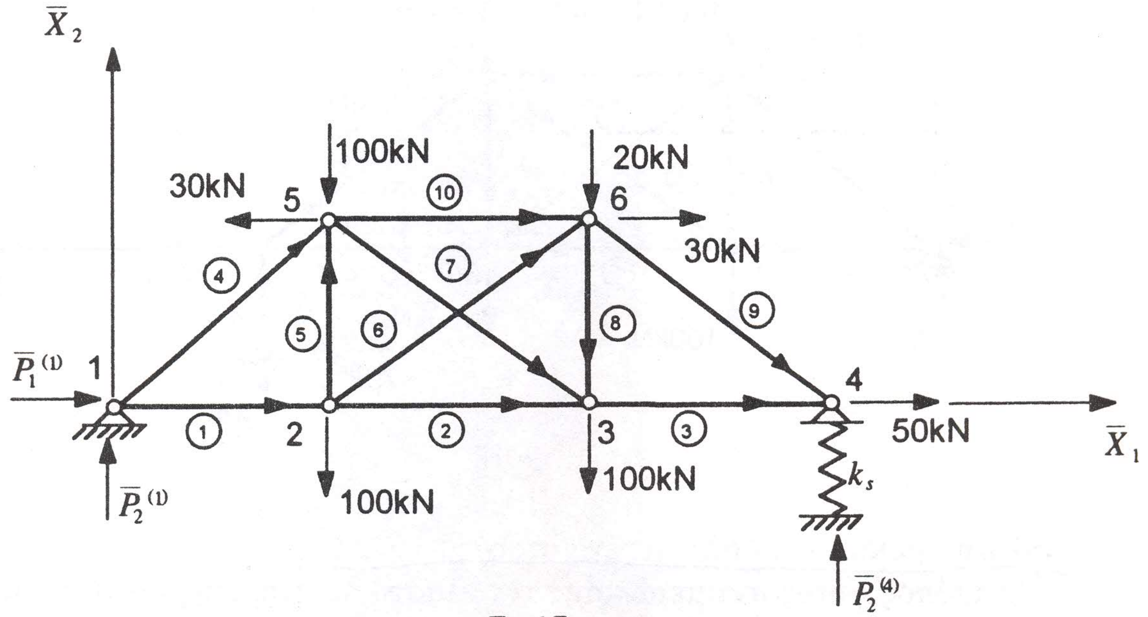
$$[\hat{\Delta}_{mm}] = [V][\hat{\Delta}_m] = [V][R][\hat{\Delta}] \tag{14.11}$$

$$[\hat{K}_{mm}] = [V][R][\hat{K}][R]^T[V]^T \tag{14.12}$$

Ακολούθως ο προσδιορισμός των άγνωστων επικόμβιων παραμορφώσεων $[\overline{\Delta}]$ και των αντιδράσεων $[\overline{P}_s]$ γίνεται με την διαδικασία που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 12 επιμερίζοντας πλέον τα μητρώα (14.10), (14.11) και (14.12).

15. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Θεωρούμε το δικτύωμα του Σχ.17 στο οποίο υποθέτουμε ότι η στήριξη 4 υποχωρεί ελαστικά. Η ελαστική στήριξη προσδιορίζεται από το δείκτη ακαμψίας k_s, ο οποίος είναι μία σταθερά (γραμμική ελαστική στήριξη) που συνδέει την αντίδραση με την υποχώρηση της στηρίξεως. Για το παράδειγμα μας θα είναι:



Σχ.17

$$\hat{P}_8 = -k_s \hat{\Delta}_8 \tag{15.1}$$

Δηλαδή, είναι άγνωστα και τα δύο μεγέθη συγχρόνως $\hat{P}_8$ και $\hat{\Delta}_8$. Επομένως οι εξισώσεις (12.5) δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των αγνώστων. Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί με τον κατώτερο τρόπο:

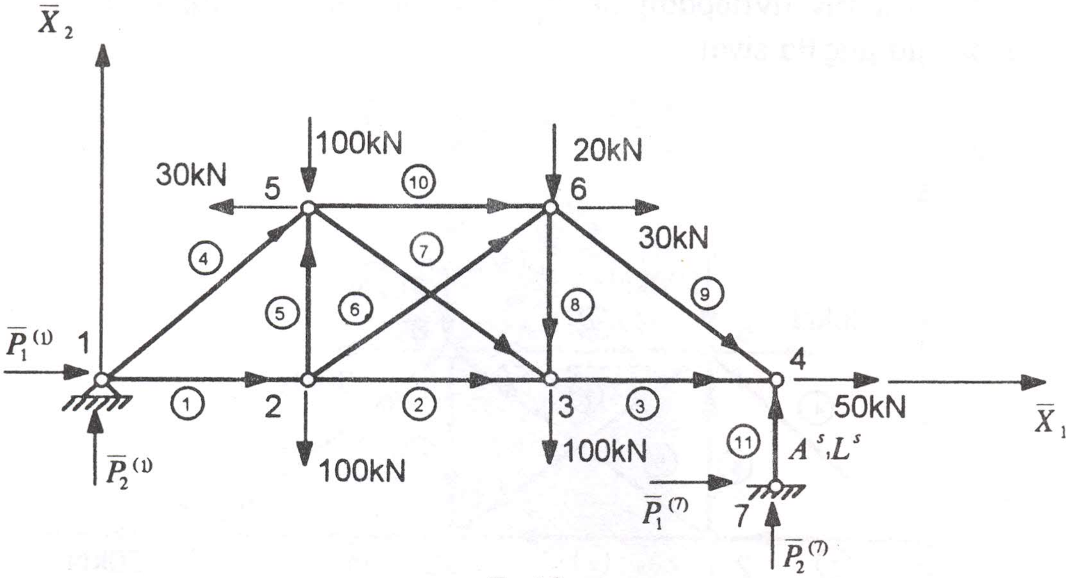
2 τρόποι

α) Προσαυξάνουμε τις εξισώσεις (12.5) με την εξίσωση (15.1). Έτσι προκύπτει αριθμός εξισώσεων ίδιος (12+1=13) με τον αριθμό των αγνώστων (3 αντιδράσεις+10 μετατοπίσεις). Ο τρόπος όμως αυτός δεν είναι ο καλύτερος.

* β) Αντικαθιστούμε την ελαστική στήριξη με ένα κατακόρυφο ιδεατό στοιχείο P1 (Σχ.18), τέτοιο ώστε μπορεί για επιπ. δικτύωμ. με ελαστ. στηρ. κ' λοιπά. | όχι όμως με στροφική δεν μπορώ να γενικεύσω

$$k_{11}^s = \frac{E^s A^s}{L^s} = k_s \tag{15.2}$$

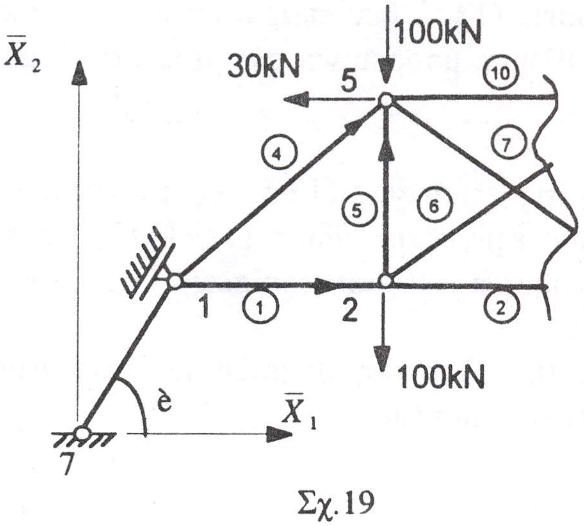
Η σχέση (15.2) επιτρέπει τον προσδιορισμό ενός μόνο από τα μεγέθη E^s, A^s, L^i. Επιλέγουμε $E^s = E =$μέτρο ελαστικότητος του υλικού του δικτυώματος, A^s=με κάποια δεσπόζουσα διατομή, επομένως μένει να προσδιορισθεί από τη σχέση (15.2) μόνο το μήκος L_s.



Σχ.18

Έτσι προκύπτει φορέας με ένα στοιχείο περισσότερο.

Ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης της ελαστικής στήριξης είναι ο πλέον ενδεδειγμένος, διότι δεν αλλάζει την φιλοσοφία της μεθόδου άμεσης ακαμψίας. Στο Σχ.19 φαίνεται το ισοδύναμο προσομοίωμα αντιμετώπισης ελαστικής υποχώρησης της στηρίξεως του κόμβου #1 κατά διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς τον άξονα $\bar{x}_1$.

