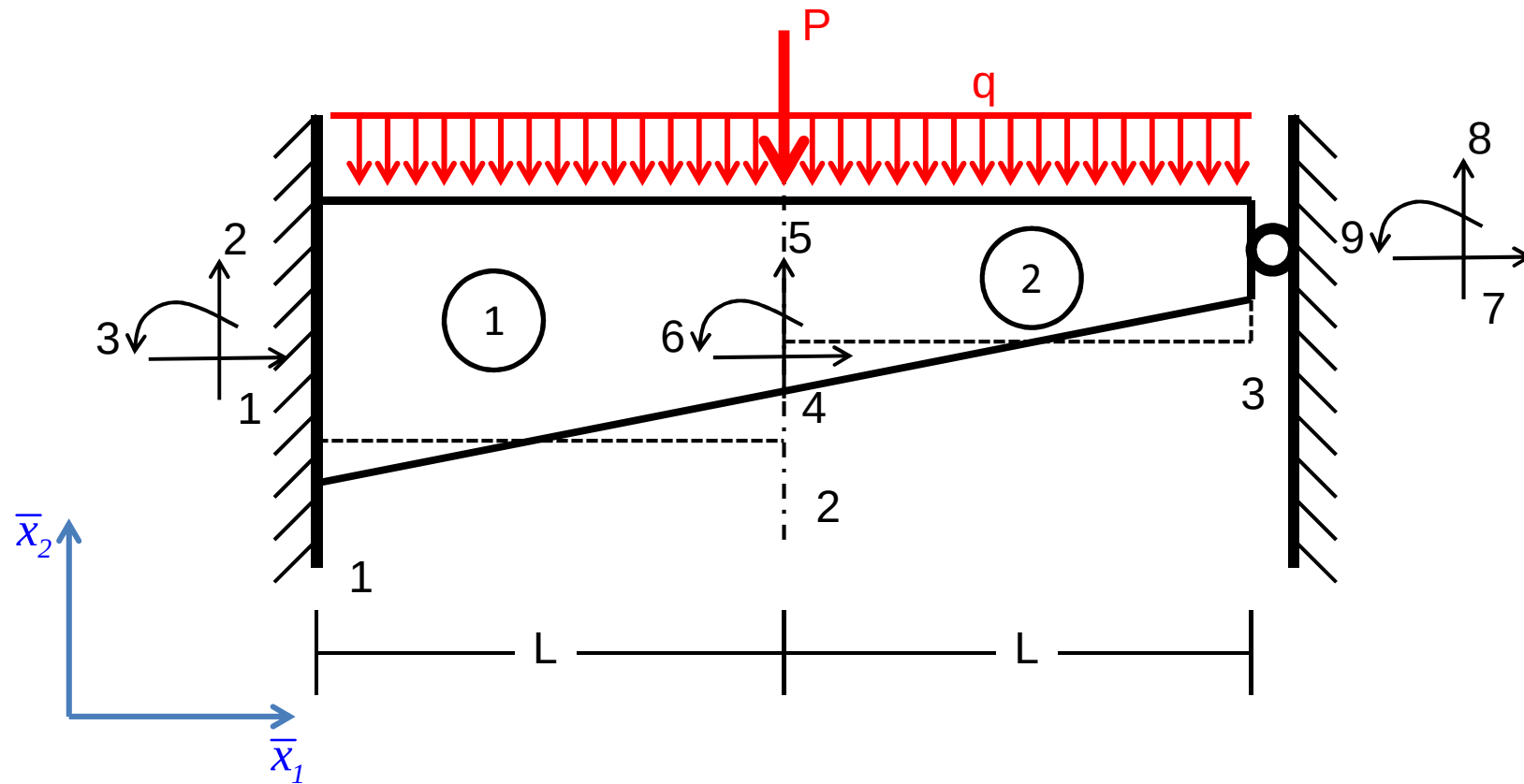


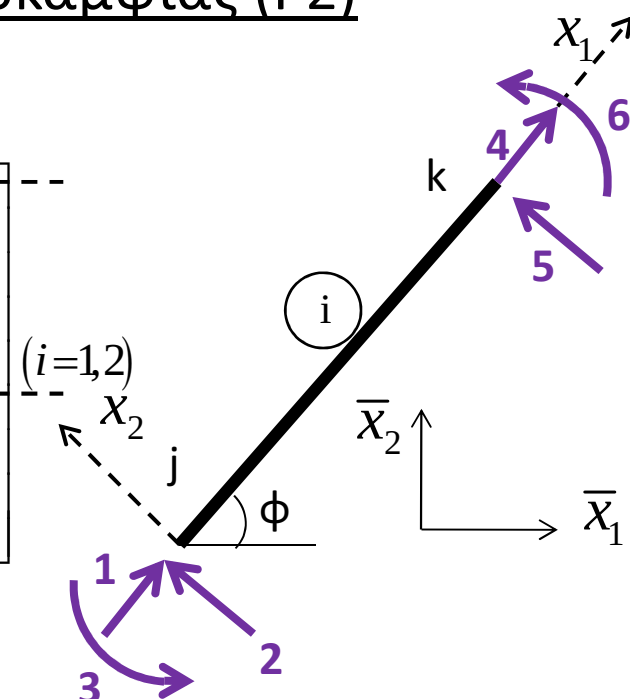
ΑΣΚΗΣΗ

ΔΟΚΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ



Η δοκός μεταβλητής διατομής προσεγγίζεται από τα στοιχεία 1-2 και 2-3 σταθερού ύψους με ροπές αδρανείας $2I$ και I .

Μόρφωση τοπικών μητρώων δυσκαμψίας (P2)

$$[k^i] = \begin{bmatrix} -\frac{AE_i}{L_i} & 0 & 0 & -\frac{AE_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} & 0 & -\frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{4EI_i}{L_i} & 0 & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{2EI_i}{L_i} \\ -\frac{AE_i}{L_i} & 0 & 0 & \frac{AE_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & 0 & \frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{2EI_i}{L_i} & 0 & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{4EI_i}{L_i} \end{bmatrix} \quad (i=1,2)$$


Παραλείπουμε την αξονική ένταση:

$$[k^1] = EI \begin{bmatrix} \text{2} & & & & & \\ & \text{3} & & & & \\ & & & & & \\ \text{5} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24/L^3 & & & & & \\ 12/L^2 & 8/L & & & & \\ -24/L^3 & -12/L^2 & 24/L^3 & & & \\ 12/L^2 & 4/L & -12/L^2 & 8/L & & \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = EI \begin{bmatrix} \text{5} & & & & & \\ & \text{6} & & & & \\ & & & & & \\ \text{8} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12/L^3 & & & & & \\ 8/L^2 & 4/L & & & & \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & & & \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L & & \end{bmatrix}$$

