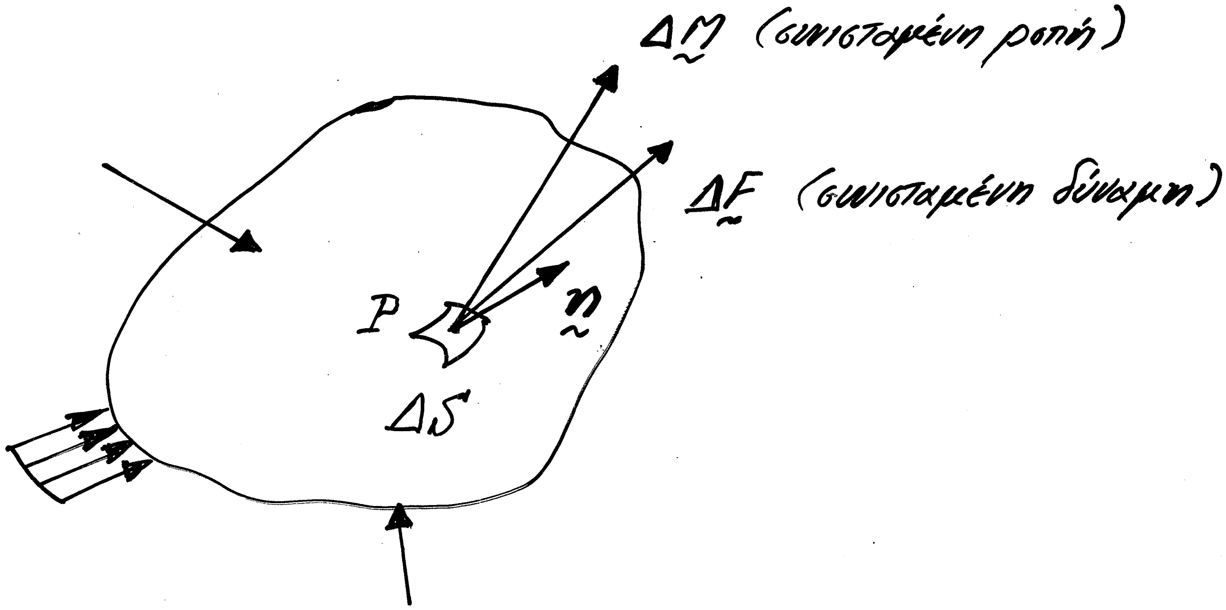
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΣΕΩΝ

Η έννοια του ελκυστή (traction):



- Θεωρείται παραμορφώσιμο στερεό σε ισορροπία υπό εξωτερική φόρτιση (αποκλείονται ταχέως μεταβαλλόμενες φορτίσεις και επομένως αμελούνται αδρανειακά φαινόμενα).

- Είδη φορτίων: (α) <u>επιφανειακά</u> (π.χ. λόγω επαφής του θεωρούμενου σώματος με άλλα σώματα),
  (β) <u>καθολικά</u> (body forces) (φορτία διανεμημένα στα εσωτερικά στοιχεία του σώματος – π.χ. λόγω βαρύτητας).

- Θεωρείται στοιχείο επιφανείας ΔS που βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του σώματος είτε στην επιφάνειά του. Ο προσανατολισμός του στοιχείου αυτού καθορίζεται από το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\underset{\sim}{n}$ (λαμβάνεται θετικό όταν διευθύνεται προς τα "έξω").

[Προσδιορισμός του $\underset{\sim}{n}$: Έστω $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ η αναπαράσταση μιας επιφάνειας S στον χώρο. Τότε $\underset{\sim}{n} = \dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$.

(Παράδειγμα: Η σφαίρα $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \alpha^2 = 0$ έχει ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\underset{\sim}{n}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1}{\alpha}\hat{e}_1 + \dfrac{x_2}{\alpha}\hat{e}_2 + \dfrac{x_3}{\alpha}\hat{e}_3$)].

- Η συνισταμένη δύναμη και ροπή που ασκούνται στο ΔS συμβολίζονται ως $\Delta \underset{\sim}{F}$ και $\Delta \underset{\sim}{M}$, αντιστοίχως.

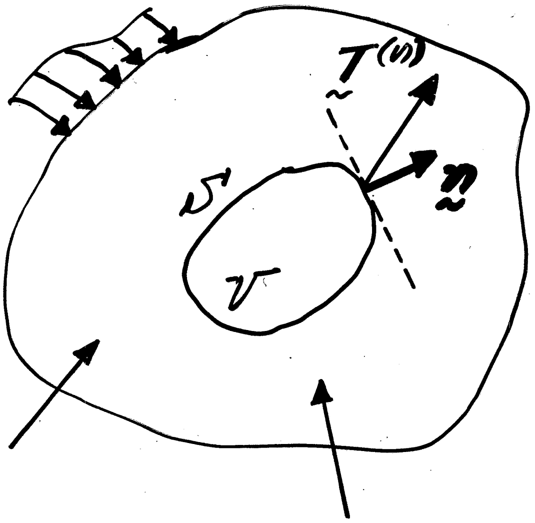
- Θεμελιώδης Υπόθεση της κλασσικής Μηχανικής του Συνεχούς:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \underset{\sim}{F}}{\Delta S} = \frac{d\underset{\sim}{F}}{dS} = \underset{\sim}{T}^{(n)}, \qquad (1\alpha)$$

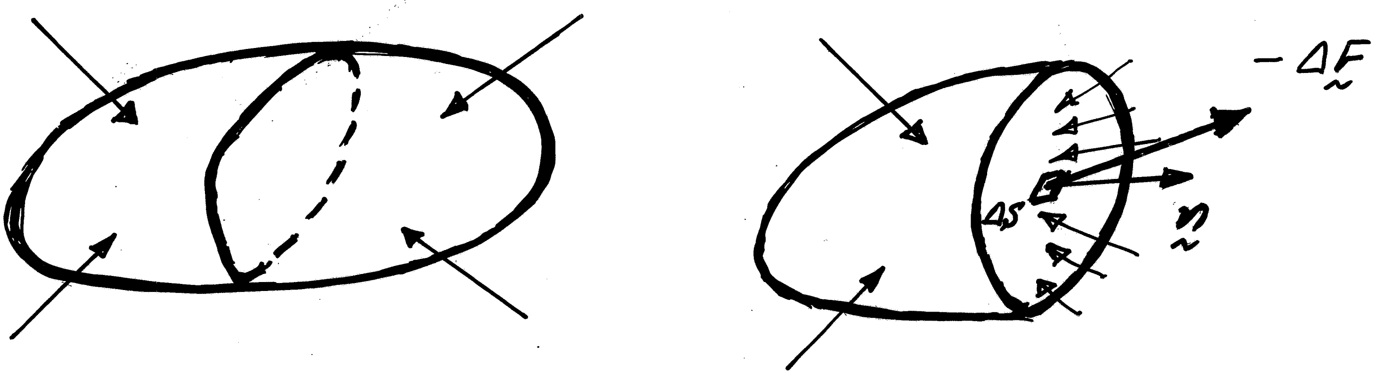
$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \underset{\sim}{M}}{\Delta S} = 0, \qquad (1\beta)$$

