

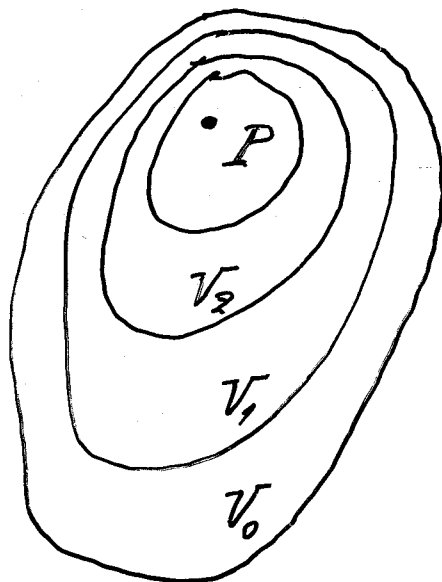
ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- Το μάθημα της Ελαστικότητας αποτελεί φυσική συνέχεια των μαθημάτων της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Στερεού και της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου.
- Η θεωρία Ελαστικότητας αντιμετωπίζει τα σχετικά προβλήματα της Μηχανικής των Στερεών με πιο αυστηρές και ακριβείς θεωρήσεις. (δηλ. ότι η στοιχειώδης "Αντοχή των Υλικών").
- Μαζί με την "Μηχανική του Συνεχούς Μέσου," η "Ελαστικότητα" προσφέρει το αναγκαίο υπόβαθρο για περιοχές όπως η Μηχανική των Υλικών και των Κατασκευών, η Υπολογιστική Μηχανική, οι Πειραματικές Μέθοδοι Μηχανικής, η Φυσική των Υλικών, η Μηχανική των Θραύσεων και των Επιδράσεων, η Διάδοση Κυμάτων στα Υλικά, τα Σύνθετα Υλικά.
- Επίσης, η θεωρία Ελαστικότητας αποτελεί απαραίτητο πεδίο εφαρμογής των Μαθηματικών (π.χ. των περιοχών των Διαφορικών Εξισώσεων, του Λογισμού των Μεταβολών, του Τανυστικού Λογισμού, των Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών, των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων, της Αριθμητικής Ανάλυσης, της Συνδυαστικής Ανάλυσης).

Υπόθεση Συνεχούς Μέσου:

Σύμφωνα με την βέβαιη αυτή υπόθεση, δεν λαμβάνεται υπόψη η ατομική δομή των υλικών και λαμβάνεται η συμπεριφορά τους σαν να ήταν η καταννομή της ύλης συνεχής. Έτσι τα σημεία του υλικού απεικονίζονται σε σημεία του Ευκλείδειου χώρου και απελευθεύεται τελείως η ατομική δομή του υλικού.

Πυκνότητα μάζας:



