**1η Σειρά ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση**

1. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν α) $\left|z\_{1}z\_{2}\right|=\left|z\_{1}\right|\left|z\_{2}\right|$, β) $\overbar{z}\_{1}\overbar{z}\_{2}=\overbar{\left(z\_{1}z\_{2}\right)}$, γ) $\left(\overbar{z}\right)^{n}=\overbar{\left(z^{n}\right)}$
2. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε ότι αν ενα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχει μια γνησίως μιγαδική ρίζα $z\_{1} $τότε υποχρεωτικά o συζυγής μιγαδικός $\overbar{z\_{1}}$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου.
3. Να υπολογιστούν οι εκφράσεις α) $\frac{\left(1+i\right)^{16}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}}$ , β) $\sqrt[3]{1+i}$ , γ) $27^{{1}/{3}} i^{-{1}/{2}}$
4. Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $z\ne -1$ μοναδιαίου μέτρου δύναται να αναπαρασταθεί ως $z=\frac{1+it}{1-it}$ με $t\in R$.
5. Δεν συνίσταται η αυτόματη μεταφορά σχέσεων από την πραγματική στη μιγαδική ανάλυση. Επί παραδείγματι αποδείξτε ότι $\left|\sin(z)\right|^{2}+\left|\cos(z)\right|^{2}\ne 1$ εάν $Im\left(z\right)\ne 0$. Εντούτοις αποδείξτε ότι ισχύει $\left(\sin(z)\right)^{2}+\left(\cos(z)\right)^{2}=1$ για κάθε μιγαδικό αριθμό $z. $
6. Προσδιορίστε την εικόνα του χωρίου $A=\left\{z\in ∁: \left|Rez\right|\leq \frac{π}{2}, Imz\geq 0 \right\}$ υπό το μετασχηματισμό $f\left(z\right)=\sin(z)$.
7. Δείξτε ότι $\left|e^{ie^{\overbar{z}}}\right|=e^{e^{x}\sin(y)}$ όταν $z=x+iy$.
8. Να προσδιοριστούν οι (προφανώς) μη πραγματικές ρίζες των εξισώσεων

α) $\sin(z)+\cos(z)=2$, β) $e^{z}=i$ και γ) $\sin(z)-\cos(z)=i$ .

1. α) Εργαστείτε με τις συνθήκες Cauchy-Riemann (σε καρτεσιανή ή σε πολική μορφή) και αποφανθείτε περί της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης $f\left(z\right)=z\left|z\right|, z\in C$. β) Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας διαμέσου του ορισμού της παραγώγου. γ) Υπάρχει τόπος στον οποίον η συνάρτηση $f\left(z\right)$ να είναι αναλυτική;
2. Να προσδιοριστεί το σημειοσύνολο του $C$ όπου η συνάρτηση $g\left(z\right)=x^{2}+iy^{3} $ (με $z=x+iy$) είναι παραγωγίσιμη. Είναι σε κάποιο χωρίο η συνάρτηση $g$ αναλυτική;
3. Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση $g\left(z\right)=f\left(x,y\right)+i\left(xy\right)$ είναι παντού αναλυτική (όπου $f $πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών). Είναι η συνάρτηση $h\left(z\right)=f\left(x,y\right)+i\left(x+y\right)$ αναλυτική;

 Απαντήσεις

3. α) -4 β) $\sqrt[6]{2} e^{{iπ}/{12}}e^{{i2kπ}/{3}}, k=0,1,2$ γ) $\pm 9e^{i\left(\frac{2kπ }{3}- \frac{π}{4}\right)}, k=0,1,2$

6. Το άνω ημιεπίπεδο μετά του πραγματικού άξονα.

8. α) $\frac{π}{4}+2kπ-iln\left(√2\pm 1\right), k\in Z$ β) $i\left(\frac{π}{2}+2kπ\right), k\in Z$ γ) $\frac{π}{4}+2kπ--iln\frac{\sqrt{3}-1}{√2}, k\in Z$ και $-3\frac{π}{4}+2kπ-iln\frac{\sqrt{3}+1}{√2}, k\in Z$

9. α-β) Παραγωγίσιμη μονο στο 0. γ) όχι. 10. Είναι παραγωγίσιμη αποκλειστικά επί της παραβολής $x=\frac{3y^{2}}{2}$ και πουθενά αναλυτική. 11. όχι