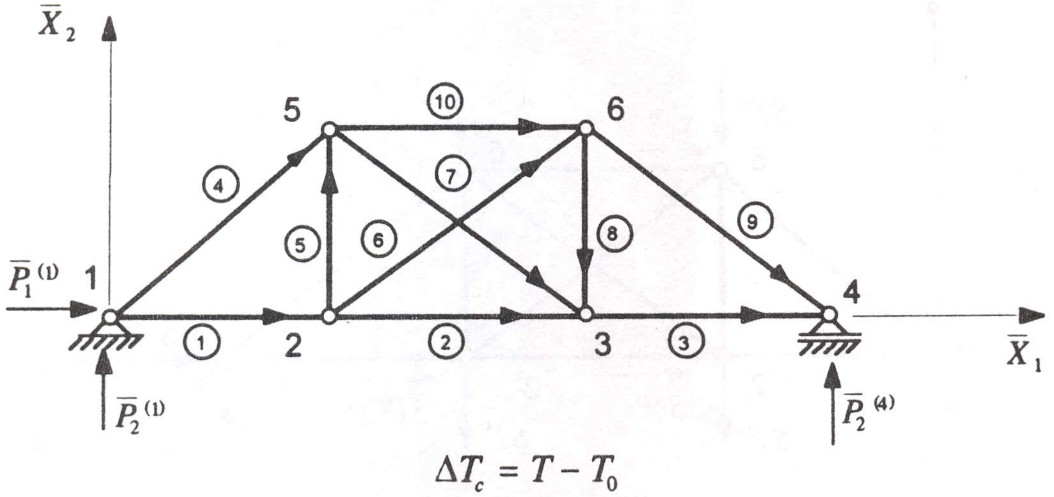


Σχ.19

16. ΘΕΡΜΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

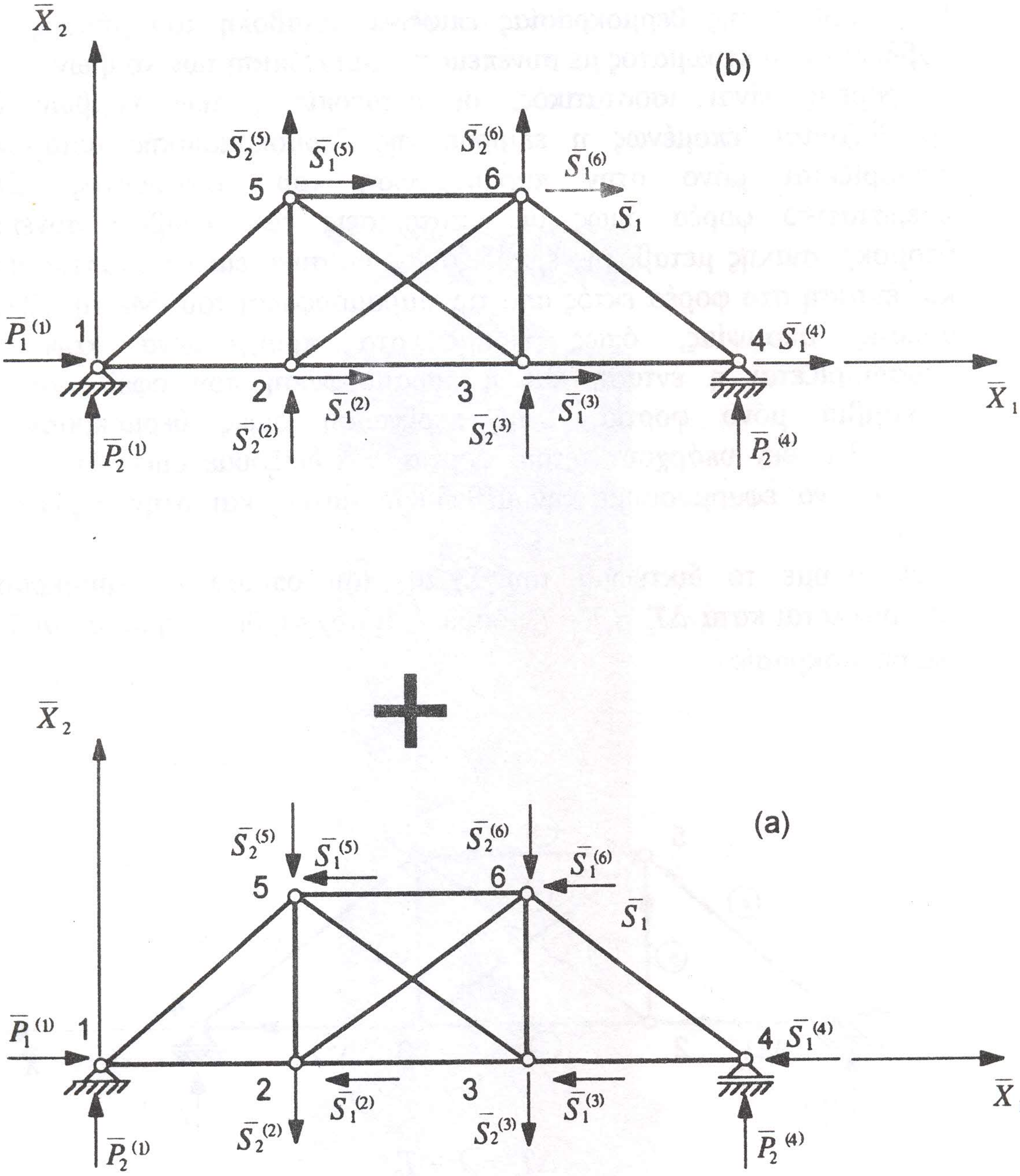
Η μεταβολή της θερμοκρασίας επιφέρει μεταβολή του μήκους των ράβδων του δικτυώματος με συνέπεια την μετατόπιση των κόμβων. Όταν ο φορέας είναι ισοστατικός, οι μετατοπίσεις των κόμβων δεν εμποδίζονται, επομένως η επιρροή της θερμοκρασιακής μεταβολής περιορίζεται μόνο στην παραμόρφωση του δικτυώματος. Στον υπερστατικό φορέα όμως οι μετατοπίσεις των κόμβων συνεπεία θερμοκρασιακής μεταβολής εμποδίζονται με συνέπεια να αναπτύσσεται και ένταση στο φορέα εκτός από την παραμόρφωση του. Με τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας, όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, προσδιορίζεται η ένταση και η παραμόρφωση που οφείλονται σε επικόμβια μόνο φορτία. Στην περίπτωση όμως θερμοκρασιακής μεταβολής δεν υπάρχουν τέτοια φορτία. Θα δείξουμε όμως ότι είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την μέθοδο ακαμψίας και στην περίπτωση αυτή.

Θεωρούμε το δικτύωμα του Σχ.20, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά $\Delta T_c = T - T_o$, όπου T_o η αρχική θερμοκρασία και T η νέα θερμοκρασία.



Σχ.20

Στους κόμβους του δικτυώματος με θερμοκρασιακή μετοβολή $\Delta T_c = T - T_o$ επιβάλλουμε αυθαίρετα επικόμβιες δράσεις $[\hat{S}]$ (Σχ.21a) κατά τις διευθύνσεις των ελεύθερων μετατοπίσεων όπου



(b)
$\bar{X}_2$
$\bar{S}_2^{(5)}$
$\bar{S}_1^{(5)}$
$\bar{S}_2^{(6)}$
$\bar{S}_1^{(6)}$
5
6
$\bar{S}_1$
$\bar{P}_1^{(1)}$
1
4
$\bar{S}_1^{(4)}$
2
$\bar{S}_1^{(2)}$
3
$\bar{S}_1^{(3)}$
$\bar{X}_1$
$\bar{S}_2^{(2)}$
$\bar{S}_2^{(3)}$
$\bar{P}_2^{(1)}$
$\bar{P}_2^{(4)}$
+
(a)
$\bar{X}_2$
$\bar{S}_2^{(5)}$
$\bar{S}_1^{(5)}$
$\bar{S}_2^{(6)}$
$\bar{S}_1^{(6)}$
5
6
$\bar{S}_1$
$\bar{P}_1^{(1)}$
1
4
$\bar{S}_1^{(4)}$
2
$\bar{S}_1^{(2)}$
3
$\bar{S}_1^{(3)}$
$\bar{X}_1$
$\bar{S}_2^{(2)}$
$\bar{S}_2^{(3)}$
$\bar{P}_2^{(1)}$
$\bar{P}_2^{(4)}$