ακολουθία περιοχών
που συρρικνώνουν στο
σημείο P

$$V_n \subset V_{n-1}, \quad P \in V_n,$$

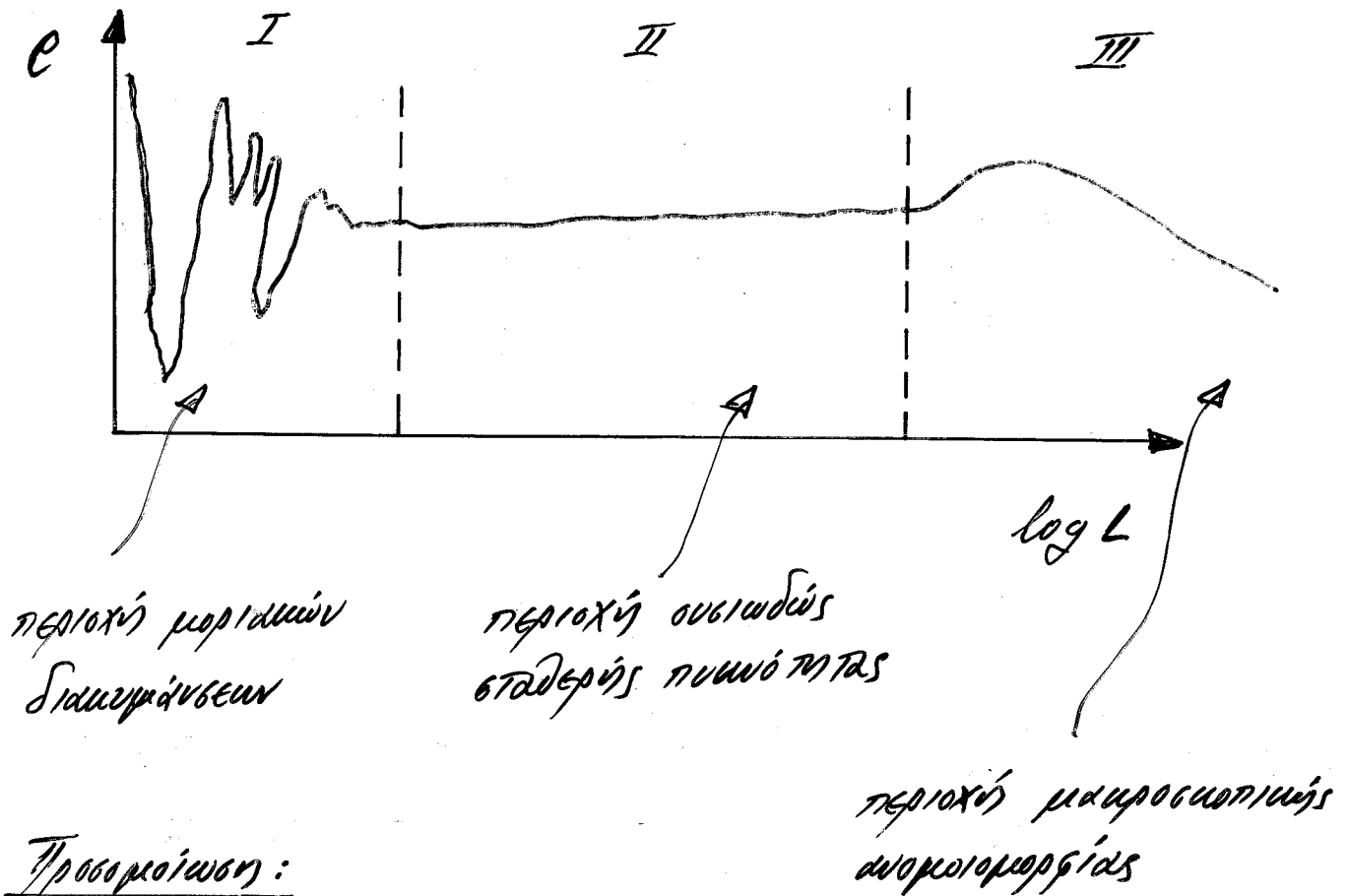
$$(n=1, 2, \dots).$$

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}$$

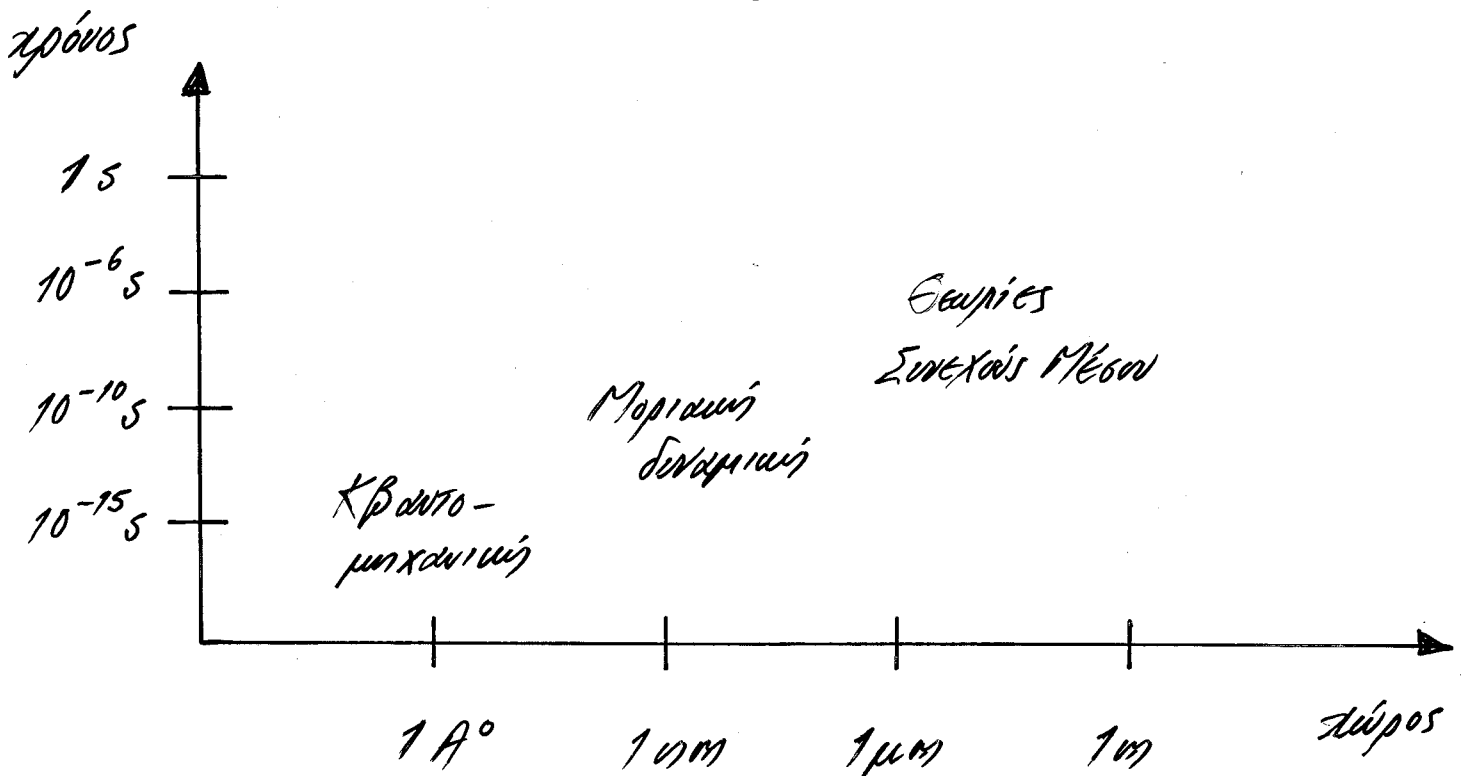
(ορίσμος της πυκνότητας)

Εφόσον η πυκνότητα ορίζεται σε όλα τα σημεία του V_0 , τότε η μάζα είναι συνεχώς κατανεμημένη στο χώρο αυτό.

Τυπική διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας συνάρτησης της διάστασης L ενός στοιχείου (δωματίου) εδάφους :



Προσέγγιση :



ΤΑΥΝΥΣΤΕΣ - ΓΡΑΦΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΕΙΚΤΩΝ

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_i$ όπου $(i=1,2,3)$.

$(b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33}) : b_{ij}$
όπου $(i,j=1,2,3)$.

