

3^η ΣΕΙΡΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ - ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ναδειχθεί ότι, αν η συνάρτηση f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$, τότε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της f σε $n+1$ σημεία ταυτίζεται με την f .

2. α) Ναδειχθεί ότι τα βασικά πολυώνυμα Lagrange l_i ικανοποιούν $\sum_{i=0}^n l_i \equiv 1$.

β) Ναδειχθεί ότι $l_i(x) = \frac{\phi(x)}{(x-x_i)\phi'(x_i)}$, όπου $\phi(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j)$.

3. Να βρεθεί μια εκτίμηση του μέγιστου σφάλματος παρεμβολής Lagrange σε απόλυτη τιμή της $f(x) = e^{-x/2}$ στο διάστημα $[0,1]$,

α) με σημεία παρεμβολής $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$,

β) με σημεία παρεμβολής $x_i = 0.1i, i = 0, \dots, 10$.

4. Να βρεθεί η μορφή Newton του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ στα σημεία $x_i = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$.

5. α) Υπολογίστε με τον απλό τύπο Simpson το ολοκλήρωμα $\int_a^b x^3 dx$ και δείξτε ότι

βρίσκουμε το ακριβές ολοκλήρωμα. Συμπεράνετε ότι ο απλός (άρα και ο σύνθετος) τύπος Simpson είναι ακριβής για τα πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 .

β) Καταλήξτε στο ίδιο συμπέρασμα θεωρώντας τον όρο σφάλματος ολοκλήρωσης.

6. α) Να υπολογιστεί ακριβώς, και με τους σύνθετους τύπους Τραπεζίου και Simpson με κόμβους $0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (x^3 - x^4) dx$.

β) Να δοθεί, σε κάθε περίπτωση, μια όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος αριθμητικής ολοκλήρωσης.

7. α) Να υπολογιστεί, με το σύνθετο τύπο Τραπεζίου και με κόμβους $x_i = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{\cos x} dx$.

β) Να δοθεί μια όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης.

8. Να βρεθούν οι απλοί καθώς και οι σύνθετοι τύποι διπλής αριθμητικής ολοκλήρωσης Τραπεζίου και Simpson για το υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος της μορφής

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy,$$

“ολοκληρώνοντας” αριθμητικά πρώτα ως προς x (με βήμα h και M κόμβους x_i) και μετά ως προς y (με βήμα k και N κόμβους y_j) με τους αντίστοιχους απλούς και σύνθετους κλασικούς τύπους. Οι τύποι αυτοί να δοθούν στη μορφή

$$I \approx \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^M C_{ij} f_{ij}, \quad \text{όπου} \quad f_{ij} = f(x_i, y_j),$$

(να δοθούν, σε κάθε περίπτωση, οι συντελεστές C_{ij} σε μορφή ενός πίνακα C).

9. Να γραμμικοποιηθεί (μέσω λογαρίθμου) το μοντέλο $y = ae^{bt+c}$ και να εφαρμοσθεί η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων a, b και c , βάσει δεδομένων μετρήσεων $t_i, y_i, i = 1, \dots, m$.

10. Να βρεθεί η βέλτιστη προσαρμογή πολυωνύμου βαθμού ≤ 2 , $y = ax^2 + bx + c$, με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων στα σημεία (x_i, y_i) , με

$$x_i = 1, 2, 3, 4, \quad y_i = 2, 5.1, 10, 17.1.$$

11. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων a και b του επαναληπτικού γραμμικού μοντέλου $y_{k+1} = ay_k + by_{k-1}$, βάσει των μετρήσεων $y_k = 2, 3, 1, -2, -3, -1.1$, $k = 0, \dots, 5$.

12. Ποια είναι η βέλτιστη προσαρμογή πολυωνύμου βαθμού $\leq n$ σε $m = n+1$ σημεία του $\square^2$ με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων;

13. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση (πρόβλημα αρχικών τιμών)

$$y' = x + \sin y \quad \text{στο } [a, b], \quad y(a) = y_0,$$

έχει μια και μοναδική λύση $y \in C^1[a, b]$ (χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας Λύσης). Συμπεράνετε ότι η εξίσωση αυτή έχει μια και μοναδική λύση $y \in C^1(\square)$.

14. Να γίνουν δύο επαναλήψεις της **μη πεπλεγμένης** μεθόδου Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),$$

για να βρεθεί η προσέγγιση $\bar{y}_1$ της λύσης της διαφορικής εξίσωσης

$$(1) \quad y' = f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}, \quad y(1) = 2,$$

στο σημείο $x_1 = 1.02$, με βήμα $h = 0.02$.

15. Για την εξίσωση (1), και με αρχική προσέγγιση την τιμή $\bar{y}_1$ της μεθόδου Euler που βρέθηκε στην προηγούμενη άσκηση, να γίνουν δύο επαναλήψεις διόρθωσης των παρακάτω **πεπλεγμένων** μεθόδων:

α) Μέθοδος Euler: $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$,

β) Μέθοδος Τραπεζίου: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$,

γ) Μέθοδος του Μέσου: $y_{k+1} = y_k + hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$.

16. Για την πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1), να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta 2^{ης} τάξης, με βήμα $h = 0.02$

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})].$$

17. Για τη διαφορική εξίσωση (1), να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Taylor 2^{ης} τάξης, με βήμα $h = 0.02$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_k, y_k) + f_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k)].$$

18. Να βρεθεί ο τύπος της μεθόδου Taylor 3^{ης} τάξης επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{στο } [a, b], \quad y(a) = y_0.$$

19. α) Να αναχθεί η διαφορική εξίσωση $y''' = x + 2y + 3y' + y''$ σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

20. Να εφαρμοστούν οι μέθοδοι Euler (μη πεπλεγμένη) και Runge-Kutta 2^{ης} τάξης στο διαφορικό σύστημα της παραπάνω άσκησης.