Σχ.21

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} [\bar{S}^{(1)}] \\ [\bar{S}^{(2)}] \\ [\bar{S}^{(3)}] \\ [\bar{S}^{(4)}] \\ [\bar{S}^{(5)}] \\ [\bar{S}^{(6)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \bar{S}_1^{(2)} \\ \bar{S}_2^{(2)} \\ \hline \bar{S}_1^{(3)} \\ \bar{S}_2^{(3)} \\ \hline \bar{S}_1^{(4)} \\ 0 \\ \hline \bar{S}_1^{(5)} \\ \bar{S}_2^{(5)} \\ \hline \bar{S}_1^{(6)} \\ \bar{S}_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{S}_3 \\ \hat{S}_4 \\ \hat{S}_5 \\ \hat{S}_6 \\ \hat{S}_7 \\ 0 \\ \hat{S}_9 \\ \hat{S}_{10} \\ \hat{S}_{11} \\ \hat{S}_{12} \end{bmatrix} \qquad (16.1)$$

Επίσης θεωρούμε τον ίδιο φορέα με μοναδική φόρτιση την $-[\hat{S}]$ (Σχ.21b). Δηλαδή θεωρούμε τις εξής δύο καταστάσεις:

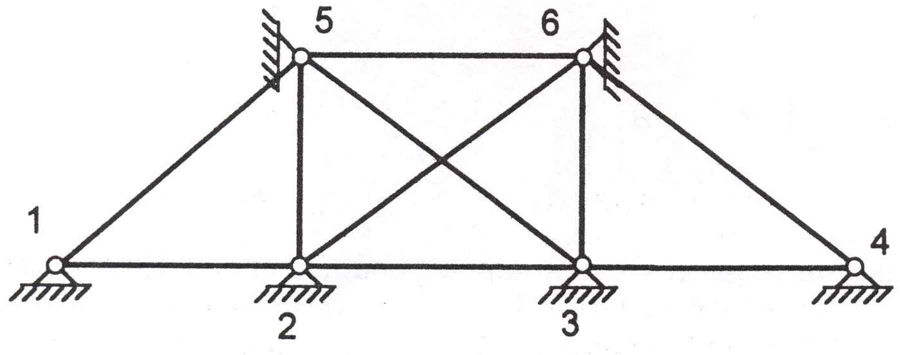
Κατάσταση Ι: Παραμόρφωση και ένταση του φορέα συνεπεία μεταβολής θερμοκρασίας ΔT_c και επικόμβιες δράσεις $[\hat{S}]$.

Κατάσταση ΙΙ: Παραμόρφωση και ένταση του φορέα συνεπεία $-[\hat{S}]$.

Είναι προφανές λόγω της αρχής της επαλληλίας ότι:

Κατάσταση συνεπεία ΔT_c = Κατάσταση Ι + Κατάσταση ΙΙ.

Επίλυση καταστάσεως Ι.



Σχ.22

Οι επικόμβιες δράσεις $[\hat{S}]$ προσδιορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εμποδίζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων που προκαλεί η θερμοκρασιακή μεταβολή. Για το σκοπό αυτό παγιώνουμε το φορέα, δηλαδή επιβάλλουμε δεσμεύσεις στους κόμβους ώστε αυτοί να στηρίζονται αρθρωτά στο έδαφος (βλ. Σχ.22).

Οι ακραίες δράσεις στοιχείου P1 του παγιωμένου φορέα υπολογίζονται από το Σχ.23 ως εξής:

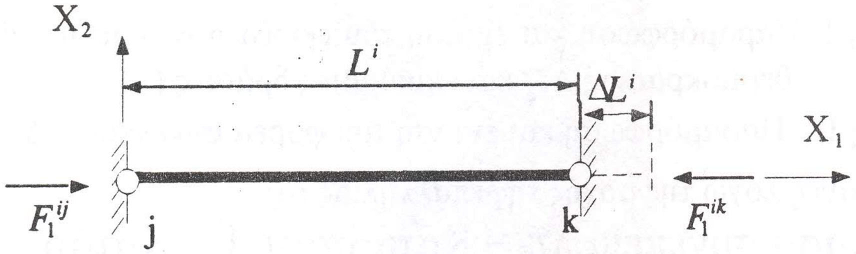
Εάν ελευθερωθεί το άκρο k, τότε λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής $\Delta T_c > 0$ θα αυξηθεί το μήκος της ράβδου κατά

$$\Delta L = \alpha \Delta T_c L$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής γραμμικής διαστολής του υλικού.

Επειδή όμως η μετατόπιση ΔL εμποδίζεται, αναπτύσσεται στο στοιχείο αξονική θλιπτική δύναμη

$$F = \frac{E^i A^i}{L^i} \Delta L = \alpha \Delta T_c E^i A^i$$



Σχ.2

Επομένως οι ακραίες δράσεις του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων είναι

$$[A_t^i] = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_1^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T_c E^i A^i \\ -\alpha \Delta T_c E^i A^i \end{bmatrix}$$

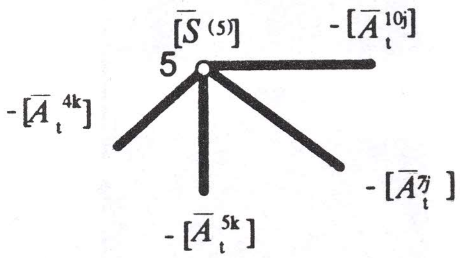
Στο καθολικό σύστημα αξόνων οι ακραίες δράσεις υπολογίζονται από τη σχέση

$$[\overline{A}_t^i] = [\hat{\Lambda}^i_{PPT}]^T [A^i]$$

Ο δείκτης t, δηλώνει ότι η δράση παγιώσεως οφείλεται σε θερμοκρασιακή μεταβολή.

Οι επικόμβιες δράσεις $[\bar{S}^{(n)}]$ στον κόμβο n υπολογίζονται από την ισορροπία του κόμβου. Π.χ. για τον κόμβο #5 του δικτυώματος του παραδείγματος έχουμε βάσει του Σχ.24.

$$[\bar{S}^{(5)}] = [\bar{A}_t^{4k}] + [\bar{A}_t^{5k}] + [\bar{A}_t^{7j}] + [A_t^{10j}]$$



Σχ.24

Παρατήρηση

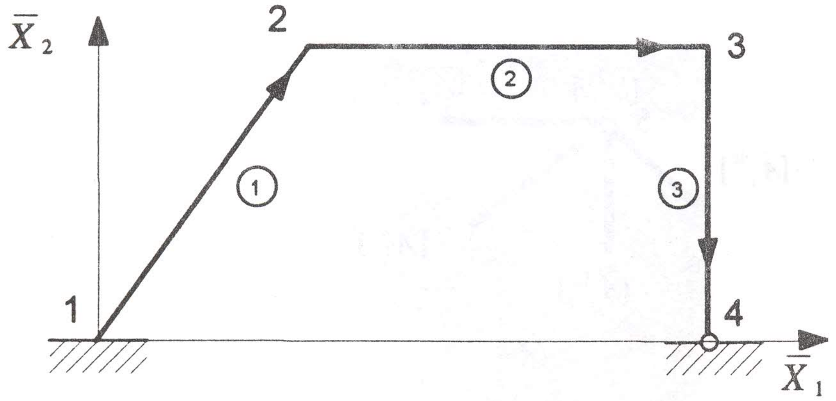
Για τον υπολογισμό των επικόμβιων δράσεων $[\hat{S}]$ δεν απαιτείται η ισορροπία των κόμβων #1 και #4 κατά της διευθύνσεως των δεσμευμένων μετατοπίσεων. Πλην όμως πρέπει να υπολογισθούν, διότι οι επικόμβιες αυτές δράσεις αποτελούν τις αντιδράσεις του παγιωμένου φορέα, οι οποίες προστιθέμενες στις αντιδράσεις του φορέα με επικόμβιες δράσεις $-[\hat{S}]$ θα δώσουν τις αντιδράσεις του φορέα συνεπεία θερμοκρασιακής μεταβολής. 'Αρα καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα.

Υπολογίζουμε όλες τις επικόμβιες δράσεις παγιώσεως, αλλά στο μητρώο $-[\hat{S}]$ δίνουμε μηδενική τιμή στα στοιχεία που αντιστοιχούν στις δεσμευμένες μετατοπίσεις.

17. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΣΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για την εφαρμογή της μεθόδου άμεσης ακαμψίας στα επίπεδα πλαίσια ακολουθούμε την ίδια πορεία που εφαρμόσαμε στο επίπεδο δικτύωμα.