ομάδα 27 ποσοτήτων : α_{ijk} .

ομάδα 81 ποσοτήτων : b_{ijkl} .

(α) Σύμβολα εύρους :

Όταν ένας δείκτης εμφανίζεται μόνον μία φορά σε έναν όρο, ο δείκτης λαμβάνει τις τιμές 1, 2 και 3, όταν αναγε-
ρόμαστε στον τρι-διάστατο χώρο.

(β) Σύμβολα άθροισμα :

Όταν ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές στον ίδιο όρο, αυτό σημαίνει άθροισμα των όρων που προκύπτουν; καθώς ο επαναλαμβανόμενος δείκτης λαμβάνει διαδοχικά τις τιμές 1, 2, 3.

Κάθενας δείκτης δεν είναι επιτρεπτό να αναπληρωθεί περισσότερο από μία φορά.

Παραδείγματα:

$$\alpha_{ii} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} ,$$

$$\alpha_i b_i = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 ,$$

$$\alpha_{ij} b_i c_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} b_i c_j =$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_{11} b_1 c_1 + \alpha_{12} b_1 c_2 + \alpha_{13} b_1 c_3 + \\ &+ \alpha_{21} b_2 c_1 + \alpha_{22} b_2 c_2 + \alpha_{23} b_2 c_3 + \\ &+ \alpha_{31} b_3 c_1 + \alpha_{32} b_3 c_2 + \alpha_{33} b_3 c_3 , \end{aligned}$$

$$\alpha_{ij} b_j = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} b_j = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \alpha_{i3} b_3 .$$

Ο αριθμός των ελεύθερων δεικτών προσδιορίζει και τον αριθμό των ποσοτήτων που εκφράζονται με το εν λόγω σύμβολο:

$\alpha_{ij} b_j$: εκφράζει $3' = 3$ ποσότητες (1 ελεύθερος δείκτης),

$\alpha_{ij} b_{jk}$: εκφράζει $3^2 = 9$ ποσότητες (2 ελεύθεροι δείκτες),

$\alpha_{ij} b_k$: εκφράζει $3^3 = 27$ ποσότητες (3 ελεύθεροι δείκτες).

6, εναλλακόμενοι δείκτες ονομάζονται και ζευγιοί ή ζευγοί (dummy), αφού είναι αδύνατο να συσχετισμένο γράμμα το οποίο τους εκφράζει:

$$\alpha_i b_i = \alpha_\ell b_\ell, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \alpha_{ij} b_{jk} = \alpha_{il} b_{lk}.$$

(αναλογία με το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_b^a f(x) dx = \int_b^a f(t) dt).$$

7) Σύμβαση παραγωγίων:

Ο δείκτης εφόρου (,) που ακολουθείται από έναν δείκτη i υποδεικνύει μερική παράγωγο ως προς x_i

Παραδείγματα:

$$\alpha_{i,j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}, \quad b_{ij,k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}, \quad c_{ij,kl} = \frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

(9 ποσότητες)

(27 ποσότητες)

(81 ποσότητες)

Προφανώς, και εδώ ισχύουν οι συμπληρωματικές σχέσεις. Έτσι:

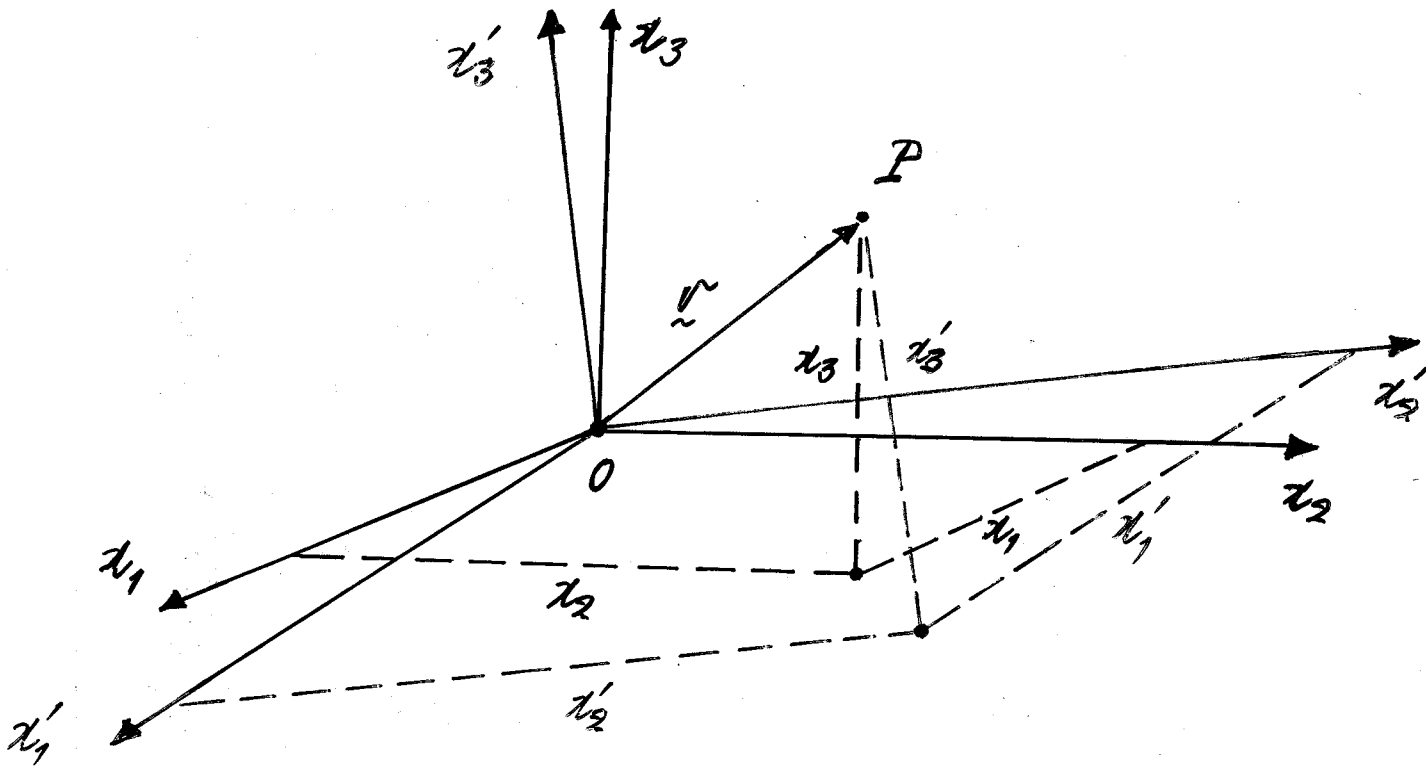
$$\alpha_{i,i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_3} ,$$

$$b_{ij,j} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_3} ,$$

$$b_{i,jj} = \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_3^2} .$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΤΑΥΝΥΣΤΩΝ

ΜΕΤΑΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ :



- $(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3)$: δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα αξόνων με κοινή αρχή O .
- Το τυχόν σημείο P έχει συντεταγμένες x_i ως προς το πρώτο σύστημα, ενώ έχει συντεταγμένες x'_i ως προς το δεύτερο. Οι συντεταγμένες αυτές συνεχίζονται βάσει του γραμμικού μετασχηματισμού :

$$x'_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 ,$$

$$x'_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 ,$$

$$x'_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 ,$$

(1)

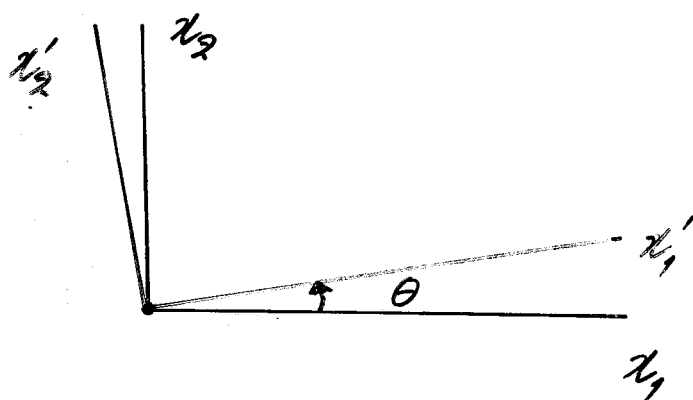
όπου οι εννέα ποσότητες α_{ij} ονομάζονται συνημίτονα κατευ-
θύνσεως (direction cosines) και εκφράζουν τα συνημίτονα
των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ του $\underline{i}$ νέου άξονα
(τονούμενου) και του $\underline{j}$ αρχικού άξονα (άτονου), δηλ.

$$\alpha_{ij} = \cos(\underline{x}'_i, \underline{x}_j) . \quad (2)$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την γραφή με δείκτες, οι σχέσεις
μετασχηματισμού (1) μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως

$$\underline{x}'_i = \alpha_{ij} \underline{x}_j . \quad (3)$$

Παράδειγμα



$$\begin{bmatrix} \underline{x}'_1 \\ \underline{x}'_2 \\ \underline{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}$$

ακύκλιτος πίνακας

Ορισμοί Τανυστών :

- Τανυστής 1^{ης} τάξης (ή διάνυσμα) είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^1 = 3$ βαθμωτές ποσότητες (τις συνιστώσες του), οι οποίες μετασχηματίζονται από ένα σύστημα αξόνων x_i σε ένα άλλο x'_i υποδινοώντας στον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού

$$A'_i = \alpha_{ij} A_j, \quad (1)$$

όπου A_i : συνιστώσες τανυστή στο σύστημα x_i ,

A'_i : " " " " x'_i ,

α_{ij} : συντελεστή μεταστροφής.

Παραδείγματα τανυστών 1^{ης} τάξης : δύναμη, μετατόπιση, ταχύτητα

- Τανυστής 2^{ας} τάξης είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^2 = 9$ βαθμωτές ποσότητες (τις συνιστώσες του) A_{ij} που αναφέρονται σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς x_i και οι οποίες μετασχηματίζονται σε ένα νέο σύστημα x'_i με βάση τον νόμο

$$A'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A_{kl}. \quad (2)$$

Παραδείγματα τανυστών 2^{ας} τάξης : τάση σ_{ij} , τροπή ϵ_{ij}

- Τανυστής 3^{ης} τάξεως είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^3 = 27$ βασικές ποσότητες A_{ijk} και υπακούουν στον εξής νόμο μετασχηματισμού

$$A'_{ijk} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} A_{lmn} . \quad (3)$$

- Μεγαλύτερης τάξεως τανυστές ορίζονται με ανάλογο τρόπο.
- Κάθε τανυστής αντιστοιχεί σε έναν πίνακα, το αντίστροφο όμως είναι αληθές μόνον όταν τα στοιχεία του πίνακα υπακούουν στον νόμο μετασχηματισμού.

Δέλτα του Kronecker και σύμβολο εναλλαγής:

- Ισότροποι τανυστές: τανυστές που έχουν τις ίδιες συνιστώσες ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i=j \\ 0 & \text{» } i \neq j \end{cases} , \quad (4)$$

π.χ. $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$.