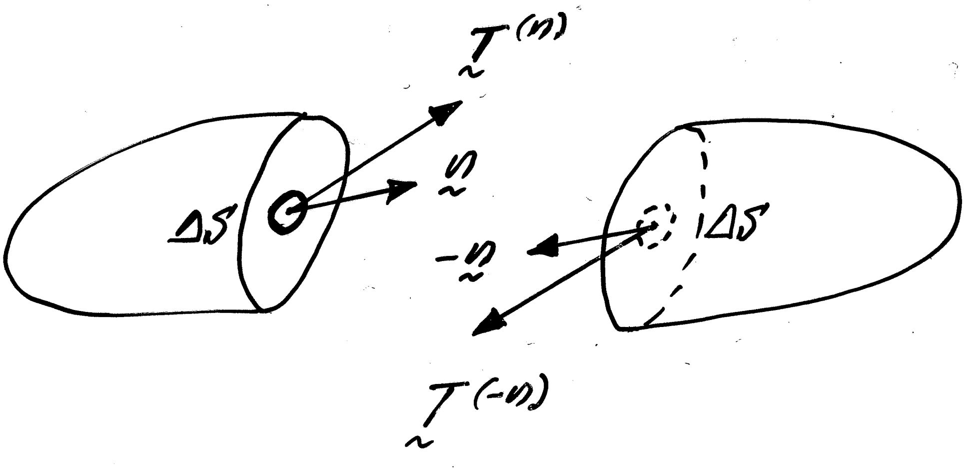
όπου το διάνυσμα $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ καλείται ελκυστής και παριστά την δύναμη ανά μονάδα επιφανείας στην θέση P.

- <u>Αρχή των Τάσεων (stress principle) των Euler και Cauchy:</u>



κλειστή επιφάνεια S στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου





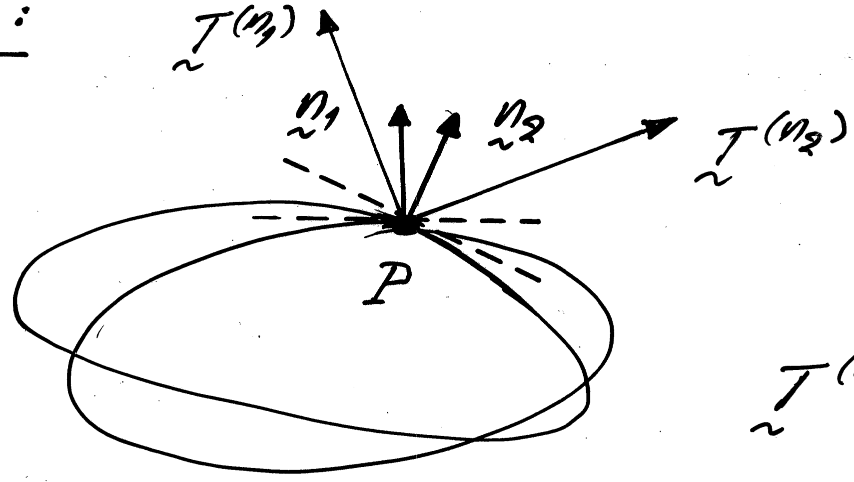
$$-\underset{\sim}{T}^{(n)} = \underset{\sim}{T}^{(-n)}$$

(3ος νόμος Newton)

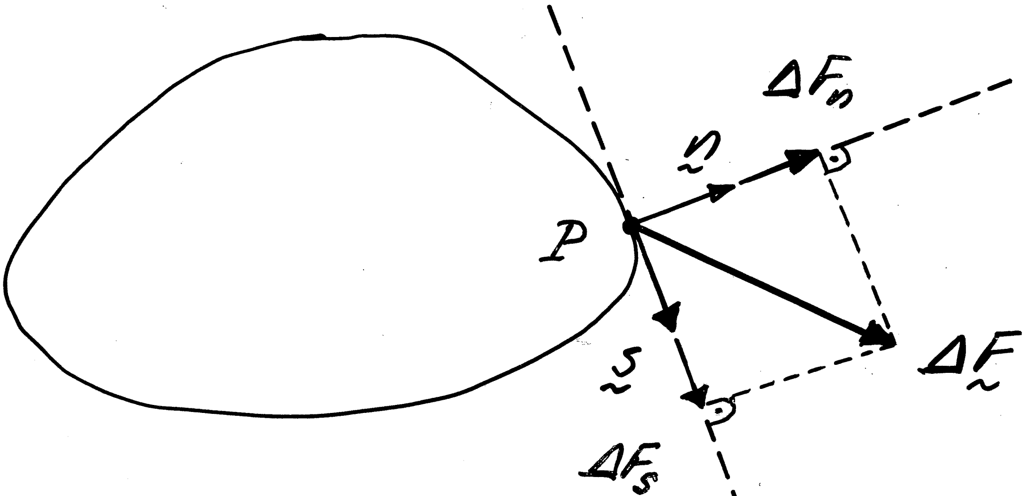
(ύπαρξη "εσωτερικών" δυνάμεων)

Αρχή τάσεων Euler-Cauchy: "Για κάθε ιδεατή κλειστή επιφάνεια S στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου ορίζεται ένα διανυσματικό πεδίο ελκυστών, η δράση του οποίου στο περικλειόμενο από την S τμήμα του σώματος είναι ισοπολλική με την δράση στο εξωτερικό ως προς την S τμήμα του σώματος".