Θεωρούμε για παράδειγμα το πλαίσιο του Σχ.25. 'Οπως και στο

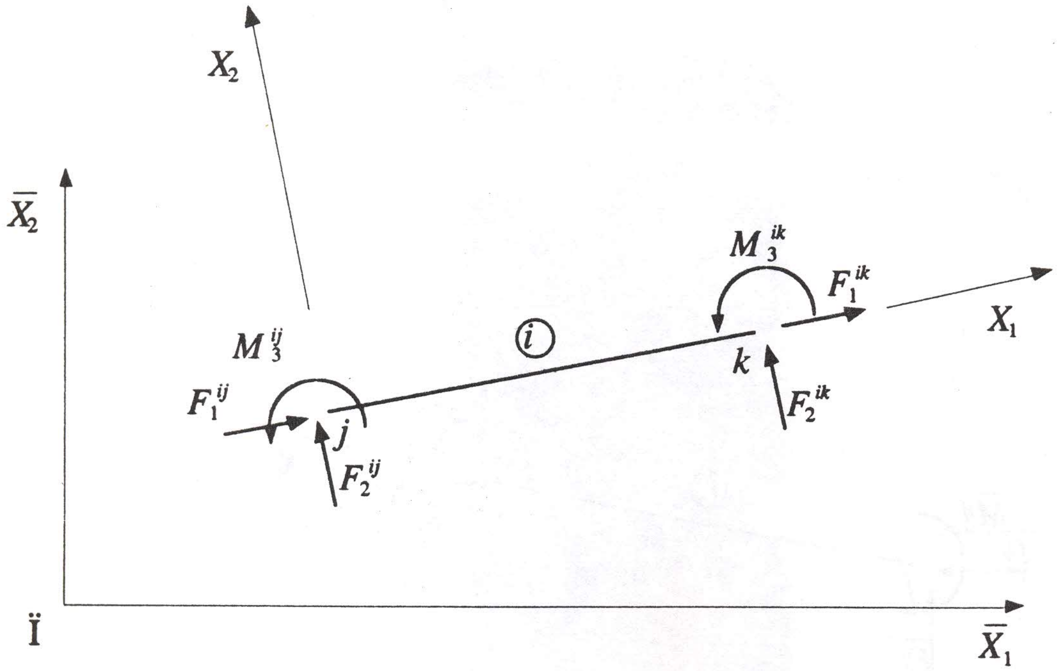


Σχ.25

δικτύωμα, έτσι και στο πλαίσιο ορίζουμε το καθολικό σύστημα αξόνων, αριθμούμε τους κόμβους και τα στοιχεία και καθορίζουμε τις θετικές φορές των τοπικών αξόνων κάθε στοιχείου (αρχή και πέρας). Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρουσιάζεται η μέθοδος άμεσης ακαμψίας για τα επίπεδα πλαίσια.

18. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ Ρ2

Τα στοιχεία επιπέδου πλαισίου θα ονομάζουμε στοιχεία τύπου Ρ2.



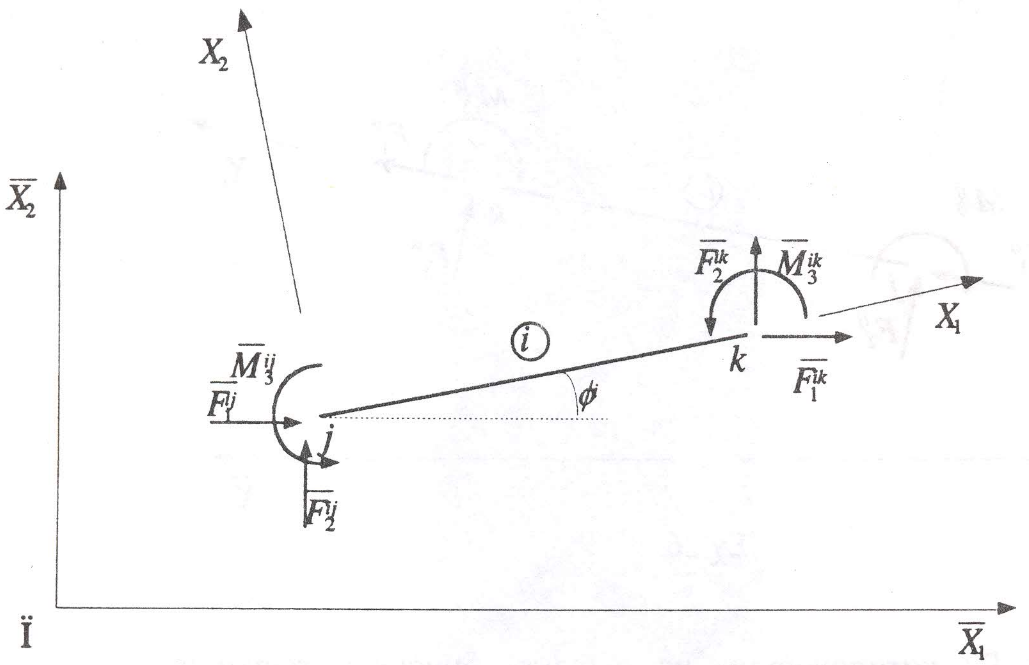
Σχ.26

Τα στοιχεία Ρ2 καταπονούνται με αξονικές δυνάμεις, τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές περί τον άξονα $x_3 \equiv \bar{x}_3$, επομένως τα μητρώα ακραίων δράσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων θα είναι (βλ. Σχ.26).

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{bmatrix} \quad [A^{ik}] = \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} \quad [A^{i}] = \begin{bmatrix} [A^{ij}] \\ [A^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ --- \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} \qquad (18.1)$$

Στο καθολικό σύστημα αξόνων τα αντίστοιχα μητρώα ακραίων δράσεων θα είναι

$$[\overline{A}^{ij}]=\begin{bmatrix}\overline{F}_1^{ij}\\ \overline{F}_2^{ij}\\ \overline{M}_3^{ij}\end{bmatrix}\qquad [\overline{A}^{ik}]=\begin{bmatrix}\overline{F}_1^{ik}\\ \overline{F}_2^{ik}\\ \overline{M}_3^{ik}\end{bmatrix}\qquad [\overline{A}^{i}]=\begin{bmatrix}[\overline{A}^{ij}]\\ [\overline{A}^{ik}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{F}_1^{ij}\\ \overline{F}_2^{ij}\\ \overline{M}_3^{ij}\\ \overline{F}_1^{ik}\\ \overline{F}_2^{ik}\\ \overline{M}_3^{ik}\end{bmatrix} \tag{18.2}$$



Σχ.27

Οι ακραίες δράσεις στο καθολικό σύστημα αξόνων φαίνονται στο Σχ.27. Είναι προφανές ότι μεταξύ των ακραίων δράσεων ισχύουν οι σχέσεις μετασχηματισμού από το καθολικό σύστημα στο τοπικό.

$$\begin{bmatrix}F_1^{ij}\\ F_2^{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi^i & \sin\phi^i\\ -\sin\phi^i & \cos\phi^i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{F}_1^{ij}\\ \overline{F}_2^{ij}\end{bmatrix} \tag{18.3}$$

$$M_3^{ij}=\overline{M}_3^{ij} \tag{18.4}$$

Οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν να συμπτυχθούν ως εξής

$$\begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi^i & \sin\phi^i & 0 \\ -\sin\phi^i & \cos\phi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{F}_1^{ij} \\ \overline{F}_2^{ij} \\ \overline{M}_3^{ij} \end{bmatrix} \tag{18.5}$$

Αν θέσουμε

$$\Rightarrow [\Lambda^i_{PF}] = \begin{bmatrix} \cos\phi^i & \sin\phi^i & 0 \\ -\sin\phi^i & \cos\phi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \tag{18.6}$$

η σχέση μετασχηματισμού (18.5) γράφεται

$$[A^{ij}] = [\Lambda^i_{PF}][\overline{A}^{ij}] \tag{18.7}$$

προφανώς ανάλογη σχέση ισχύει και για τις ακραίες δράσεις στο πέρας

$$[A^{ik}] = [\Lambda^i_{PF}][\overline{A}^{ik}] \tag{18.8}$$

Ο δείκτης F στο μητρώο $[\Lambda^i_{PF}]$ δηλώνει ότι το μητρώο μετασχηματισμού αναφέρεται σε στοιχείο πλαισίου (αρχικό της λέξεως frame=πλαίσιο).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το μητρώο (18.6) ικανοποιεί τις συνθήκες ορθοκανονικότητας. Επομενως, ισχύει

$$[\Lambda^i_{PF}]^{-1} = [\Lambda^i_{PF}]^T \tag{18.9}$$

'Αρα οι σχέσεις (18.7) και (18.8) αντιστρέφονται ως

$$[\overline{A}^{ij}] = [\Lambda^i_{PF}]^T[A^{ij}] \tag{18.10}$$

$$[\overline{A}^{ik}] = [\Lambda^i_{PF}]^T[A^{ik}] \tag{18.11}$$

Οι σχέσεις (18.7) και (18.8) συμπτύσσονται ως

$$\begin{bmatrix} [A^{ij}] \\ [A^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Lambda^i_{PF}] & [0] \\ [0] & [\Lambda^i_{PF}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\overline{A}^{ij}] \\ [\overline{A}^{ik}] \end{bmatrix} \tag{18.12}$$

όπου

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

θέτοντας

$$[\Lambda^{i}_{PPF}] = \begin{bmatrix} [\Lambda^{i}_{PF}] & [0] \\ [0] & [\Lambda^{i}_{PF}] \end{bmatrix} \tag{18.13}$$

η σχέση (18.12) με τη βοήθεια των (18.1) και (18.2) γράφεται

$$[A^{i}] = [\Lambda^{i}_{PPF}][\overline{A}^{i}] \tag{18.14}$$

και αντιστρέφεται ως

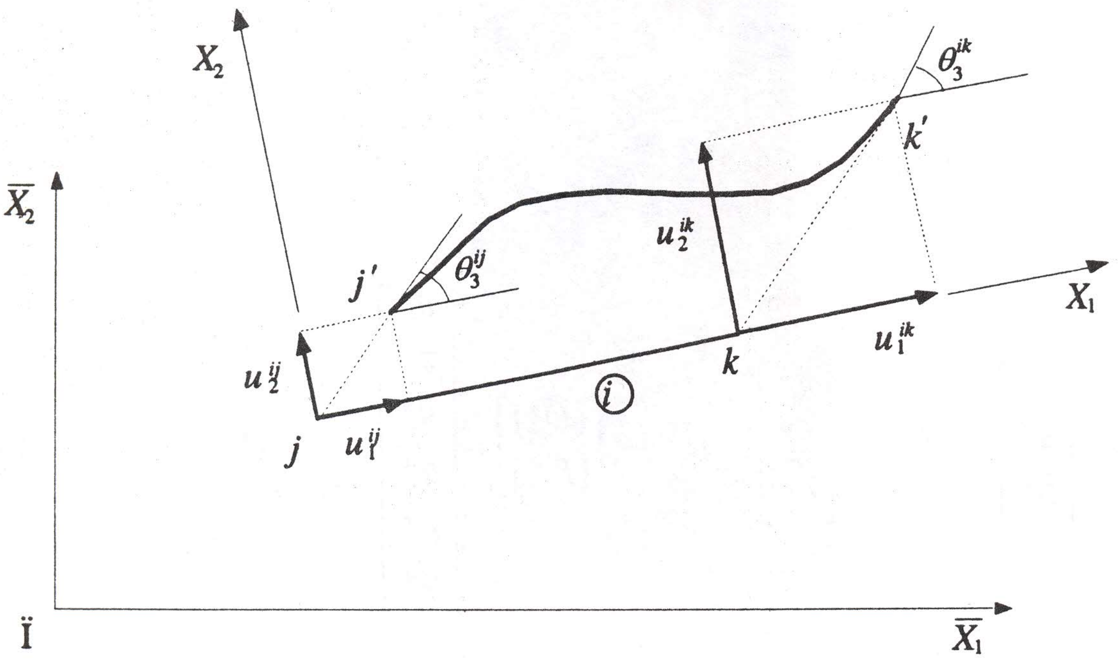
$$[\overline{A}^{i}] = [\Lambda^{i}_{PPF}]^{T}[A^{i}] \tag{18.15}$$

19. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ Ρ2

Οι μετατοπίσεις των άκρων ράβδου πλαισίου ακολουθούν τις μετατοπίσεις των κόμβων με τους οποίους η ράβδος συνδέεται στερεά. Οι μέτατοπίσεις ενός κόμβου επίπεδου πλαισίου είναι μετατοπίσεις στερεού σώματος μέσα στο επίπεδο, δηλαδή έχει δύο μεταφορικές συνιστώσες και μία στροφή. Επομένως, αντίστοιχες είναι και οι μετατοπίσεις άκρου ράβδου. Στο Σχ.28 φαίνεται το παραμορφωμένο στοιχείο Ρ2 και οι ακραίες μετατοπίσεις του.

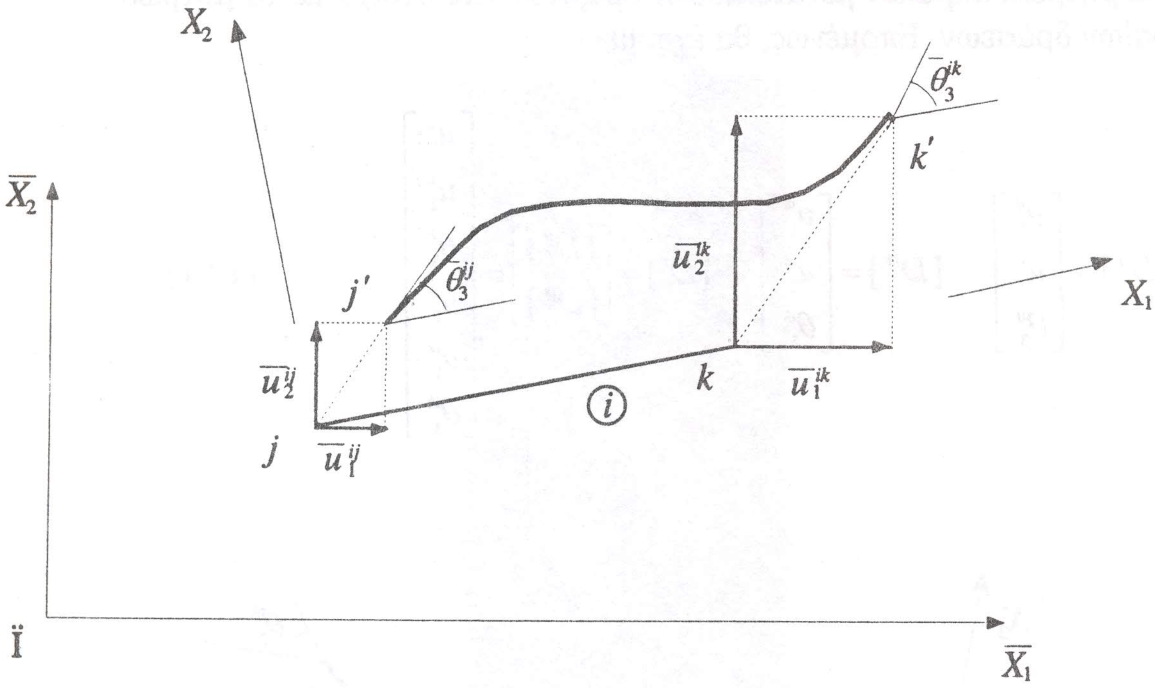
Τα μητρώα ακραίων μετατοπίσεων ορίζονται αντίστοιχα με τα μητρώα ακραίων δράσεων. Επομένως, θα έχουμε

$$[D^{ij}]=\begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \theta_3^{ij} \end{bmatrix} \qquad [D^{ik}]=\begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} \qquad [D^{i}]=\begin{bmatrix} [D^{ij}] \\ [D^{ik}] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \theta_3^{ij} \\ -- \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} \qquad (19.1)$$



Σχ.28

Εαν τα διανύσματα μετατοπίσεων $\vec{jj'}$ και $\vec{kk'}$ προβληθούν στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ λαμβάνουμε τις συνιστώσες των μεταφορικών μετατοπίσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων. Οι στροφές των άκρων των διατομών είναι οι ίδιες με εκείνες του τοπικού συστήματος, διότι οι στροφές γίνονται περί τον άξονα κάθετο στο επίπεδο $\bar{x}_1\bar{x}_2$, δηλαδή τον άξονα $\bar{x}_3$, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα x_3 του τοπικού συστήματος αξόνων x_1x_2. Οι συνιστώσες των μετατοπίσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων φαίνονται στο Σχ.29. Ορίζονται δε τα μητρώα



Σχ.29

$$[\bar{D}^{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{\theta}_3^{ij} \end{bmatrix} \qquad [\bar{D}^{ik}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \\ \bar{\theta}_3^{ik} \end{bmatrix} \qquad [\bar{D}^{i}] = \begin{bmatrix} [\bar{D}^{ij}] \\ [\bar{D}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{\theta}_3^{ij} \\ \hline \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \\ \bar{\theta}_3^{ik} \end{bmatrix} \tag{19.2}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις u_2^{ij} και u_2^{ik} στο τοπικό σύστημα αξόνων παραμορφώνουν το στοιχείο και παράγουν ένταση. Επομένως δεν μπορούν να αγνοηθούν στη διατύπωση της μεθόδου ακαμψίας για το πλαίσιο, όπως έγινε για το επίπεδο δικτύωμα.