Το δ_{ij} αντιστοιχεί στο μοναδιαίο μήτρωο (identity matrix)

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{I}}.$$

Ισχύει $\underline{\underline{I}} \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}}$ για κάθε διάνυσμα $\underline{\underline{\alpha}}$.

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad (\hat{e}_i \text{ μοναδιαία διανύσματα βάσης}).$$

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\delta_{ij} A_j = A_i, \quad \delta_{ij} B_{jk} = B_{ik}, \quad \delta_{ij} C_{jkl} = C_{ikl},$$

κτλ.

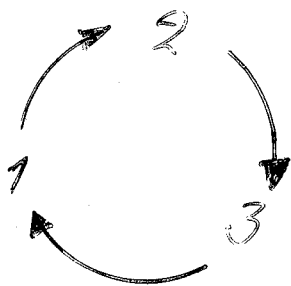
Σημείωση:

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = B_{ii},$$

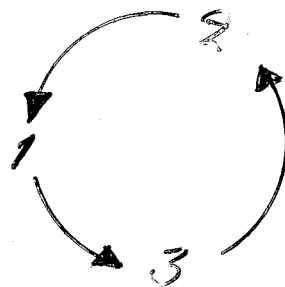
$$C_{111} + C_{222} + C_{333} = \sum_{i=1}^3 C_{iii} = \cancel{C_{iii}}.$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{εάν δύο ή και τα τρία } i, j, k \text{ είναι ίδια,} \\ +1 & \text{εάν τα } i, j, k \text{ είναι αυξανόμενη εναλλαγή των } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{» » » » » » » » } 3, 2, 1. \end{cases}$$

$$\epsilon_{123}, \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1.$$



$$\epsilon_{ijk} = +1$$



$$\epsilon_{ijk} = -1$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} \quad \text{ή} \quad C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k ,$$

$$\underline{\underline{D}} = \nabla \times \underline{\underline{A}} \quad \text{ή} \quad D_i = \epsilon_{ijk} A_{k,j} .$$

Πράξεις Τανυστών:

άθροισμα ή διαφορά

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} ,$$

πολ/επίς

$$C_{ijk} = A_i B_{jk} ,$$

συστολή (contraction)

$$C_{ik} = A_{ij} B_{jk} , \quad A_{jjk} = \delta_{ij} A_{ijk}$$

Ματρική γραφή των σχέσεων ορισμού των τανυστών:

$$A_i' = \alpha_{ij} A_j \quad \text{ή} \quad \underline{\{A_i'\} = [\alpha_{ij}] \{A_j\}},$$

$$A_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A_{kl} \quad \text{ή} \quad \underline{[A_{ij}'] = [\alpha_{ij}] [A_{ij}] [\alpha_{ij}]^T},$$

κτλ.

Συμμετρικοί και αντι-συμμετρικοί τανυστές:

$$D_{ij}^{(\Sigma)} = D_{ji}^{(\Sigma)} \equiv D_{(ij)},$$

$$D_{ij}^{(A)} = -D_{ji}^{(A)} \equiv D_{[ij]},$$

Κάθε ασύμμετρος τανυστής 2^{ης} τάξεως μπορεί να αναλυθεί μοναδικά σε άποιομα συμμετρικό και αντι-συμμετρικό τανυστή

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ij]},$$

υπόθεση

$$D_{(ij)} = \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}),$$

$$D_{[ij]} = \frac{1}{2} (D_{ij} - D_{ji}).$$

Παραδείγματα ιδιοτήτων συμμετρίας/αντι-συμμετρίας σε τανυστές
ανωτέρας τάξεως:

$$R_{ijklm} = R_{ikjlm} \quad (\text{συμμετρικός ως προς } k \text{ και } j),$$

$$E_{ijk} = -E_{kji} \quad (\text{αντι-συμμετρικός ως προς } k \text{ και } i),$$

$$G_{ijklm} = G_{jimkl} \quad (\text{συμμετρικός ως προς } i \text{ και } j, \\ \text{ομοίως ως προς } k \text{ και } m),$$

$$\beta_{ijk} = \beta_{ikj} = \beta_{kji} = \beta_{jik} \quad (\text{συμμετρικός ως προς όλους} \\ \text{τους δείκτες}).$$

Ο τανυστής 2^{ης} τάξεως ως γραμμικός μετασχηματισμός -

- ιδιότητες του τανυστή 2^{ης} τάξεως:

$$\tilde{T} \tilde{\alpha}^{(1)} = \tilde{b}^{(1)}, \quad \tilde{T} \tilde{\alpha}^{(2)} = \tilde{b}^{(2)},$$

τότε

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}(\tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(2)}) &= \tilde{T} \tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{T} \tilde{\alpha}^{(2)}, \\ \tilde{T}(\lambda \tilde{\alpha}) &= \lambda \tilde{T} \tilde{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{γραμμικότητα})$$

Αρχικοί συμβολισμοί και πράξεις:

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{a}} = \lambda$ ή

$$\alpha_i b_i = b_i \alpha_i = \lambda \text{ ή } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \\ = [\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3].$$

εσωτερικό γινόμενο διανύσματος - τανυστή $\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{b}}$ ή

$$\alpha_i E_{ij} = b_j \text{ ή } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \\ = [\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{21} + \alpha_3 E_{31}, \alpha_1 E_{12} + \alpha_2 E_{22} + \alpha_3 E_{32}, \\ \alpha_1 E_{13} + \alpha_2 E_{23} + \alpha_3 E_{33}].$$

