

1^η ΣΕΙΡΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\bar{x}$ στο διάστημα $[1, 2]$. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης (x_0, x_1, x_2). Πόσες τουλάχιστο επαναλήψεις απαιτούνται ώστε $|x_k - \bar{x}| \leq 10^{-4}$;
2. Η συνάρτηση $f(x) = 1/(3x - 1)$ έχει αντίθετα πρόσημα στα σημεία 0 και 1. Ποιο σημείο εντοπίζει η μέθοδος της διχοτόμησης αν εφαρμοστεί στο διάστημα $[0, 1]$; Είναι αυτό το σημείο ρίζα της $f(x)$;
3. Ναδειχθεί γεωμετρικά, θεωρώντας το λόγο μεταβολής της g και χρησιμοποιώντας μετά το Θεώρημα Bolzano, ότι αν η g είναι συστολική σε ολόκληρο το $\square$ με σταθερά $a < 1$, τότε η εξίσωση $x = g(x)$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα, οπότε ισχύουν και τα υπόλοιπα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2, Κεφ. 4, ΕΑΑ.
4. Η εξίσωση $5x^3 - 20x + 3 = 0$ έχει μια και μοναδική ρίζα $\bar{x}$ στο $[0, 1]$. Ναδειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k) := (5x_k^3 + 3)/20$ συγκλίνει στη ρίζα αυτή για κάθε x_0 στο $[0, 1]$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις με $x_0 = 0.2$ και να δοθεί μια καλή εκτίμηση του σφάλματος $|x_3 - \bar{x}|$. Επίσης, θέτοντας $e_k = x_k - \bar{x}$, ναδειχθεί ότι $\lim(e_{k+1}/e_k) = 3\bar{x}^2/4$ όταν $k \rightarrow \infty$.
5. Η εξίσωση $e^{-x} - \sin x = 0$ έχει μια ρίζα $\bar{x}$ στο $I := [0.5, 0.7]$. Ναδειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος με $g(x) = x + e^{-x} - \sin x$ συγκλίνει στη ρίζα αυτή για κάθε x_0 στο I . Να γίνουν τρεις επαναλήψεις με $x_0 = 0.6$ και να δοθεί μια καλή εκτίμηση του σφάλματος στην τρίτη επανάληψη.
6. Ναδειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \cos x_k$, συγκλίνει
α) για κάθε $x_0 \in [-1, 1]$, β) για κάθε $x_0 \in \square$.
7. Η εξίσωση $e^x - 4x^2 = 0$ (1) έχει μια ρίζα στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος με $g(x) = 0.5e^{0.5x}$ συγκλίνει στη ρίζα αυτή για κάθε $x_0 \in [0, 1]$. Η εξίσωση (1) έχει επίσης μια ρίζα στο $[4, 5]$. Είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της παραπάνω μεθόδου για την εύρεση της ρίζας αυτής;
8. Ναδειχθεί ότι η ακολουθία (x_k) , με $x_k = 1 + 2^{-k}$, συγκλίνει στο 1 γραμμικά και ότι η ακολουθία (x_k) με $x_k = 1 + 2^{-2^k}$ συγκλίνει στο 1 τετραγωνικά.
9. Έστω $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, με $g \in C^1[a, b]$, $\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$, και $\bar{x}$ μια λύση της εξίσωσης $x = g(x)$ στο $[a, b]$. Έστω επίσης η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, με $x_0 \in [a, b]$. Ναδειχθεί ότι, αν $g'(x) > 0$ στο $[a, b]$, τότε η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο $\bar{x}$ μονότονα, ενώ αν $g'(x) < 0$ στο $[a, b]$, τότε $x_k \rightarrow \bar{x}$ και το $\bar{x}$ βρίσκεται πάντα μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων.
10. Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι $f \in C^1$ και ότι η εξίσωση αυτή έχει μια ρίζα $\bar{x}$. Γράφοντας την εξίσωση αυτή στην ισοδύναμη μορφή
$$x = g(x) = x - [f(x)/c],$$
να βρεθούν οι τιμές του c για τις οποίες η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, συγκλίνει για x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$. Για ποια θεωρητική τιμή του c η σύγκλιση είναι υπεργραμμική;

11. Ναδειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, με $g(x) = \sin x$, συγκλίνει στην μοναδική ρίζα 0 της εξίσωσης $x = g(x)$, για κάθε αρχικό $x_0 \in [-1, 1]$ (και άρα για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$, γιατί ;), παρόλο που δεν ισχύει η συνθήκη $|g'(\bar{x})| < 1$ (αφού έχουμε εδώ $|g'(0)| = 1$). Αντίθετα, ναδειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος, με $g(x) = x + x^3$, δεν συγκλίνει για κανένα αρχικό $x_0 \neq 0$ στη μοναδική ρίζα 0 της εξίσωσης $x = g(x)$, και ότι πάλι δεν ισχύει η συνθήκη $|g'(\bar{x})| < 1$.

12. Ναδειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, με $g(x) = e^x - 1$, συγκλίνει στην μοναδική ρίζα 0 της εξίσωσης $x = g(x)$, για κάθε αρχικό $x_0 \leq 0$, και αποκλίνει για κάθε αρχικό $x_0 > 0$.

13. Έστω η εξίσωση $1 - x \ln x = 0$, $x > 0$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Newton-Raphson για την εύρεση μιας προσέγγισης x_k της ρίζας $\bar{x}$ της εξίσωσης αυτής, έτσι ώστε να ισχύει $|x_k - \bar{x}| \leq 10^{-4}$. Το αρχικό σημείο x_0 να επιλεγεί γραφικά.

14. Ο αντίστροφος ενός αριθμού $a \neq 0$ μπορεί να υπολογιστεί χωρίς διαίρεση από τον αλγόριθμο $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

α) Ναδειχθεί ότι η σχέση αυτή προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson στην εξίσωση $(1/x) - a = 0$. Για ποιες αρχικές τιμές η ακολουθία (x_k) συγκλίνει;

β) Με αρχικό $x_0 = 0.2$, να γίνουν 2 επαναλήψεις για να υπολογιστεί μια προσέγγιση του αντίστροφου του αριθμού 4 με τη μέθοδο αυτή.

15. Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x = 0$. Τι θα συμβεί αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson με $x_0 = 1/\sqrt{3}$ και με $x_0 = 1/\sqrt{5}$;

16. Η εξίσωση $x^3 - 2x - 5 = 0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα $\bar{x}$ και μάλιστα η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$. Αποδείξτε αναλυτικά ότι, αν $x_0 \geq 1$, τότε η ακολουθία (x_k) που παράγει η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στη ρίζα $\bar{x}$. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_k)_{k \geq 1}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη].

17. Να εφαρμοστεί η μέθοδος της Τέμνουσας για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $e^x - 3 = 0$, με $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ (τρεις επαναλήψεις). Συγκρίνετε με την ακριβή λύση.

18. Να εφαρμοστεί η μιγαδική μέθοδος Newton-Raphson στην εξίσωση $1 + z^2 = 0$ (δύο επαναλήψεις, με $z_0 = 1 + i$), και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος.

19. Δίνεται το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + 9y^2 = 9.$$

Να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα για να βρεθεί μια προσέγγιση της μοναδικής λύσης (x, y) , με $x > 0$, $y > 0$. Το αρχικό διάνυσμα να επιλεγεί γραφικά με καλή ακρίβεια. Επιπλέον, να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος.

20. Δίνεται το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \quad (x+3)^2 + y^2 - 16 = 0, \quad e^{-(x+y)/2} - z = 0,$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν τρεις επιφάνειες στον $\mathbf{R}^3$. Να γίνουν προσεκτικά γραφικές παραστάσεις των επιφανειών αυτών για να βρεθεί μια όσο το δυνατό καλύτερη αρχική προσέγγιση της λύσης. Να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα, με αρχικό διάνυσμα την προσέγγιση αυτή. Επιπλέον, να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος.