Επαναληπτική 2014

Θέμα 1ο

α) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=2(2\sinh x\sin y+xy)$, $f(0)=3$

$f(z)$ ολόμορφη $\Rightarrow$ ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4\sin y\cosh x+2y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v=4\cosh x(-\cos y)+y^2+a(x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=4\sinh x\cdot\cos y+2x=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς $x$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=4\sinh x(-\cos y)+a'(x) \quad (3)$$

$(2)=(3)\Rightarrow -4\sinh x\cos y-2x=-4\sinh x\cos y+a'(x)$

$\Rightarrow a'(x)=-2x \Rightarrow \boxed{a(x)=-x^2}$

Άρα $f(z)=2(2\sinh x\sin y+xy)+i(-4\cosh x\cos y+y^2-x^2)$