εσωτερικό γινόμενο τανυστή - διανύσματος $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{c}}$ ή

$$E_{ij} \alpha_j = c_i \text{ ή } \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

$$(c \tilde{T}) \cdot \tilde{V} = c (\tilde{T} \cdot \tilde{V}),$$

Τελικά $\tilde{T} \equiv T_{ij}$

$$\tilde{T} + \tilde{V} = \tilde{V} + \tilde{T},$$

Συνεπώς

$$\tilde{T} + (\tilde{V} + \tilde{V}) = (\tilde{T} + \tilde{V}) + \tilde{V},$$

$$\tilde{T} + \tilde{0} = \tilde{T},$$

$$\tilde{T} + (-\tilde{T}) = \tilde{0},$$

$$\alpha \tilde{T} = \tilde{T} \alpha,$$

$$\alpha (\tilde{bT}) = (\alpha b) \tilde{T},$$

$$1 \tilde{T} = \tilde{T},$$

$$(\alpha + b) \tilde{T} = \alpha \tilde{T} + b \tilde{T},$$

$$\alpha (\tilde{T} + \tilde{V}) = \alpha \tilde{T} + \alpha \tilde{V},$$

$$\tilde{T} : \tilde{V} = T_{ij} V_{ij} \quad (\text{βασικό γινόμενο}),$$

$$\tilde{T} \cdot \tilde{V} = T_{ij} V_{ji} \quad (\text{ } \text{ } \text{ }),$$

$$\tilde{T} : \tilde{V} = \tilde{V} : \tilde{T},$$

$$\underset{\sim}{T} : (\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{V}) = \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{V},$$

$$\alpha (\underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{U}) = (\alpha \underset{\sim}{T}) : \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T} : (\alpha \underset{\sim}{U}),$$

$$\underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{T} > 0 \quad \text{εφόσον} \quad \underset{\sim}{T} = 0,$$

$$\underset{\sim}{1} \cdot \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{U},$$

$\nwarrow$ μοναδιαίος τανυστής
 $\nearrow$ διάνυσμα

$$\text{εάν } T_{ij} = \alpha_i b_j \quad \text{τότε } \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\alpha} \otimes \underset{\sim}{b} \quad \text{ή} \quad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\alpha} \underset{\sim}{b}$$

(τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων),

$$\text{εάν } P_{ij} = T_{ik} U_{kj} \quad \text{τότε } \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{U} \quad (\text{συστολή}),$$

$$\text{γενικά } \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{T} \neq \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{U},$$

$$(\underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{U}) \cdot \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{V}),$$

$$(\underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{U}) \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{R}),$$

$$\underset{\sim}{T} \cdot (\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{U}) = \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{U}.$$

Κριτήριο τανυστικού χαρακτήρα:

Ένα μαθηματικό αντικείμενο (object - entity) που καθορίζεται από 9 συνιστώσες σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς είναι τανυστής 2^{ας} τάξης, τότε και μόνον τότε όταν $\tilde{T}: (\tilde{u}, \tilde{v})$ είναι βάρυτο αναλλοίωτο μέγεθος για αντιστρέψιμα διανύσματα $\tilde{u}$ και $\tilde{v}$, δηλ. τότε και μόνον τότε όταν ισχύει $\tilde{T}_{ij}' \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' = T_{pq} u_p u_q$, όπου ο τύπος υποδηλώνει στραγγμένο ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Ορθογώνιοι Τανυστές:

- Ανάστροφος τανυστής (transpose of a tensor) είναι ο τανυστής που ικανοποιεί την αντιστροφή σχέση για όλα τα διανύσματα $\tilde{a}$ και $\tilde{b}$

$$\tilde{a} \cdot (\tilde{T} \tilde{b}) = \tilde{b} \cdot (\tilde{T}^T \tilde{a}),$$

$$\text{δηλ. } T_{ij} = T_{ji}^T.$$

- Ορθογώνιος τανυστής (orthogonal tensor) είναι ο τανυστής που όταν δρά σε διάνυσμα, το διάνυσμα διατηρεί το μήκος του και τον προσανατολισμό του,

σημ. $|\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{a}}| = |\underline{\underline{a}}|$ και $\cos(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}) = \cos(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{b}})$.

$\underline{\underline{Q}}$: ορθογώνιος τανυστής.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}} \quad \text{ή}$$

$$[\underline{\underline{Q}}]^T [\underline{\underline{Q}}] = [\underline{\underline{Q}}][\underline{\underline{Q}}]^T = [\underline{\underline{I}}] \quad \text{ή}$$

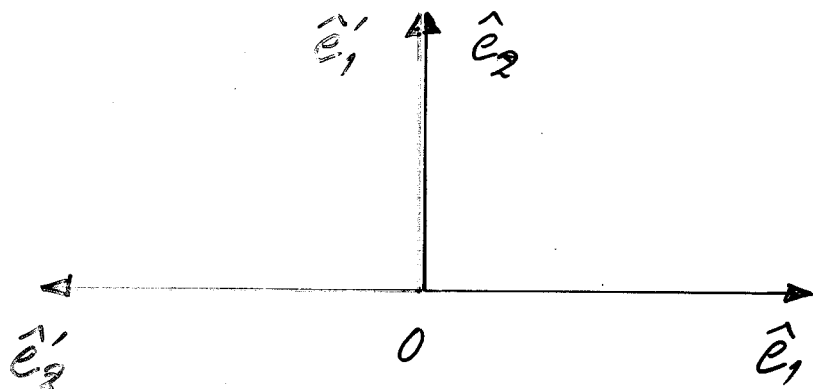
$$Q_{mi} Q_{mj} = Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij} \quad .$$

Παράδειγμα :

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{R}}][\underline{\underline{R}}]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο $\underline{\underline{R}}$ είναι ορθογώνιος τανυστής.