Οι ακραίες μετατοπίσεις στοιχείου P2 μετασχηματίζονται από το καθολικό στο τοπικό σύστημα αξόνων και αντιστρόφως με σχέσεις ανάλογες με εκείνες που ισχύουν για τα μητρώα ακραίων δράσεων χρησιμοποιώντας το ίδιο μητρώο μετασχηματισμού $[\Lambda^i{}_{PF}]$. 'Αρα

$$[D^{ij}] = [\Lambda^i{}_{PF}][\overline{D}^{ij}] \qquad (19.3)$$

$$[D^{ik}] = [\Lambda^i{}_{PF}][\overline{D}^{ik}] \qquad (19.4)$$

$$[D^{i}] = [\Lambda^i{}_{PPF}][\overline{D}^{i}] \qquad (19.5)$$

$$[\overline{D}^{ij}] = [\Lambda^i{}_{PF}]^T[D^{ij}] \qquad (19.6)$$

$$[\overline{D}^{ik}] = [\Lambda^i{}_{PF}]^T[D^{ik}] \qquad (19.7)$$

$$[\overline{D}^{i}] = [\Lambda^i{}_{PPF}]^T[D^{i}] \qquad (19.8)$$

20. ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ Ρ2

Το ολικό μητρώο ακαμψίας $[k^i]$ στοιχείου Ρ2 στο τοπικό σύστημα αξόνων συνδέει τις ακραίες δράσεις $[A^i]$ με τις ακραίες μετατοπίσεις $[D^i]$ με τη σχέση

$$[A^i] = [k^i][D^i] \tag{20.1}$$

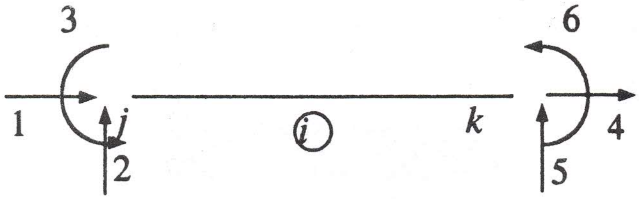
ή με ανεπτυγμένη μορφή

$$\left[\begin{array}{c} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ \hline F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11}^i & k_{12}^i & k_{13}^i & k_{14}^i & k_{15}^i & k_{16}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{23}^i & k_{24}^i & k_{25}^i & k_{26}^i \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i & k_{34}^i & k_{35}^i & k_{36}^i \\ \hline k_{41}^i & k_{42}^i & k_{43}^i & k_{44}^i & k_{45}^i & k_{46}^i \\ k_{51}^i & k_{52}^i & k_{53}^i & k_{54}^i & k_{55}^i & k_{56}^i \\ k_{61}^i & k_{62}^i & k_{63}^i & k_{64}^i & k_{65}^i & k_{66}^i \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \theta_3^{ij} \\ \hline u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{array}\right] \tag{20.2}$$

Το φυσικό νόημα των στοιχείων του μητρώου ακαμψίας προκύπτει εύκολα, όπως και για το δικτύωμα. Πράγματι, αν π.χ. στη σχέση (20.2) θέσουμε $u_1^{ij} = 1$, $u_2^{ij} = \theta_3^{ij} = u_1^{ik} = u_2^{ik} = \theta_3^{ik} = 0$, τότε λαμβάνουμε

$$\left[\begin{array}{c} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ \theta_3^{ij} \\ \hline F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} k_{11}^i \\ k_{21}^i \\ k_{31}^i \\ \hline k_{41}^i \\ k_{51}^i \\ k_{61}^i \end{array}\right] \tag{20.3}$$

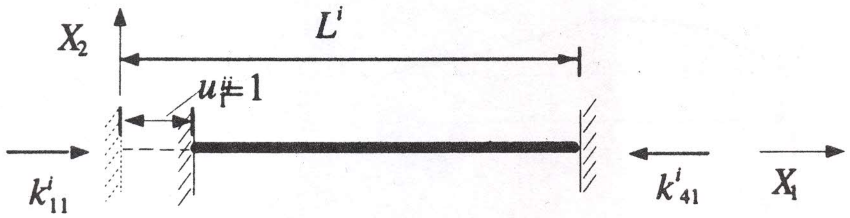
Δηλαδή, τα στοιχεία της πρώτης στήλης του μητρώου ακαμψίας εκφράζουν ακραίες δράσεις για μοναδιαία τιμή της μετατόπισης u_1^{ij}, όταν οι λοιπές μετατοπίσεις είναι μηδέν. Ανάλογα προκύπτει και το φυσικό νόημα των στοιχείων και των υπόλοιπων στηλών του μητρώου $[k^i]$. Γενικώς, εάν αριθμήσουμε με αύξουσα σειρά τις έξι διευθύνσεις των ακραίων δράσεων, όπως στο Σχ.30, τότε το φυσικό νόημα του στοιχείου k^i_{pq} φανερώνει ακραία δράση κατά την διεύθυνση p για μοναδιαία μετατόπιση κατά την διεύθυνση q, όταν οι λοιπές μετατοπίσεις είναι μηδέν.



Σχ.30

Τα στοιχεία του μητρώου ακαμψίας μπορεί να προκύψουν με βάση το φυσικό τους νόημα, λύνοντας αντίστοιχα προβλήματα στατικής. Για στοιχείο Ρ2 με σταθερή διατομή έχουμε

α) Τα στοιχεία της πρώτης στήλης λαμβάνονται από τη λύση του προβλήματος του Σχ.31 ($u_1^{ij}=1,\ u_2^{ij}=\theta_3^{ij}=u_1^{ik}=u_2^{ik}=\theta_3^{ik}=0$

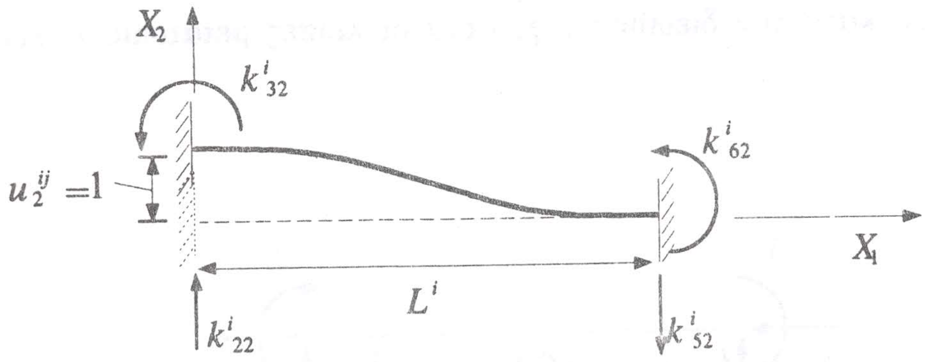


Σχ.31

Προκύπτει αμέσως

$$k_{11}^i=-k_{41}^i=\frac{E^iA^i}{L^i}$$
$$k_{21}^i=k_{31}^i=k_{51}^i=k_{61}^i=0$$

β) Τα στοιχεία της δεύτερης στήλης λαμβάνονται από τη λύση του προβλήματος του Σχ.32 ($u_2^{ij}=1,\ u_1^{ij}=\theta_3^{ij}=u_1^{ik}=u_2^{ik}=\theta_3^{ik}=0$)



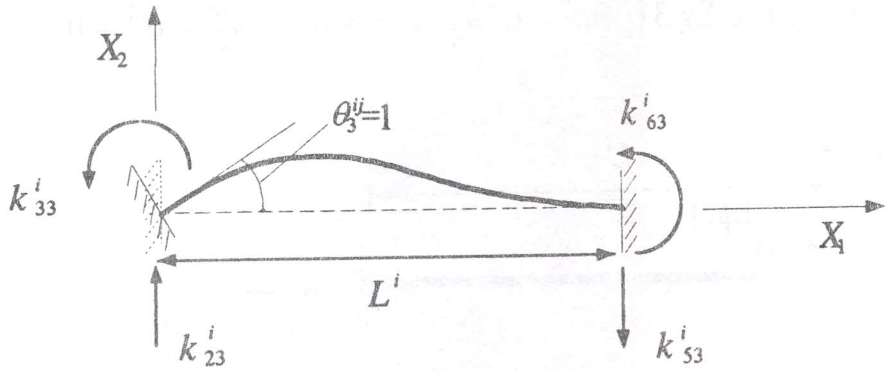
Σχ.32

$$k^i_{22} = -k^i_{52} = \frac{12E^iI^i}{(L^i)^3}$$

$$k^i_{32} = k^i_{62} = \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2}$$

$$k^i_{12} = k^i_{42} = 0$$

γ) Τα στοιχεία της τρίτης στήλης λαμβάνονται από τη λύση του προβλήματος του Σχ.33 ($\theta_3^{ij} = 1,\ u_1^{ij} = u_2^{ij} = u_1^{ik} = u_2^{ik} = \theta_3^{jk} = 0$)