- Ο ελκυστής $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό $\underset{\sim}{n}$ και δεν έχει, εν γένει, την ίδια διεύθυνση με την δύναμη $\Delta \underset{\sim}{F}$:



$$\underset{\sim}{T}^{(n_1)} \neq \underset{\sim}{T}^{(n_2)}$$



ορισμός ελκυστή: $\underset{\sim}{T}^{(n)} = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta \underset{\sim}{F}}{\Delta S}$, (α)

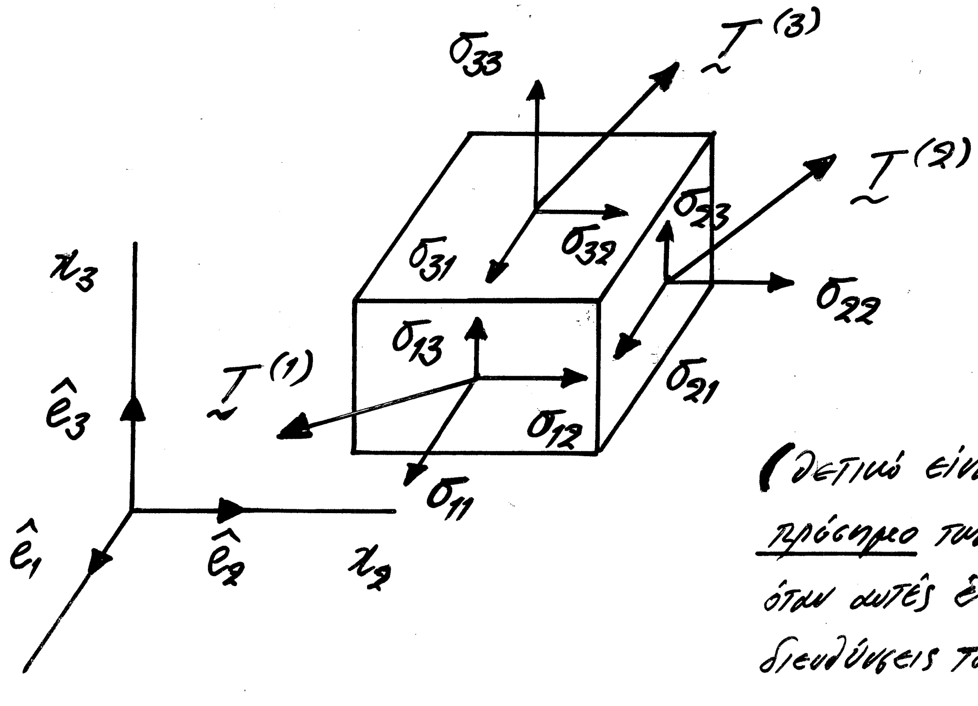
παρατήρηση: οι προβολές ΔF_n και ΔF_s είναι συναρτήσεις του προσανατολισμού της επιφάνειας $\underset{\sim}{n}$, δηλ. $\Delta F_n = \Delta F_n(n)$ και $\Delta F_s = \Delta F_s(n)$,

κανόνας παρ/μου: $\underset{\sim}{T}^{(n)} = \underset{\sim}{n} \dfrac{\Delta F_n(n)}{\Delta S} + \underset{\sim}{s} \dfrac{\Delta F_s(n)}{\Delta S}$

με $\Delta S \to 0$, (β)

συμπέρασμα: η Εξ. (β) δείχνει ότι εφόσον ο $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό $\underset{\sim}{n}$, ο $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ δεν έχει, εν γένει, την ίδια διεύθυνση με την δύναμη $\Delta \underset{\sim}{F}$.

<u>Ο Τανυστής Τάσης:</u>



(θετικό είναι το πρόσημο των τάσεων όταν αυτές έχουν τις διευθύνσεις του σχήματος)

- Τα σ_{ij} παριστούν τις προβολές του διανύσματος $\underset{\sim}{T}^{(i)}$ επάνω στους άξονες x_j :

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{T}^{(1)} &= \sigma_{11}\,\hat{e}_1 + \sigma_{12}\,\hat{e}_2 + \sigma_{13}\,\hat{e}_3 \,, \\ \underset{\sim}{T}^{(2)} &= \sigma_{21}\,\hat{e}_1 + \sigma_{22}\,\hat{e}_2 + \sigma_{23}\,\hat{e}_3 \,, \\ \underset{\sim}{T}^{(3)} &= \sigma_{31}\,\hat{e}_1 + \sigma_{32}\,\hat{e}_2 + \sigma_{33}\,\hat{e}_3 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

ή

$$\underset{\sim}{T}^{(i)} = \sigma_{ij}\,\hat{e}_j \quad ή \quad T_j^{(i)} = \sigma_{ij} \,, \quad (i,j=1,2,3). \quad (3)$$

Οι εννέα ποσότητες σ_{ij} καλούνται <u>τανυστής τάσης</u> (stress tensor).

Θα δειχθεί συντόμως ότι $\underline{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$ (συμμετρία τανυστή).

Τάσεις $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$: <u>ορθές</u>,

Τάσεις $(\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32})$: <u>διατμητικές</u>.

<u>Απόδειξη ότι η εξάρτηση του ελκυστή από τον προσανατολισμό είναι γραμμική:</u>

Θα αποδειχθεί ότι στο <u>τυχόν</u> σημείο P με συντεταγμένες $\underset{\sim}{x}$ ισχύει η εξής σχέση

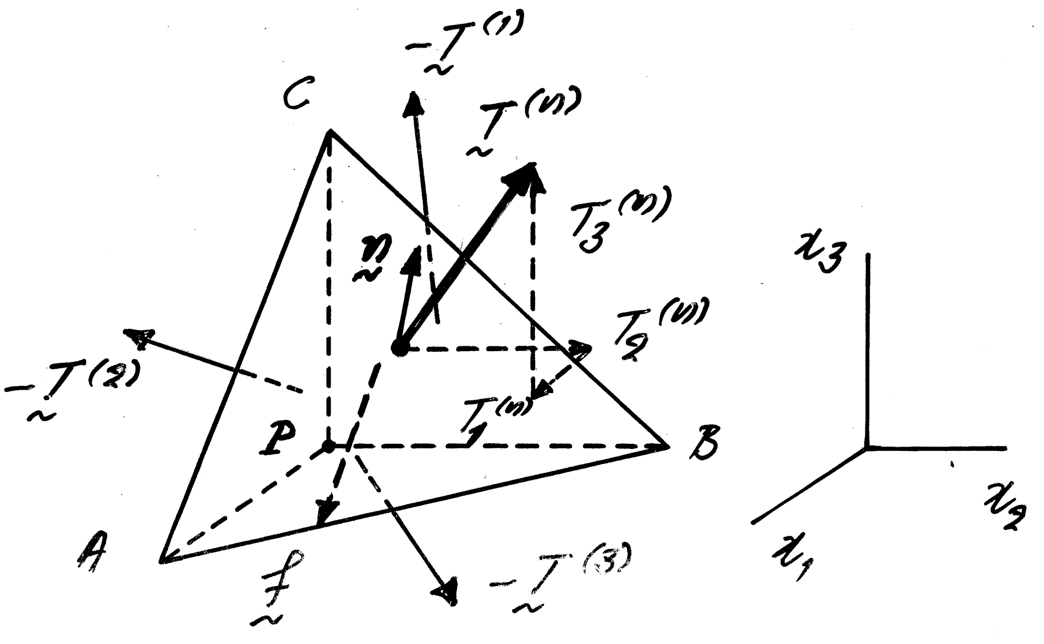
$$T_i^{(n)}(\underset{\sim}{x}) \equiv T_i(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{n}) = \sigma_{ji}(\underset{\sim}{x})\, n_j \ ,$$