Παράδειγμα προσδιορισμού των συνιστωσών τανυστή σε στροφή του συστήματος συντεταγμένων:



Δίνεται ο τανυστής
$$[T]_{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί ο
$$[T]_{\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}}$$
, όπου το σύστημα

Ox'_i προκύπτει με στροφή 90° περί τον άξονα x_3 του αρχικού συστήματος Ox_i .

Έχουμε: $\hat{e}'_1 = \hat{e}_2, \hat{e}'_2 = -\hat{e}_1, \hat{e}'_3 = \hat{e}_3.$

Συντεταγμένα μετασχηματισμού: $\alpha_{12} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 = -1, \alpha_{21} = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 = 1,$
 $\alpha_{33} = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3 = 1, \text{ δηλ.}$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οπότε

$$[T'] = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{e}_i} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{e}_i} \quad \eta$$

$$T'_{11} = 2, \quad T'_{12} = -1, \quad T'_{13} = 0 \quad \text{αληθ.$$

Βερίευση του ορισμού των τανυστών :

- Οι τανυστές είναι πολυ-γραμμικές (multilinear) συναρτήσεις διανυσμάτων, π.χ.

$$T(\underbrace{m\tilde{u} + n\tilde{v}}_{\text{διανύσματα}}, \tilde{w}) = m T(\tilde{u}, \tilde{w}) + n T(\tilde{v}, \tilde{w}),$$

$$T(\tilde{u}, m\tilde{v} + n\tilde{w}) = m T(\tilde{u}, \tilde{v}) + n T(\tilde{u}, \tilde{w}).$$

- Πολυ-γραμμική συνάρτηση είναι η συνάρτηση που είναι γραμμική σε σχέση με κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές της.

Τινυτές ανωτέρως τάξεως.

- $\sigma_{ij} = E_{ijke} \epsilon_{ke}$ (1)

ή

$$\sigma_{11} = E_{1111} \epsilon_{11} + E_{1112} \epsilon_{12} + E_{1113} \epsilon_{13} + \dots + E_{1133} \epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = E_{1211} \epsilon_{11} + E_{1212} \epsilon_{12} + E_{1213} \epsilon_{13} + \dots + E_{1233} \epsilon_{33},$$

.....

$$\sigma_{33} = E_{3311} \epsilon_{11} + E_{3312} \epsilon_{12} + E_{3313} \epsilon_{13} + \dots + E_{3333} \epsilon_{33}.$$

Προφανώς, οι ανωτέρω σχέσεις μας "υποδηλώνουν" στην υπόληψη την αναγραφή του 9x9 μητρώου των ελαστικών σταθερών E_{ijke} .

- $G_{ijklm} = G_{jimkl}$ (2)

Είναι δυνατόν να διακρίνουμε από μία τέτοια σχέση εάν υπάρχει συμμετρία ή, αντίθετα, εάν υπάρχει αντι-συμμετρία ως προς τα ζεύγη των δεικτών $i-j$ και $m-k$;

Εξετάζουμε τους κάτωθι όρους :

(α) συμμετρία ταυτοχρόνως ως προς τα γένη $i-j$ και $k-m$

$$G_{1213} = G_{2131} ,$$

(β) αντι-συμμετρία ταυτοχρόνως ως προς τα γένη $i-j$ και $k-m$

$$G_{1213} = (-1)(-1) G_{2131} = G_{2131} .$$

Όπως διαφέρουν οι όροι

$$\left. \begin{array}{l} G_{1233} = G_{2133} , \\ G_{1211} = G_{2111} \end{array} \right\} \text{συμμετρία ως προς } i-j$$

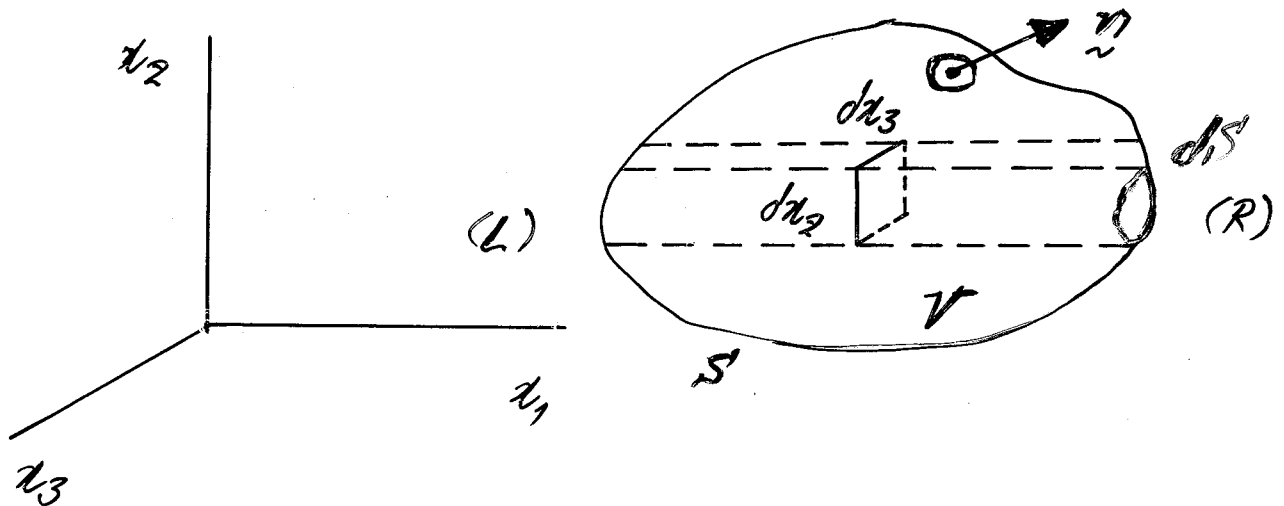
$$\left. \begin{array}{l} G_{1233} = - G_{2133} , \\ G_{1211} = - G_{2111} \end{array} \right\} \text{αντι-συμμετρία ως προς } i-j$$

Επομένως υφίστανται διαφορές ως προς συμμετρισμένους όρους.