Σχ.33

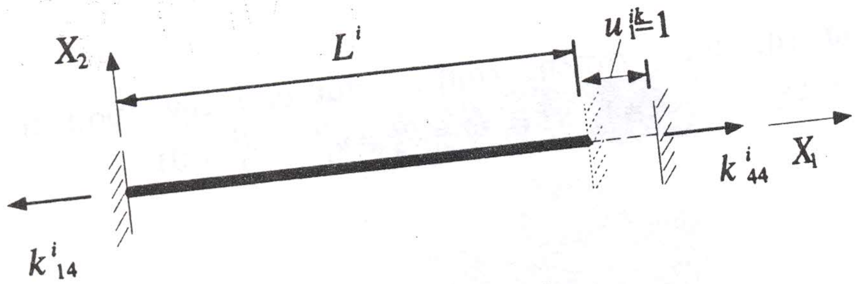
$$k^i_{23} = -k^i_{53} = \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2}$$

$$k^i_{33} = \frac{4E^iI^i}{L^i}$$

$$k^i_{63} = \frac{2E^iI^i}{L^i}$$

$$k^i_{13} = k^i_{43} = 0$$

δ) Τα στοιχεία της τέταρτης στήλης λαμβάνονται από τη λύση του προβλήματος του Σχ.34 ($u_1^{ik} = 1,\ u_1^{ij} = u_2^{ij} = \theta_3^{jj} = u_2^{ik} = \theta_3^{jk} = 0$)

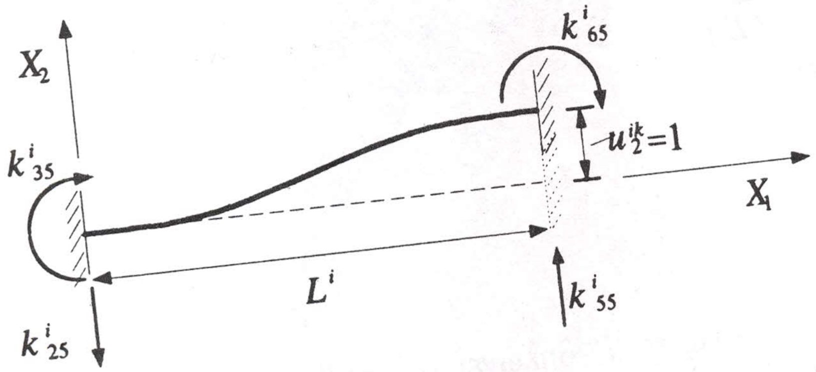


Σχ.34

$$k^i_{44} = -k^i_{14} = \frac{E^i A^i}{L^i}$$

$$k^i_{42} = k^i_{43} = k^i_{53} = k^i_{63} = 0$$

ε) Τα στοιχεία της πέμπτης στήλης λαμβάνονται από τη λύση του προβλήματος του Σχ.35 ($u_2^{ik} = 1,\ u_1^{ij} = u_2^{ij} = \theta_3^{jj} = u_1^{ik} = \theta_3^{jk} = 0$)



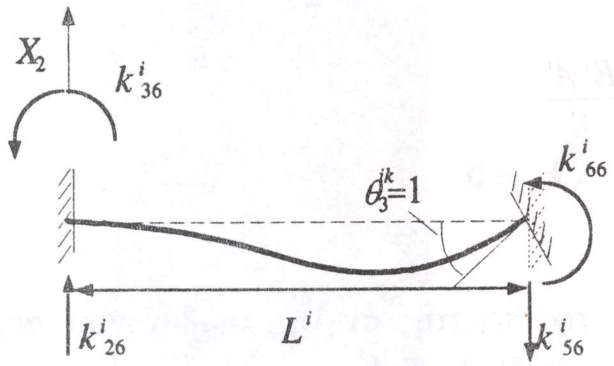
Σχ.35

$$k_{55}^i = -k_{25}^i = \frac{12E^iI^i}{(L^i)^3}$$

$$k_{35}^i = k_{65}^i = -\frac{6E^iI^i}{(L^i)^2}$$

$$k_{15}^i = k_{45}^i = 0$$

στ) Τα στοιχεία της έκτης στήλης λαμβάνονται από την λύση του προβλήματος του Σχ.36 ($\theta_3^{jk} = 1,\ u_1^{ij} = u_2^{ij} = \theta_3^{ij} = u_1^{ik} = u_2^{ik} = 0$)



Σχ.36

$$k_{26}^i = -k_{56}^i = \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2}$$

$$k_{36}^i = \frac{2E^iI^i}{L^i}$$

$$k_{66}^i = \frac{4E^iI^i}{L^i}$$

Στις παραπάνω σχέσεις το I^i δηλώνει τη ροπή αδρανείας της διατομής του στοιχείου περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου, δηλαδή περί τον άξονα x_3.

Μετά τον υπολογισμό των στοιχείων του μητρώου ακαμψίας γράφουμε

$$[k^i]=\begin{bmatrix} \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^iI^i}{(L^i)^3} & \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{(L^i)^3} & \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} \\ 0 & \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\ -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^iI^i}{(L^i)^3} & -\frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & 0 & \frac{12E^iI^i}{(L^i)^3} & -\frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} \\ 0 & \frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{(L^i)^2} & \frac{4E^iI^i}{L^i} \end{bmatrix} \tag{20.4}$$

Το ολικό μητρώο ακαμψίας δεν αντιστρέφεται για τους ίδιους φυσικούς λόγους που δεν αντιστρέφεται και το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου P1. Από μαθηματική άποψη αυτό συμβαίνει διότι η ορίζουσα του $[k^i]$ είναι μηδέν, $|k^i|=0$.

Το ολικό μητρώο ακαμψίας στο καθολικό σύστημα αξόνων ορίζεται από τη σχέση

$$[\bar{A}^i]=[\bar{k}^i][\bar{D}^i] \tag{20.5}$$

προκύπτει δε από το $[k^i]$ με το *μετασχηματισμό ομοιότητος*, όπως και το μητρώο ακαμψίας στοιχείου P1, δηλαδή

$$[\bar{k}^i]=[\Lambda^i_{PPF}]^T[k^i][\Lambda^i_{PPF}] \tag{20.6}$$

Η σχέση (20.5) μετά από επιμερισμό του $[\bar{k}^i]$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix}[\bar{A}^{ij}]\\ [\bar{A}^{ik}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\bar{k}^i_{jj}] & [\bar{k}^i_{jk}]\\ [\bar{k}^i_{kj}] & [\bar{k}^i_{kk}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\bar{D}^{ij}]\\ [\bar{D}^{ik}]\end{bmatrix} \tag{20.7}$$

ή μετά την εκτέλεση των πράξεων

$$[\bar{A}^{ij}]=[\bar{k}^i_{jj}][\bar{D}^{ij}]+[\bar{k}^i_{jk}][\bar{D}^{ik}] \tag{20.8}$$

$$[\bar{A}^{ik}]=[\bar{k}^i_{kj}][\bar{D}^{ij}]+[\bar{k}^i_{kk}][\bar{D}^{ik}] \tag{20.9}$$

όπου

$$[\bar{k}_{jj}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{11} & \bar{k}^i_{12} & \bar{k}^i_{13} \\ \bar{k}^i_{21} & \bar{k}^i_{22} & \bar{k}^i_{23} \\ \bar{k}^i_{31} & \bar{k}^i_{32} & \bar{k}^i_{33} \end{bmatrix} \qquad (20.10)$$

$$[\bar{k}_{jk}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{14} & \bar{k}^i_{15} & \bar{k}^i_{16} \\ \bar{k}^i_{24} & \bar{k}^i_{25} & \bar{k}^i_{26} \\ \bar{k}^i_{34} & \bar{k}^i_{35} & \bar{k}^i_{36} \end{bmatrix} \qquad (20.11)$$

$$[\bar{k}_{kj}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{41} & \bar{k}^i_{42} & \bar{k}^i_{43} \\ \bar{k}^i_{51} & \bar{k}^i_{52} & \bar{k}^i_{53} \\ \bar{k}^i_{61} & \bar{k}^i_{62} & \bar{k}^i_{63} \end{bmatrix} \qquad (20.12)$$