εξάρτηση από το $\underset{\sim}{n}$

διαχωρισμός

όπου $\underset{\sim}{n}$ ο <u>τυχαίος προσανατολισμός</u> στοιχειώδους επιφάνειας που διέρχεται από το σημείο P του σώματος.

- <u>Τετράεδρο του Cauchy:</u>



- Θα αποδειχθεί ότι η τασική κατάσταση σε ένα σημείο P του σώματος περιγράφεται πλήρως με τον καθορισμό των συνιστωσών σ_{ij}. Με άλλα λόγια, θα αποδειχθεί ότι ο τανυστής σ_{ij} είναι η χαρακτηριστική μεταβλητή σε κάθε σημείο του σώματος, και ότι η προβολή του σε τυχαία διεύθυνση $\underset{\sim}{n}$ δίνει τον ελκυστή $\underset{\sim}{T}^{(n)}$.

- Ο συσχετισμός μεταξύ σ_{ij} και $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ γίνεται λαμβάνοντας ισορροπία όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο τετράεδρο:

$$\underset{\sim}{T}^{(n)}\Delta S - \underset{\sim}{T}^{(1)} n_1 \Delta S - \underset{\sim}{T}^{(2)} n_2 \Delta S - \underset{\sim}{T}^{(3)} n_3 \Delta S + \\ + \underset{\sim}{f}\left(\frac{1}{3} h \Delta S\right) = 0 , \qquad (4)$$

όπου $\Delta S_i = (\underset{\sim}{n}\cdot\hat{e}_i)\,\Delta S = \cos(\underset{\sim}{n},\hat{e}_i)\,\Delta S \equiv n_i\,\Delta S$ είναι το εμβαδόν των εδρών PBC, PAC και PAB, ΔS το εμβαδόν της έδρας ABC, n_j οι προβολές του $\underset{\sim}{n}$ στους άξονες x_j, και $(1/3)h\,\Delta S$ ο όγκος του τετραέδρου.

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Εξ. (4) με } h \to 0 , \\ \underset{\sim}{T}^{(n)} = T_i^{(n)}\,\hat{e}_i , \\ \underset{\sim}{T}^{(i)} = \sigma_{ij}\,\hat{e}_j . \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{T_i^{(n)} = \sigma_{ji}\, n_j .} \qquad (5)$$

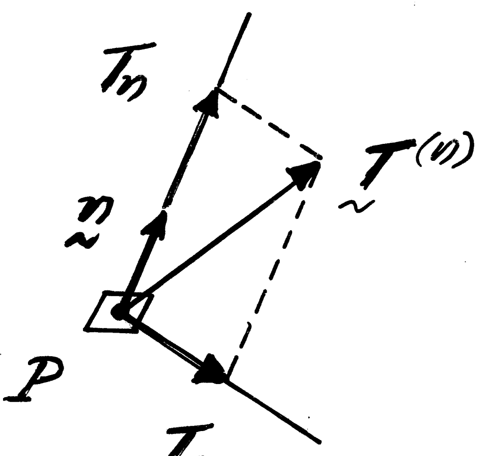
- Σε <u>μητρωϊκή μορφή</u> η Εξ. (5) γράφεται ως

$$\begin{Bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\left[T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, T_3^{(n)} \right] = \left[n_1, n_2, n_3 \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

- Ιδιαίτερα χρήσιμη για την <u>διατύπωση των συνοριακών συνθηκών</u> ενός προβλήματος είναι η <u>ανάλυση</u> του ελκυστή $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ σε δύο συνιστώσες – την μια <u>κάθετη</u> και την άλλη <u>εφαπτομενική</u> στην στοιχειώδη επιφάνεια στην οποία δρά ο $\underset{\sim}{T}^{(n)}$:



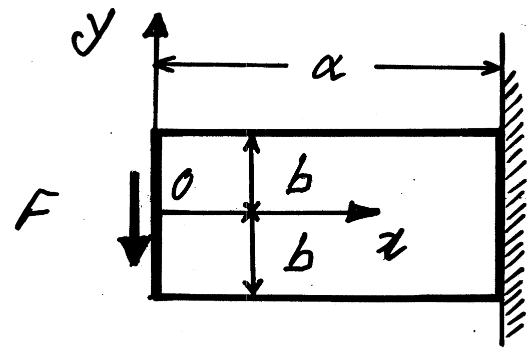
$$T_n = \underset{\sim}{T}^{(n)} \cdot \underset{\sim}{n} = T_i^{(n)} n_i \,, \qquad (6)$$

$$\text{Εξ. (5), (6)} \rightsquigarrow T_n = \sigma_{ji}\, n_j\, n_i \,. \qquad (7)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$T_s^2 = T_i^{(n)} T_i^{(n)} - T_n^2 \,. \qquad (8)$$

Παράδειγμα διατύπωσης συνοριακών συνθηκών τάσης (ισχυρές και ασθενείς συνοριακές συνθήκες):



Το παραμορφώσιμο στερεό καταλαμβάνει την περιοχή $0 < x < \alpha$, $-b < y < b$.

Συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma_{yx} = 0 \quad \text{για} \quad y = \pm b,$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm b,$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{»} \quad x = 0,$$

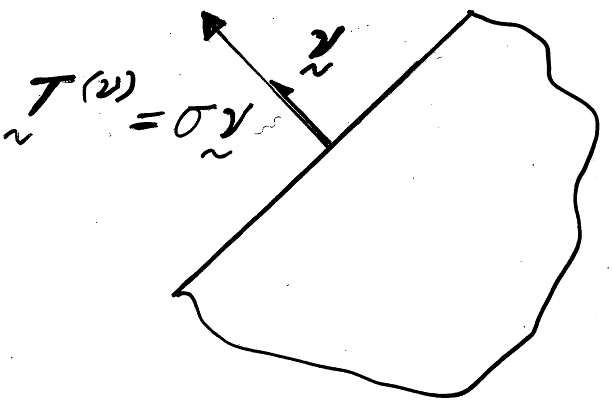
$$\int_{-b}^{b} \sigma_{xy}\, dy = F \quad \text{για} \quad x = 0,$$

$$\int_{-b}^{b} \sigma_{xx}\, dy = 0 \quad \text{»} \quad x = \alpha,$$

$$\int_{-b}^{b} \sigma_{xy}\, dy = F \quad \text{»} \quad x = \alpha,$$

$$\int_{-b}^{b} \sigma_{xx}\, y\, dy = F \cdot \alpha \quad \text{»} \quad x = \alpha.$$

<u>Κύριες κατευθύνσεις και κύριες τάσεις :</u>



Θεωρούνται προσανατολισμοί (κατευθύνσεις) για τους οποίους ο ελκυστής $\underset{\sim}{T}^{(\nu)}$ γίνεται <u>παράλληλος</u> προς το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{\nu}$. Επομένως, αναζητούνται εκείνες οι κατευθύνσεις για τις οποίες <u>οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται</u> και άρα υφίστανται μόνον ορθές τάσεις.

Εστω $\underset{\sim}{\nu}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ η <u>ζητούμενη</u> κύρια κατεύθυνση. Τότε

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{T}^{(\nu)} = \sigma \underset{\sim}{\nu} \quad \text{ή} \quad T_i^{(\nu)} = \sigma \nu_i \,, \\ &T_i^{(\nu)} = \sigma_{ji} \nu_j \quad (\text{γενικώς}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{ji} \nu_j = \sigma \nu_i \,. \qquad (1)$$

$$\text{Εξ. } (1), \quad \nu_j = \delta_{ji} \nu_i \,, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \rightsquigarrow$$

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) \nu_j = 0 \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3) \,, \qquad (2)$$

που αποτελούν <u>σύστημα τριών εξισώσεων</u> γραμμικών και ομογενών ως προς τους <u>αγνώστους</u> $\underline{(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}$.

Η λύση του συστήματος αποτελεί <u>πρόβλημα ιδιοτιμών</u>.

$L u - \lambda u = 0$.

Π.χ. σε <u>μητρωϊκή</u> μορφή

$[L]\{x\} = \lambda \{x\}$ ή

$([L] - \lambda [I])\{x\} = \{0\}$ μη-τετριμμένη λύση όταν και μόνο όταν $\rightarrow$

$|[L] - \lambda [I]| = 0 \rightarrow$ (πολυώνυμο τάξεως n ως προς το λ) $= 0 \rightarrow$

n τον αριθμό ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ιδιοτιμές του μητρώου L).

λ_j αντιστοιχεί $\{x\}_j$

(ιδιοτιμή) (ιδιοδιάνυσμα)

με την ιδιότητα $([L] - \lambda_j [I])\{x\}_j = \{0\}$,

η τελευταία είναι <u>ομογενής</u> εξίσωση.

<u>Μόνον οι λόγοι</u> των $\{x\}_j$ μπορούν να προσδιορισθούν <u>μοναδικά</u>.

Εφόσον $|\underset{\sim}{\nu}| = 1$ (ή $\nu_j \nu_j = 1$ ή $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$),
<u>αποκλείεται</u> η <u>τετριμμένη</u> λύση $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ και άρα θα υπάρχει λύση μόνον όταν

$$|\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}| = 0$$

ή

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3)$$

Η Εξ. (3) καταλήγει στην <u>τριτοβάθμια</u> αλγεβρική εξίσωση (γνωστή ως <u>χαρακτηριστική</u> εξίσωση)

$$\sigma^3 - I \sigma^2 + II \sigma - III = 0 , \qquad (4)$$

όπου οι συντελεστές

$$I = \sigma_{ii} = tr(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} , \quad (\text{ίχνος}) \qquad (5\alpha)$$

$$II = (1/2)(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = (1/2)(I^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ji}), \qquad (5\beta)$$

$$III = |\sigma_{ij}| , \qquad (5\gamma)$$

- Οι συντελεστές I, II και III είναι οι <u>αναλλοίωτες</u> (invariants) του τανυστή σ_{ij}. Είναι ποσότητες <u>ανεξάρτητες</u> από το σύστημα συντεταγμένων.

- Στην περίπτωση <u>συμμετρικών τανυστών</u> με συνιστώσες <u>πραγματικούς</u> αριθμούς (όπως ο τανυστής τάσεως σ_{ij}) αποδεικνύεται ότι οι τρεις <u>λύσεις</u> (ρίζες) $\sigma^{(I)}$, $\sigma^{(II)}$ και $\sigma^{(III)}$ της Εξ. (4) είναι <u>πραγματικοί</u> αριθμοί.

- Εάν οι ρίζες (κύριες τάσεις) είναι <u>διάφορες</u> μεταξύ τους, οι κύριες κατευθύνσεις είναι <u>ορθογώνιες</u> μεταξύ τους.

- Εάν <u>δύο</u> από τις κύριες τάσεις είναι <u>ίσες</u> μεταξύ τους, η κατεύθυνση της άλλης (τρίτης) τάσεως είναι <u>κάθετη</u> στο επίπεδο που ορίζουν οι δύο πρώτες. Στο επίπεδο αυτό <u>όλες</u> οι κατευθύνσεις είναι πλέον κύριες κατευθύνσεις.

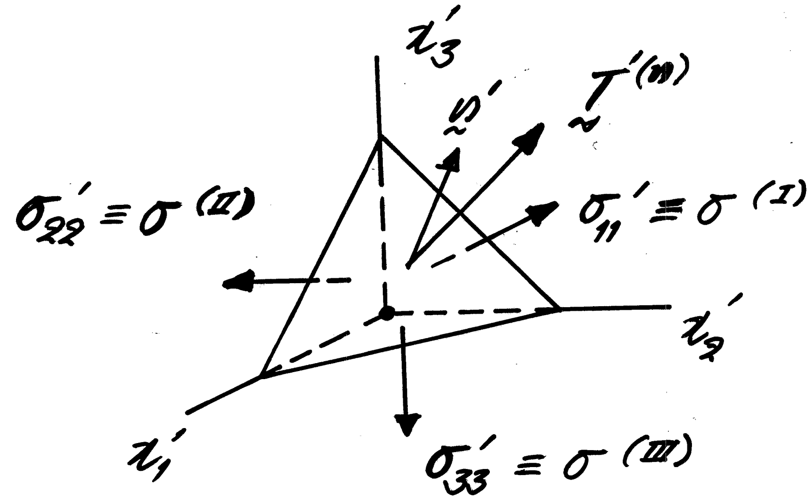
- Η Εξ. (4) μπορεί να τεθεί υπό την μορφή

$$\left(\sigma-\sigma^{(I)}\right)\left(\sigma-\sigma^{(II)}\right)\left(\sigma-\sigma^{(III)}\right)=0,$$

με τους συντελεστές (αναλλοιώτους) να γίνονται

$$I=\sigma^{(I)}+\sigma^{(II)}+\sigma^{(III)},\quad II=\sigma^{(I)}\sigma^{(II)}+\sigma^{(II)}\sigma^{(III)}+\sigma^{(III)}\sigma^{(I)},\quad III=\sigma^{(I)}\sigma^{(II)}\sigma^{(III)}. \tag{6}$$

Η μέγιστη (σε απόλυτη τιμή) από τις τρείς κύριες τάσεις είναι η μέγιστη τάση στο δεδομένο σημείο ως προς οποιοδήποτε σύστημα αξόνων:



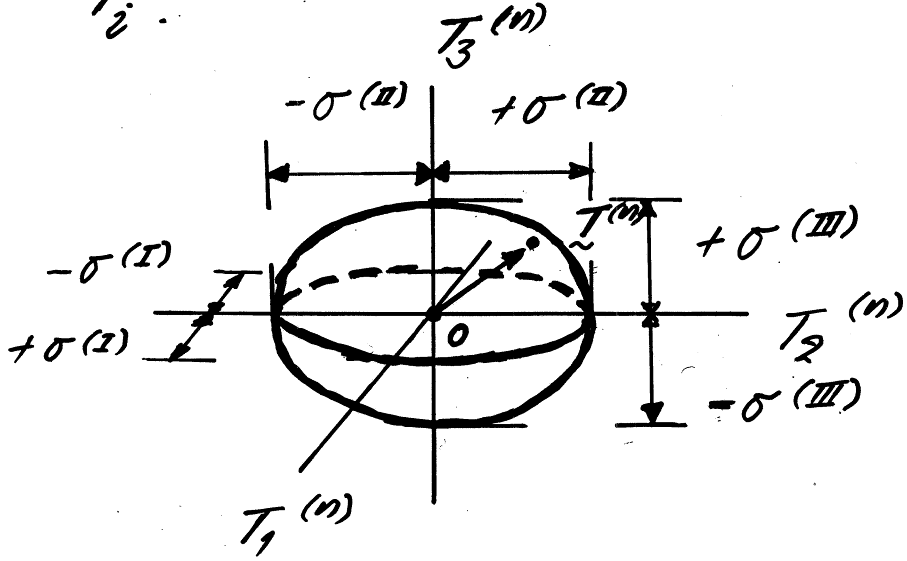
κύριοι άξονες και κύριες τάσεις

$$
\begin{aligned}
T_1'^{(n)} &= n_1'\sigma_{11}' + \cancel{n_2'\sigma_{21}'}^{\,0} + \cancel{n_3'\sigma_{31}'}^{\,0} = n_1'\sigma^{(I)}, \\
T_2'^{(n)} &= \cancel{n_1'\sigma_{12}'}^{\,0} + n_2'\sigma_{22}' + \cancel{n_3'\sigma_{32}'}^{\,0} = n_2'\sigma^{(II)}, \qquad (1)\\
T_3'^{(n)} &= \cancel{n_1'\sigma_{13}'}^{\,0} + \cancel{n_2'\sigma_{23}'}^{\,0} + n_3'\sigma_{33}' = n_3'\sigma^{(III)}.
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} \sigma^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(II)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(III)} \end{pmatrix}
$$
στο κύριο σύστημα αξόνων x_i'.

$$
\left.\begin{aligned} &\text{Εξ. (1)}, \\ &(n_1')^2 + (n_2')^2 + (n_3')^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{T_1'^{(n)}}{\sigma^{(I)}}\right)^2 + \left(\frac{T_2'^{(n)}}{\sigma^{(II)}}\right)^2 + \left(\frac{T_3'^{(n)}}{\sigma^{(III)}}\right)^2 = 1, \qquad (2)
$$

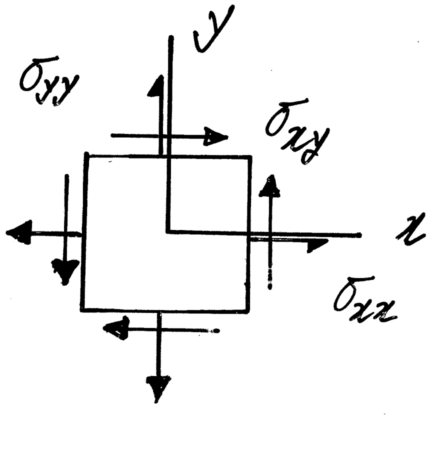
η οποία αποτελεί την <u>εξίσωση ελλειψοειδούς</u> με συντεταγμένες T_i.



ελλειψοειδές του Lamé

<u>Διάνυσμα</u> που έχει αρχή το Ο και πέρας κάποιο σημείο της επιφανείας του ελλειψοειδούς έχει συνιστώσες $T_i^{(n)}$, και επομένως <u>παριστά έλκυση</u> υπό ορισμένο προσανατολισμό στοιχειώδους επιφανείας. Άρα, η μέγιστη και η ελάχιστη κύρια τάση, αντιστοίχως, είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τάση για <u>κάθε</u> προσανατολισμό.