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού (P2)

$$\left[\Lambda_{PPF}^i \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & & \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & & [0] \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ & [0] & & -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$$



$$\left[\Lambda_{PPF}^1 \right] = \left[\Lambda_{PPF}^2 \right] = \left[I \right] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\left[\bar{k}^1 \right] = \left[\Lambda_{PPF}^1 \right]^T \left[k^1 \right] \left[\Lambda_{PPF}^1 \right] = \left[k^1 \right]$$

$$\left[\bar{k}^2 \right] = \left[\Lambda_{PPF}^2 \right]^T \left[k^2 \right] \left[\Lambda_{PPF}^2 \right] = \left[k^2 \right]$$

Τροποποίηση του στοιχείου 2.

Στατική συμπίκνωση του στροφικού βαθμού ελευθερίας στον κόμβο 3.

$$[k^2] = EI \begin{bmatrix} \bar{k}_{cc}^2 & & \\ & \begin{bmatrix} 24/L^3 & 12/L^2 & -24/L^3 \\ 12/L^2 & 8/L & -12/L^2 \end{bmatrix} & \\ & & \bar{k}_{ee}^2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το τροποποιημένο μητρώο δυσκαμψίας του μέλους 2

$$[\bar{k}_c^2] = [\bar{k}_{cc}^2] - [\bar{k}_{ce}^2][\bar{k}_{ee}^2]^{-1}[\bar{k}_{ec}^2] \Rightarrow$$

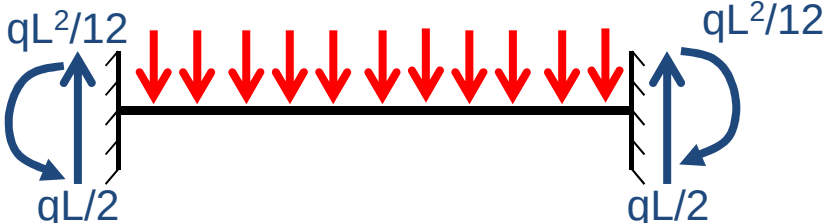
$$[\bar{k}_c^2] = \begin{bmatrix} 3/L^3 & 3/L^2 & -3/L^3 \\ 3/L^2 & 3/L & -3/L^2 \\ -3/L^3 & -3/L^2 & 3/L^3 \end{bmatrix}$$

