

2^η ΣΕΙΡΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη και με ακριβείς πράξεις (δηλ. με κλάσματα) το γραμμικό σύστημα

$$x - y - z = 0$$

$$2x - y + 3z = 9$$

$$5x + 2y - 4z = -3$$

Ποια είναι η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού;

2. Έστω το γραμμικό σύστημα

$$6x + 2y + 2z = -2$$

$$2x + 2y/3 + z/3 = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

που έχει την ακριβή λύση $x = 2.6$, $y = -3.8$, $z = -5$. Να λυθεί το σύστημα αυτό με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, πρώτα χωρίς οδήγηση, και μετά με μερική οδήγηση κατά στήλη, χρησιμοποιώντας αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 4 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση μετά από κάθε πράξη.

3. Να υπολογιστεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος της Άσκησης 1.

4. Δίνονται $n \times n$ πίνακες A, B, C , όπου οι A, B είναι αντιστρέψιμοι, και n -διανύσματα p, q . Να υπολογιστεί το διάνυσμα $v = A^{-1}(q + B^{-1}Cp)$ όσο το δυνατό πιο οικονομικά ως προς τον αριθμό πράξεων.

5. Ναδειχθεί ότι η Ευκλείδεια νόρμα πίνακα $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$ δεν είναι φυσική νόρμα (θεωρήστε το μοναδιαίο πίνακα $n \times n$), αλλά ικανοποιεί τη σχέση

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \|x\|_2$$

(χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$).

6. Να υπολογιστούν ακριβώς οι δείκτες κατάστασης $\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ και $\mu_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$ του πίνακα Hilbert

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

7. Έστω x η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$, με ομαλό πίνακα A , και z μια προσέγγιση αυτής. Θέτοντας $r = Az - b$, ναδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\|z - x\|}{\|x\|} \leq \mu \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

όπου μ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς τη φυσική νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$.

8. Να εξεταστεί αν η επαναληπτική μέθοδος

$$x_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -13/36 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad k=1,2,\dots, \quad x_0 \text{ δεδομένο},$$

συγκλίνει. Αν ναι, σε ποιο διάνυσμα;

9. Δίνεται το σύστημα $Ax = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα ότι οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλίνουν. Να εφαρμοστούν οι δύο μέθοδοι αυτές (3 επαναλήψεις, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα) και να δοθούν εκτιμήσεις σφάλματος στην τρίτη επανάληψη, αποφεύγοντας τον υπολογισμό του πίνακα των επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel.

10. Δίνεται το σύστημα $Ax = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/8 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b \text{ τυχόν}.$$

Να δειχθεί ότι εδώ η μέθοδος Jacobi συγκλίνει, ενώ η μέθοδος Gauss-Seidel δεν συγκλίνει (εξετάστε τη φασματική ακτίνα των αντίστοιχων πινάκων των επαναλήψεων).

11. Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A με διαγώνια κυριαρχία (υπεροχή) κατά γραμμές είναι ομαλός. (Δείξτε ότι $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ γράφοντας το σύστημα $Ax = 0$ στην ισοδύναμη μορφή $x = Cx$, όπου C ο πίνακας των επαναλήψεων της μεθόδου Jacobi, και παίρνοντας τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$. Σημειωτέον ότι $\|C\|_\infty < 1$).