<u>Κύριες τάσεις σε δύο διαστάσεις (διαξονική περίπτωση):</u>



$$\sigma^{(I),(II)} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm$$

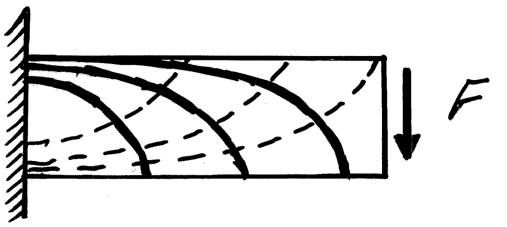
$$\pm \left[\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2},$$

$$\tan(2\theta_p) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$ η γωνία της κύριας διεύθυνσης ως προς τον άξονα Ox,

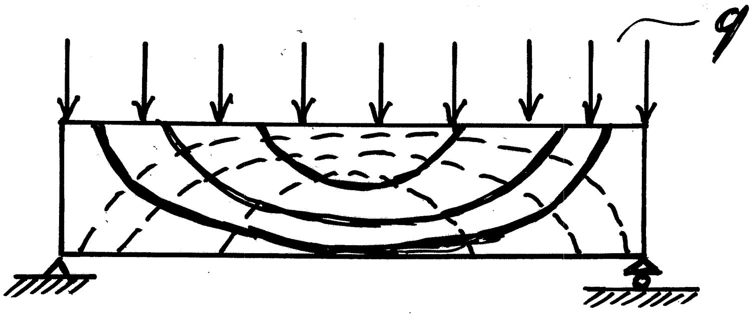
$$\sigma^{max}_{διατμ.} = \frac{\sigma^{(I)} - \sigma^{(II)}}{2}$$ η μέγιστη διατμητική τάση,

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$ η κατεύθυνση της $\sigma^{max}_{διατμ.}$.

- Παραδείγματα τροχιών κυρίων τάσεων:
(δίνουν την κατεύθυνση των κυρίων τάσεων)



(πρόβολος)



(αμφιέρειστη ευθύγραμμη δοκός)

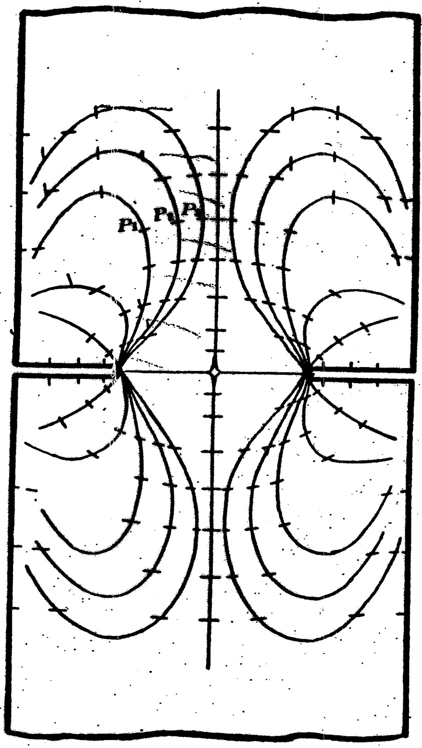
———— : εφελκυστική κύρια τάση,

– – – – : θλιπτική κύρια τάση.

form 0/0 and thus indeterminate, an isotropic point is a point through which *all isoclinics* pass. Figs. 2·281 (*a*) and (*b*) illustrate the relation of such isotropic points to the lines of principal stress and the isochromatic lines respectively, in an actual case.

Fig. 2·282 shows the isoclinic lines for the case of a tension member with two symmetrically disposed slits at right angles to the line of pull. From these the lines of principal mean stress can be constructed graphically in the following manner.

Take any point P_1 on an isoclinic of which the parameter is α_1 and through P_1 draw a line inclined at α_1 to the axis of x. This is an element of one of the two lines of principal mean stress through P, the other being inclined at $\alpha_1 + \pi/2$ to the axis of x.



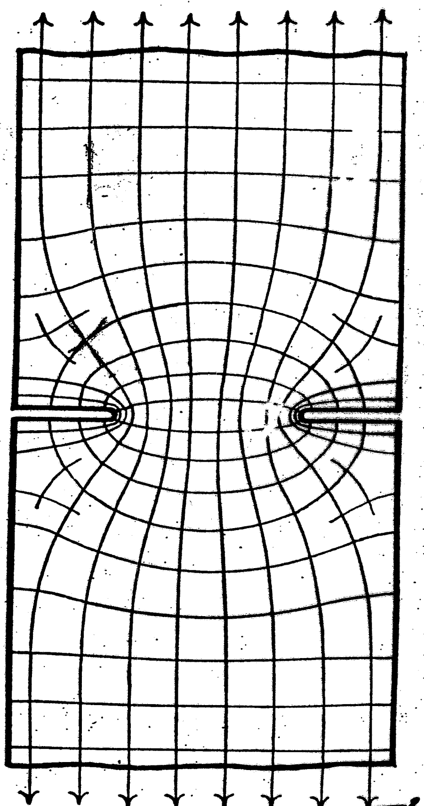


Fig. 2·282. Fig. 2·283.
Isoclinic lines and lines of principal stress in a slit tension member.

Let this line meet a neighbouring isoclinic of parameter α_2 at P_2 and through P_2 draw a line inclined at α_2 to the axis of x, meeting the next isoclinic of the series (of parameter α_3) at P_3.

If the isoclinics were infinitely close to one another, this construction lower faces with the frame, there is never much stress and at the upper edges practically none, so that current practice in diminishing the thickness of the nut appears to be justified.

An interesting question which presents itself is the action of a nut when locked in place by another on the same bolt. The lock-nut is then usually of much less depth than the main nut, and its correct position, according to most textbooks, is below this latter, and its action is to throw most of the load on to the main nut, in addition to locking it in place.

Usually, however, owing to the difficulty of properly screwing up a thin nut when below, it is placed on top.

According to the stress picture presented by plane sections, whichever plan is adopted the greater stress intensity comes on the lower nut, whether it be the thick or thin one, and the characteristic features of the distribution found in an ordinary nut are more or less preserved, that is the stress intensities increase upwards and the outer parts of the nut are only slightly stressed.

