Επαναληπτική 2011

Θέμα 1°

β) $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$, $z_0=1$

$f'(z)=-(1+z^2)^{-2}\cdot 2z \Rightarrow f'(z_0)=-\frac{2}{4}=-0.5$

$f''(z)=2(1+z^2)^{-3}\cdot 2z \Rightarrow f''(z_0)=\frac{4}{8}=0.5$

$f'''(z)=-6(1+z^2)^{-4}\cdot 2z \Rightarrow f'''(z_0)=-\frac{12}{16}=-0.75$

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^3+\dots$

$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2}(x-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$r=\frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{\frac{|f^n(a)|}{n!}}\right)}$

$f^n(z)=(-1)^n n!\,(1+z^2)^{-n-1}\cdot 2z \Rightarrow |f^n(a)|=\frac{2\,n!}{2^{n+1}}=\frac{n!}{2^n}$

$\Rightarrow r=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}=2$