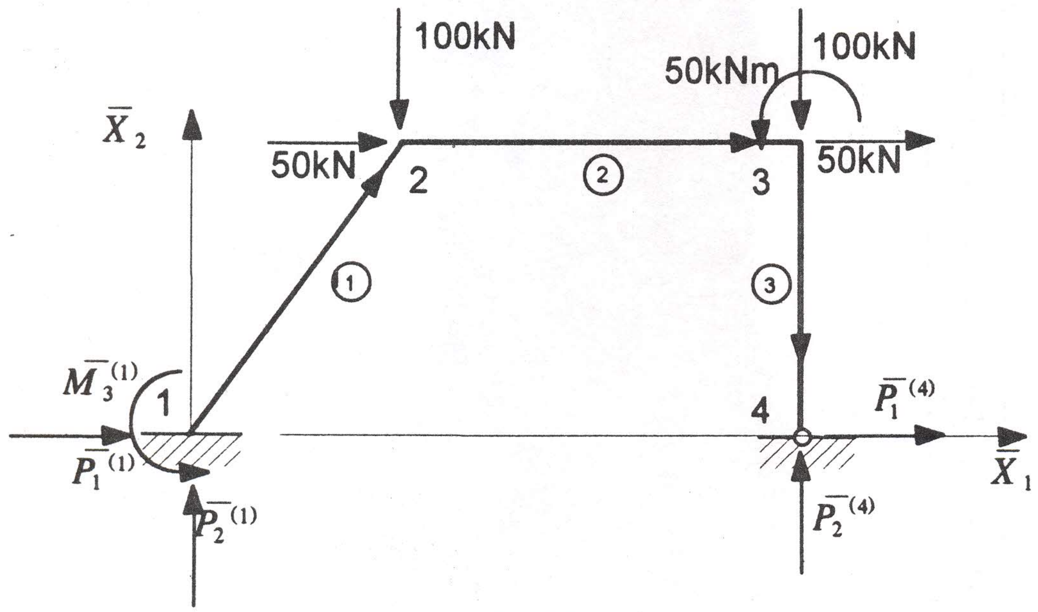
$$[\bar{k}_{kk}] = \begin{bmatrix} \bar{k}^i_{44} & \bar{k}^i_{45} & \bar{k}^i_{46} \\ \bar{k}^i_{54} & \bar{k}^i_{55} & \bar{k}^i_{56} \\ \bar{k}^i_{64} & \bar{k}^i_{65} & \bar{k}^i_{66} \end{bmatrix} \qquad (20.13)$$

21. ΜΗΤΡΩΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ, ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Το μητρώο όλων των επικόμβιων δράσεων $[\hat{P}]$ επίπεδου πλαισίου ορίζεται όπως και του δικτυώματος, δηλαδή περιλαμβάνει όλες τις επικόμβιες δράσεις (εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις). Η μόνη διαφορά από το δικτύωμα είναι ότι στους κόμβους ασκούνται εκτός από τις δυνάμεις και ροπές, δηλαδή οι επικόμβιες δράσεις του κόμβου i είναι

$$[\overline{P}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \overline{P}_1^{(i)} \\ \overline{P}_2^{(i)} \\ \overline{M}_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{3i-2} \\ \hat{P}_{3i-1} \\ \hat{P}_{3i} \end{bmatrix} \tag{21.1}$$

Προφανώς οι δράσεις στον κόμβο i καταλαμβάνουν τις θέσεις $3i-2$, $3i-1$ και $3i$ στο μητρώο $[\hat{P}]$. Για το πλαίσιο του Σχ.37 το μητρώο όλων των επικόμβιων δράσεων είναι



Σχ.37

$$
[\hat{P}] = \begin{bmatrix} \overline{P}_1^{(1)} \\ \overline{P}_2^{(1)} \\ \overline{M}_3^{(1)} \\ \hdashline +50 \\ -100 \\ 0 \\ \hdashline +50 \\ -100 \\ +50 \\ \hdashline \overline{P}_1^{(4)} \\ \overline{P}_2^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \hdashline +50 \\ -100 \\ 0 \\ \hdashline +50 \\ -100 \\ +50 \\ \hdashline \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21.2}
$$

Ανάλογα ορίζεται και το μητρώο όλων των επικόμβιων μετατοπίσεων $[\hat{\Delta}]$, το οποίο για το πλαίσιο του Σχ.37 είναι

$$
[\hat{\Delta}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \overline{\Delta}_1^{(2)} \\ \overline{\Delta}_2^{(2)} \\ \overline{\Delta}_3^{(2)} \\ \hdashline \overline{\Delta}_1^{(3)} \\ \overline{\Delta}_2^{(3)} \\ \overline{\Delta}_3^{(3)} \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \overline{\Delta}_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \hat{\Delta}_4 \\ \hat{\Delta}_5 \\ \hat{\Delta}_6 \\ \hdashline \hat{\Delta}_7 \\ \hat{\Delta}_8 \\ \hat{\Delta}_9 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \hat{\Delta}_{12} \end{bmatrix} \tag{21.3}
$$

Το ολικό καθολικό μητρώο ακαμψίας του πλαισίου ορίζεται από την σχέση

$$
[\hat{P}] = [\hat{K}][\hat{\Delta}]
$$

και υπολογίζεται από την θεώρηση της ισορροπίας όλων των κόμβων. Μπορεί να μορφωθεί αυτόματα με την ίδια συλλογιστική που προκύπτει και το μητρώο ακαμψίας του δικτυώματος. Για το πλαίσιο του παραδείγματος συμπληρώνεται ο πίνακας

	$[\overline{\Delta}^{(1)}]$	$[\overline{\Delta}^{(2)}]$	$[\overline{\Delta}^{(3)}]$	$[\overline{\Delta}^{(4)}]$
$[\overline{P}^{(1)}]$	$[\overline{k}^{1}_{jj}]$	$[\overline{k}^{1}_{jk}]$	$[0]$	$[0]$
$[\overline{P}^{(2)}]$	$[\overline{k}^{1}_{kj}]$	$[\overline{k}^{1}_{kk}]+[\overline{k}^{2}_{jj}]$	$[\overline{k}^{2}_{jk}]$	$[0]$
$[\overline{P}^{(3)}]$	$[0]$	$[\overline{k}^{2}_{kj}]$	$[\overline{k}^{2}_{kk}]+[\overline{k}^{3}_{jj}]$	$[\overline{k}^{3}_{jk}]$
$[\overline{P}^{(4)}]$	$[0]$	$[0]$	$[\overline{k}^{3}_{kj}]$	$[\overline{k}^{3}_{kk}]$

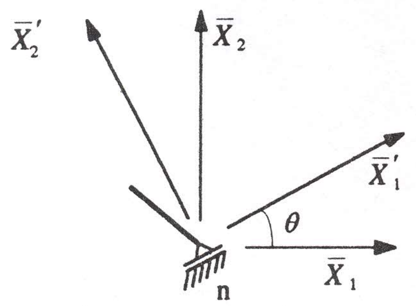
(21.4)

'Αρα

$$[\hat{K}]=\begin{bmatrix} [\overline{k}^{1}_{jj}] & [\overline{k}^{1}_{jk}] & [0] & [0] \\ [\overline{k}^{1}_{kj}] & [\overline{k}^{1}_{kk}]+[\overline{k}^{2}_{jj}] & [\overline{k}^{2}_{jk}] & [0] \\ [0] & [\overline{k}^{2}_{kj}] & [\overline{k}^{2}_{kk}]+[\overline{k}^{3}_{jj}] & [\overline{k}^{3}_{jk}] \\ [0] & [0] & [\overline{k}^{3}_{kj}] & [\overline{k}^{3}_{kk}] \end{bmatrix}$$

Τα επόμενα βήματα μετά τη μόρφωση των μητρώων $[\hat{P}],[\hat{\Delta}]$ και $[\hat{K}]$ είναι

α) Τροποποίηση των μητρώων $[\hat{P}],[\hat{\Delta}],[\hat{K}]$ συνεπεία λοξής κυλίσεως, εφόσον υπάρχει, κατά διεύθυνση άξονα $\overline{x}_1'$ που σχηματίζει γωνία θ ως προς τον άξονα $\overline{x}_1$ (βλ.Σχ.38).



Σχ.38

Ο μετασχηματισμός των επικόμβιων δράσεων στον κόμβο n θα γίνει από την σχέση