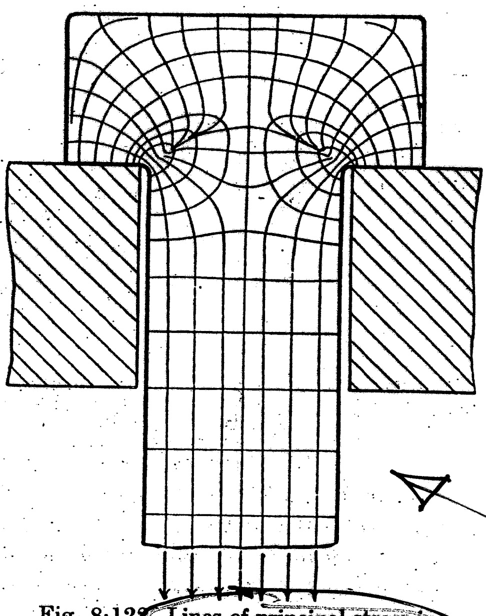


Fig. 8·122. Lines of principal stress in the head of a bolt.

Many attempts have been made to lock single nuts in position by other means, for there is always some play between the threads, however small, and there is a tendency for nuts to slack back in machines when running at a high speed and subjected to vibration.

To prevent this tendency there are many well-known devices, such as extra pieces in the form of stop plates, split pins, elastic washers and the like.

An interesting form dispensing with a second member is a nut with a V-shaped groove formed in its interior and provided with a curved seating below. This form throws most of the load on to the bottom threads and causes a considerable compression stress at the inner rounded angle of the groove. Above this groove the stress at and near the threads is low but of increasing magnitude, in the upward direction, while the free threads of the bolt are practically unstressed.

The stress in a bolt at and near the head has been examined as a plane section in a similar manner, and although such a method of examination suffers from the disadvantages described above, it affords some measure

Προσδιορισμός των κατευθύνσεων $\underset{\sim}{\nu}^{(I)}, \underset{\sim}{\nu}^{(II)}, \underset{\sim}{\nu}^{(III)}$ (ιδιοδιανυσμάτων) των κυρίων επιπέδων:

Αφού προσδιοριστούν οι κύριες τάσεις (ιδιοτιμές), τα ιδιοδιανύσματα προσδιορίζονται με χρήση των εξισώσεων $(\sigma_{ji} - \sigma\,\delta_{ji})\,\nu_j = 0$ και της συνθήκης $\nu_i \nu_i = 1$.

Τελικά θα πρέπει να ισχύουν:

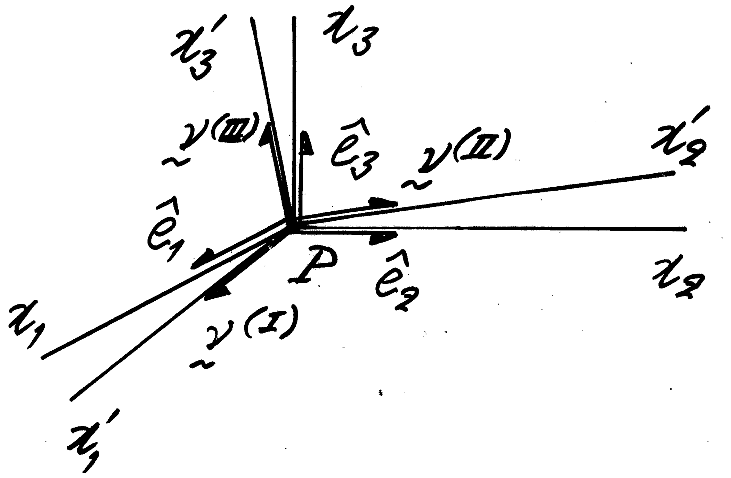
$$\underset{\sim}{\nu}^{(I)} \cdot \underset{\sim}{\nu}^{(II)} = \underset{\sim}{\nu}^{(II)} \cdot \underset{\sim}{\nu}^{(III)} = \underset{\sim}{\nu}^{(III)} \cdot \underset{\sim}{\nu}^{(I)} = 0 \quad \text{και}$$

$$\underset{\sim}{\nu}^{(I)} \times \underset{\sim}{\nu}^{(II)} = \underset{\sim}{\nu}^{(III)}.$$

Παράδειγμα:

Δίνεται ο συμμετρικός τανυστής σ_{ij} στο σημείο P ως

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



στο σύστημα $x_1 x_2 x_3$.
Να προσδιορισθούν οι κύριες κατευθύνσεις $x_1' x_2' x_3'$ και οι συνιστώσες του τανυστή στο σύστημα αυτό (δηλ. κύριες τάσεις).

Από την απαίτηση $|\sigma_{ji} - \sigma\delta_{ji}| = 0$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} (3-\sigma) & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\sigma-4)(\sigma-1)(\sigma+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma^{(I)} = 4}, \ \underline{\sigma^{(II)} = 1}, \ \underline{\sigma^{(III)} = -2}.$$

Ακολούθως, λαμβάνουμε ως x_1' την διεύθυνση $\underset{\sim}{\nu}^{(I)}$. Τότε

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^{(I)} \\ \nu_2^{(I)} \\ \nu_3^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

η οποία σε συνδυασμό με την $(\nu_1^{(I)})^2 + (\nu_2^{(I)})^2 + (\nu_3^{(I)})^2 = 1$ δίνει την λύση $\underline{\nu_1^{(I)} = 2/\sqrt{6}}$, $\underline{\nu_2^{(I)} = 1/\sqrt{6}}$, $\underline{\nu_3^{(I)} = 1/\sqrt{6}}$.

Ομοίως, προσδιορίζουμε $\underline{\nu_1^{(II)} = -1/\sqrt{3}}$, $\underline{\nu_2^{(II)} = 1/\sqrt{3}}$, $\underline{\nu_3^{(II)} = 1/\sqrt{3}}$ και $\underline{\nu_1^{(III)} = 0}$, $\underline{\nu_2^{(III)} = -1/\sqrt{2}}$, $\underline{\nu_3^{(III)} = 1/\sqrt{2}}$.

Τέλος, μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ισχύει η σχέση

$$\underset{\sim}{\nu}^{(I)} \times \underset{\sim}{\nu}^{(II)} = \underset{\sim}{\nu}^{(III)}$$

(απαίτηση για <u>δεξιόστροφο</u> κύριο σύστημα)

ή ότι

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1^{(III)} &= \nu_2^{(I)}\nu_3^{(II)} - \nu_3^{(I)}\nu_2^{(II)}, \\
\nu_2^{(III)} &= \nu_3^{(I)}\nu_1^{(II)} - \nu_1^{(I)}\nu_3^{(II)}, \\
\nu_3^{(III)} &= \nu_1^{(I)}\nu_2^{(II)} - \nu_2^{(I)}\nu_1^{(II)}.
\end{aligned}\right\}$$