ΑΣΚΗΣΗ - ΕΡΓΑΣΙΑΣ
(ΕΑΠ: ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΦΥΕ 10)

α. Βρείτε τα σημεία μεγίστης καμπυλότητας του γραφήματος της συνάρτησης:

$$y=-x^3, \qquad x\in[-2,2]$$

β. Υπολογίστε το τρίεδρο Frenet.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

α. Θεωρούμε το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{r}(t)=(t,-t^3,0) \quad \text{με} \quad t\in[-2,2]$$

Η καμπυλότητα δίνεται από το διανυσματικό τύπο:

$$\kappa(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \qquad (1)$$

Είναι:

$$\vec{r}'(t)=(1,-3t^2,0), \qquad |\vec{r}'(t)|=\sqrt{1^2+(-3t^2)^2+0^2}=\sqrt{1+9t^4}=(1+9t^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}''(t)=(0,-6t,0)$$

και

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3t^2 & 0\\ 0 & -6t & 0\end{vmatrix}=\hat{i}\cdot\begin{vmatrix}-3t^2 & 0\\ -6t & 0\end{vmatrix}-\hat{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\hat{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3t^2\\ 0 & -6t\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{i}(0-0)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}(-6t-0)=(0,0,-6t)$$

$$|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|=\sqrt{(-6t)^2}=\sqrt{36t^2}=6\cdot|t|$$

Οπότε:

$$\kappa(t)=\frac{6\cdot|t|}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Για $t\in[0,2]$, $\kappa(t)=\dfrac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}=6t\cdot(1+9t^4)^{-\frac{3}{2}}$

Είναι:

$$\kappa'(t)=\left[6t(1+9t^4)^{-\frac{3}{2}}\right]'=(6t)'(1+9t^4)^{-\frac{3}{2}}+6t\left[(1+9t^4)^{-\frac{3}{2}}\right]'=$$

$$=6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}+6t\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(1+9t^4\right)'=6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}-9t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 36t^3=$$

$$=6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}-324t^4\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}=\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left[6\left(1+9t^4\right)-324t^4\right]=$$

$$=\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(6+54t^4-324t^4\right)=\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(6-270t^4\right)=6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(1-45t^4\right)$$

Έχουμε:

$$\kappa'(t)=0 \quad\Rightarrow\quad 6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(1-45t^4\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 1-45t^4=0 \quad\Rightarrow$$

$$45t^4=1 \quad\Rightarrow\quad t^4=\frac{1}{45} \quad\Rightarrow\quad t^2=\frac{1}{\sqrt{45}} \quad\Rightarrow\quad t=\frac{1}{\sqrt[4]{45}}$$

t	0		$1/\sqrt[4]{45}$		2
$\kappa'(t)$		$+$	0	$-$	
$\kappa(t)$		↗	max	↘	

Για $t=\frac{1}{\sqrt[4]{45}}$ η $\kappa(t)$ παρουσιάζει μέγιστο το $\kappa\left(\frac{1}{\sqrt[4]{45}}\right)=\frac{5^{\frac{5}{4}}}{3\sqrt{2}}$.

Για $t\in[-2,0)$, $\kappa(t)=-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}$.

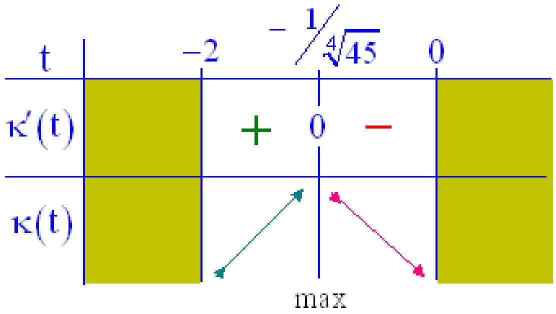
Είναι:

$$\kappa'(t)=6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(45t^2-1\right)$$

Έχουμε:

$$\kappa'(t)=0 \quad\Rightarrow\quad 6\left(1+9t^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(45t^4-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 45t^4-1=0 \quad\Rightarrow$$

$$45t^4=1 \quad\Rightarrow\quad t^4=\frac{1}{45} \quad\Rightarrow\quad t^2=\frac{1}{\sqrt{45}} \quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{\sqrt[4]{45}}$$



Για $t=-\frac{1}{\sqrt[4]{45}}$ η $\kappa(t)$ παρουσιάζει μέγιστο το $\kappa\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{45}}\right)=\frac{5^{\frac{5}{4}}}{3\sqrt{2}}$

Επομένως τα σημεία μέγιστης καμπυλότητας του γραφήματος της συνάρτησης είναι:

$$A\left(\frac{1}{\sqrt[4]{45}},-\frac{1}{\sqrt[4]{45^3}}\right),\qquad B\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{45}},\frac{1}{\sqrt[4]{45^3}}\right)$$

β. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\vec{r}(t)$ είναι:

$$\hat{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}\qquad\Rightarrow$$

$$\hat{T}=\frac{\left(1,-3t^2,0\right)}{\sqrt{1+9t^4}}=\left(\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}},-3t^2\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}},0\right)$$

Το πρωτεύον μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη $\vec{r}(t)$ είναι:

$$\hat{N}=\frac{d\hat{T}/dt}{\left|d\hat{T}/dt\right|}$$

Οπότε:

$$\frac{d\hat{T}}{dt}=\left(-\frac{1}{2}\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}36t^3,-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}}-3t^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 36t^3,0\right)=$$

$$=\left(-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}}+54t^5\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},0\right)=$$

$$=\left(-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-6t\left(1+9t^4\right)+54t^5\right),0\right)=$$

$$=\left(-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-6t-54t^5+54t^5\right),0\right)=$$

$$=\left(-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},0\right)$$

και

$$\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|=\sqrt{\left[-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^2+\left[-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^2}=$$

$$=\sqrt{324t^6\left(1+9t^4\right)^{-3}+36t^2\left(1+9t^4\right)^{-3}}=\sqrt{\left(1+9t^4\right)^{-3}\left(324t^6+36t^2\right)}=$$

$$=\sqrt{36t^2\left(1+9t^4\right)\left(1+9t^4\right)^{-3}}=6|t|\sqrt{\left(1+9t^4\right)^{-2}}=6|t|\left(1+9t^4\right)^{-1}=\frac{6|t|}{1+9t^4}$$

Άρα:

$$\hat{N}=\frac{1+9t^4}{6|t|}\left(-18t^3\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},-6t\left(1+9t^4\right)^{-\frac{3}{2}},0\right)=$$

$$=\left(-\frac{3t^3}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}},-\frac{t}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}},0\right)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα δεύτερης καθέτου $\hat{B}$ είναι το:

$$\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} & -3t^2\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} & 0\\ -\frac{3t^3}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} & -\frac{t}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{i}(0-0)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}\left[-\frac{t}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-1}-\frac{9t^5}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-1}\right]=$$

$$=-\frac{t}{|t|}\left(1+9t^4\right)^{-1}\left(1+9t^4\right)\hat{k}=-\frac{t}{|t|}\cdot\hat{k}=\left(0,0,-\frac{t}{|t|}\right)$$

Λύτης: Πετρουδάκη Δώρα