Τανυστικά πεδία (tensor fields):

Διανυσματική πράξη	Τανυστική πράξη	Τάξη τανυστή
$\underline{v}$ (δίδυμο)	v_i	1
$\lambda = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (εσωτερικό γινόμενο)	$\lambda = u_i v_i$	0
$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$ (εξωτερικό γινόμενο)	$w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$	1
$\text{grad } \phi = \nabla \phi$ (αλίκη βαθμωτού πεδίου)	$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	1
$\text{grad } \underline{v} = \nabla \underline{v} = \hat{e}_i \frac{\partial (\hat{e}_j v_j)}{\partial x_i}$ (αλίκη διανυσματικού πεδίου)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	2
$\text{div } \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v}$ (απόληξη)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	0
$\text{curl } \underline{v} = \text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ (περίστροφή)	$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$	1
$\nabla^2 \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \underline{v}$ (Λαπλασιανή)	$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}$	1

Θεώρημα Green-Gauss (γενίκευση για τανυστικά πεδία):



Θα αποδειχθεί ότι
$$\iiint_V \frac{\partial A_{jkl\dots}}{\partial x_i} dV = \iint_S A_{jkl\dots} n_i dS$$

ή
$$\iiint_V (A_{jkl\dots})_{,i} dV = \iint_S A_{jkl\dots} n_i dS.$$

Απόδειξη:

Θεωρείται ότι ο όγκος V αποτελείται από στοιχειώδη τρίγωνα με πλευρές dx_2 και dx_3 . Για ένα τέτοιο τρίγωνο υπολογίζεται το αντίστοιχο ολοκλήρωμα επί του όγκου δV του τριγώνου

$$\iiint_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_{jkl\dots}) dx_2 dx_3.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x_1 έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_{jkl} \dots) dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint (A_{jkl} \dots dx_2 dx_3)_{(R)} - \\ &\quad - \iint (A_{jkl} \dots dx_2 dx_3)_{(L)} = \\ &= \iint (A_{jkl} \dots n_1 dS)_{(R)} + \iint (A_{jkl} \dots n_1 dS)_{(L)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας πλέον επί όλων των στοιχειωδών τριγώνων
θα έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_1} (A_{jkl} \dots) dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= \iint_{(R)} A_{jkl} \dots n_1 dS + \iint_{(L)} A_{jkl} \dots n_1 dS. \quad (2) \end{aligned}$$

Επειδή όμως το δεξιό μέλος της Εξ. (2) αγγίζει ολόκληρη
την αλειστή επιφάνεια δ του όγκου V μπορούμε να γράψουμε

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_1} (A_{jkl} \dots) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\delta} A_{jkl} \dots n_1 dS, \quad (3)$$

ενώ γενικεύοντας ως προς κάθε x_i ($i=1,2,3$) λαμβάνουμε
την προς απόδειξη σχέση.

- Είναι σαφές ότι οι νόμοι που δίνουν τα φυσικά φαινόμενα είναι ανεξάρτητοι από το είδος σύστημα συντεταγμένων το οποίο εμείς έχουμε εισαγάγει για διευκόλυνσή μας στους υπολογισμούς.
- Έτσι η μορφή κάθε εξίσωσης που σωστό έχει να περιγράφει ένα φυσικό φαινόμενο θα πρέπει να είναι ίδια σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή θα πρέπει να διαθέτει την ιδιότητα της "ανεξαρτησίας" σε σχέση με κάθε οποιοδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Πράγματι, όλες οι καρτεσιανές τανυστικές εξισώσεις διαθέτουν αυτή την ιδιότητα. Αυτή είναι και η βασική σημασία των τανυστών στην Μηχανική και, γενικότερα, στην Μαθηματική Φυσική.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Galileίου

$$x'_j = \alpha_{ji} x_i - b'_j t, \quad (1)$$

όπου α_{ji} τα συντελεστές μετασχηματισμού και b'_j ένα σταθερό διάνυσμα.

Το σύστημα x_i είναι αρνητικό σύστημα αναφοράς, ενώ, βάσει της (1), το σύστημα x'_j βρίσκεται σε ομοιόμορφη μετακίνηση σε σχέση με το αρνητικό.

Σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα, ο 2^{ος} νόμος του Newton γράφεται ως

$$\frac{d(mv_i)}{dt} - F_i = 0, \quad (2)$$

όπου $v_i = (dx_i/dt)$.

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \frac{dx'_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \\ &= \alpha_{ij} (v'_j + b'_j), \end{aligned} \quad (3)$$

$$F_i = \alpha_{ij} F'_j. \quad (4)$$

Η αντικατάσταση των (3) και (4) στην (2) δίνει

$$\alpha_{ij} \left(\frac{d(mv'_j)}{dt} - F'_j \right) = 0, \quad (5)$$

ενώ ο πολ/ομός της (5) με το α_{ik} , η άρση των δεικτών και η χρήση του αποτελέσματος $\delta_{jk} = \alpha_{ij} \alpha_{ik}$ δίνει τελικά

$$\frac{d(mv'_k)}{dt} - F'_k = 0. \quad (6)$$