Μόρφωση ολικού μητρώου δυσκαμψίας του φορέα

$$[\bar{k}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\textcolor{red}{2}} & \text{\textcolor{red}{3}} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{\#2} \\ \text{\textcolor{red}{5}} & \text{\textcolor{red}{6}} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{\#3} \\ \text{\textcolor{red}{8}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\textcolor{red}{2}} \\ \text{\textcolor{red}{3}} \end{matrix} & \begin{matrix} 24/L^3 & 12/L^2 & -24/L^3 & 12/L^2 & 0 \\ 12/L^2 & 8/L & -12/L^2 & 4/L & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\#2} \\ \text{\textcolor{red}{5}}EI \\ \text{\textcolor{red}{6}} \end{matrix} & \begin{matrix} -24/L^3 & -12/L^2 & 27/L^3 & -9/L^2 & -3/L^3 \\ 12/L^2 & 4/L & -9/L^2 & 11/L & -3/L^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\#3} \\ \text{\textcolor{red}{8}} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & -3/L^3 & -3/L^2 & 3/L^3 \end{matrix} \end{matrix}$$

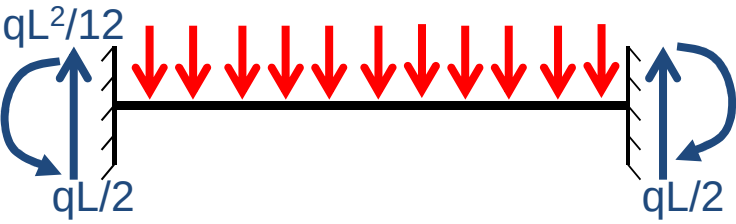
Υπολογισμός δράσεων παγιώσεως μελών

Μέλος 1:



$$\{\bar{A}_r^1\} = \{A_r^1\} = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \\ \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix}$$

Μέλος 2:



$$\{\bar{A}_r^2\} = \{A_r^2\} = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2j} \\ \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix}$$

Τροποποίηση μητρώου δράσεων παγιώσεως μέλους 2 λόγω συμπίκνωσης του στροφικού βαθμού ελευθερίας στον κόμβο 3

$$\begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{cc}^2 \\ \bar{P}_e^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{P}_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{cc}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{ce}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{ee}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_e^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5qL/8 \\ qL^2/8 \\ 3qL/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \\ \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix}$$

Εύρεση δράσεων παγιώσεως κόμβων

$$\begin{bmatrix} S^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix} = [3qL/8]$$

$$\begin{bmatrix} S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9qL/8 \\ qL^2/24 \end{bmatrix}$$

Μόρφωση συστήματος εξισώσεων $[\bar{P}] = [\bar{k}][\bar{\Delta}]$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_2^1 - qL/2 \\ \bar{M}_3^1 - qL^2/12 \\ \hline -9qL/8 - P \\ qL^2/24 \\ \hline \bar{P}_2^3 - 3qL/8 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 24/L^3 & 12/L^2 & | & -24/L^3 & 12/L^2 & | & 0 \\ 12/L^2 & 8/L & | & -12/L^2 & 4/L & | & 0 \\ \hline -24/L^3 & -12/L^2 & | & 27/L^3 & -9/L^2 & | & -3/L^3 \\ 12/L^2 & 4/L & | & -9/L^2 & 11/L & | & -3/L^2 \\ \hline 0 & 0 & | & -3/L^3 & -3/L^2 & | & 3/L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \bar{\Delta}_2^1 \\ \bar{\Delta}_3^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

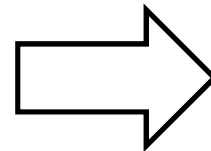
Προκειμένου να συμπυκνωθούν στατικά οι β.ε. του κόμβου 2
αναδιατάσσουμε αρχικά το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα

Προκειμένου να συμπυκνωθούν στατικά οι β.ε. του κόμβου 2
αναδιατάσσουμε αρχικά το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα

$$\begin{array}{c}
 \left[\bar{k}_{cc} \right] \\
 \\
 EI \\
 \\
 \left[\bar{k}_{ec} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|cc}
 24/L^3 & 12/L^2 & 0 & -24/L^3 & 12/L^2 \\
 12/L^2 & 8/L & 0 & -12/L^2 & 4/L \\
 0 & 0 & 3/L^3 & -3/L^3 & -3/L^2 \\
 \hline
 -24/L^3 & -12/L^2 & -3/L^3 & 27/L^3 & -9/L^2 \\
 12/L^2 & 4/L & -3/L^2 & -9/L^2 & 11/L
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left[\bar{k}_{ce} \right] \\
 \\
 \\
 \\
 \left[\bar{k}_{ee} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

και το μητρώο εξωτερικών δράσεων

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 \bar{P}_2^1 - qL/2 \\
 \bar{M}_3^1 - qL^2/12 \\
 \bar{P}_2^3 - 3qL/8 \\
 \hline
 -9qL/8 - P \\
 qL^2/24
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left[\bar{P}_{cc} \right] \\
 \\
 \\
 \\
 \left[\bar{P}_e \right]
 \end{array}
 \end{array}$$



Υπολογίζουμε το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας του φορέα

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{cc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{ee} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{k}_{ec} \end{bmatrix}$$

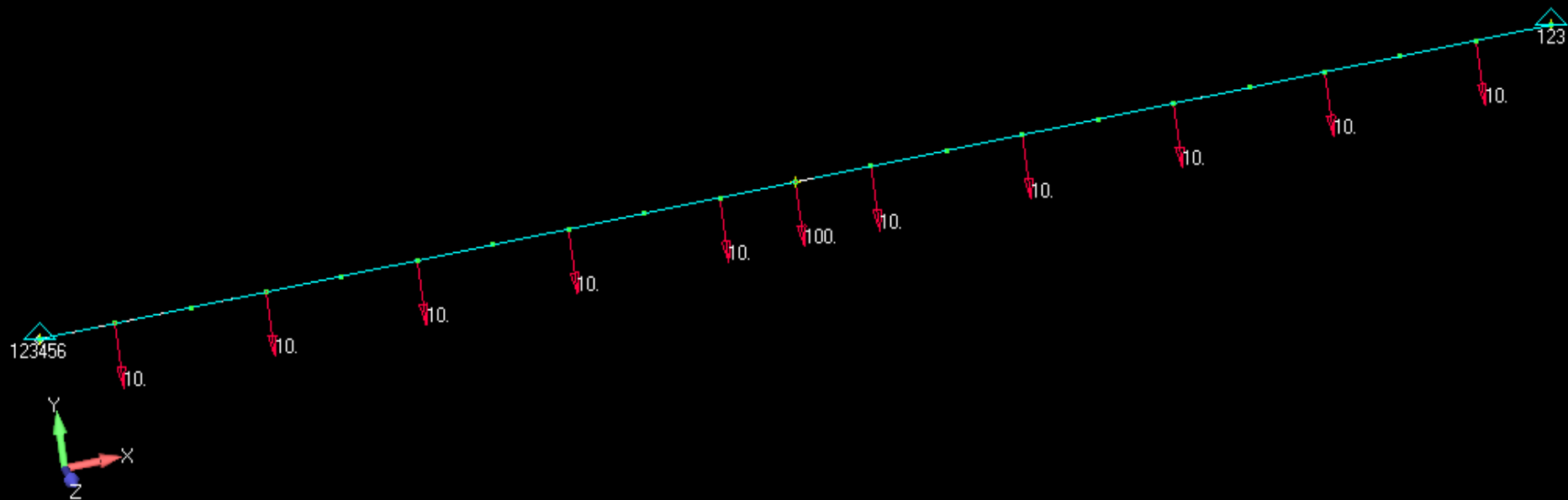
$$\begin{bmatrix} \bar{k}_c \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.667 / L^3 & 1.333 / L^2 & -0.667 / L^3 \\ 1.333 / L^2 & 2.667 / L & -1.333 / L^2 \\ -0.667 / L^3 & -1.333 / L^2 & 0.66 / L^3 \end{bmatrix}$$

και το συμπυκνωμένο μητρώο ακραίων δράσεων

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{cc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{ee} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_2^1 + 0.333qL - 0.722P \\ \bar{M}_3^1 + 0.4167qL^2 - 0.444PL \\ \bar{P}_2^3 - 0.0833qL - 0.278P \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή του προβλήματος σε πρόγραμμα FEM



Παραμόρφωση-w

