



ΕΘΝΙΚΟ
ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ κορμού 5ου ΕΞΑΜΗΝΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ και ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ
ΡΟΗ με ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



Τριαντάφυλλος ΚΑΤΣΑΡΕΛΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΘΑ ΕΝΗΜΕΡΩΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

ΘΑ ΕΝΗΜΕΡΩΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΘΑ ΕΝΗΜΕΡΩΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ – Σ1

Τραπεζοειδής		
Συμμετρική πλάτος πυθμένα b κλίση πρανών z		Μη - συμμετρική πλάτος πυθμένα b κλίσεις πρανών z₁ , z₂
E	$(b + z \cdot y) \cdot y$	$E = \left(b + \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot y \right) \cdot y$
Π	$b + 2 \cdot y \cdot (1 + z^2)^{1/2}$	$b + y \cdot \left[(1 + z_1^2)^{1/2} + (1 + z_2^2)^{1/2} \right]$
B	$b + 2 \cdot z \cdot y$	$b + (z_1 + z_2) \cdot y$
R	$\frac{E}{\Pi}$	$\frac{E}{\Pi}$
y_μ	$\frac{E}{B}$	$\frac{E}{B}$
$\tilde{y}$	$\frac{(3 \cdot b + 2 \cdot z \cdot y) \cdot y}{6 \cdot (b + z \cdot y)}$	$\frac{[3 \cdot b + (z_1 + z_2) \cdot y] \cdot y}{3 \cdot [2 \cdot b + (z_1 + z_2) \cdot y]}$
$E \cdot \tilde{y}$	$\left(\frac{b}{2} + \frac{z}{3} \cdot y \right) \cdot y^2$	$\left(\frac{b}{2} + \frac{z_1 + z_2}{6} \cdot y \right) \cdot y^2$

Ορθογωνική		
πλάτος πυθμένα b		πλάτος πυθμένα b >> y
E	$b \cdot y$	
Π	$b + 2 \cdot y$	
B	b	
R	$\frac{y}{1 + 2 \cdot \frac{y}{b}}$	R → y
y_μ	y	
$\tilde{y}$	$\frac{y}{2}$	
$E \cdot \tilde{y}$	$\frac{b}{2} \cdot y^2$	

Τριγωνική		
Συμμετρική κλίση πρανών z		Μη - συμμετρική κλίσεις πρανών z_1, z_2
E	$z \cdot y^2$	$E = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot y^2$
Π	$2 \cdot y \cdot (1 + z^2)^{1/2}$	$y \cdot \left[(1 + z_1^2)^{1/2} + (1 + z_2^2)^{1/2} \right]$
B	$2 \cdot z \cdot y$	$(z_1 + z_2) \cdot y$
R	$\frac{z \cdot y}{2 \cdot (1 + z^2)^{1/2}}$	$\frac{(z_1 + z_2) \cdot y}{2 \cdot \left[(1 + z_1^2)^{1/2} + (1 + z_2^2)^{1/2} \right]}$
y_μ	$\frac{y}{2}$	$\frac{y}{2}$
$\tilde{y}$	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{3}$
$E \cdot \tilde{y}$	$\frac{z}{3} \cdot y^3$	$\frac{z_1 + z_2}{6} \cdot y^3$

Κυκλική

Συνοπτικός – συμπληρωματικός Πίνακας στον **Π3** 

(Μεταξύ των τιμών χρησιμοποιείται ακριβής γραμμική παρεμβολή)

$\frac{y}{d}$	$\frac{\tilde{y}}{d}$	$\frac{y}{d}$	$\frac{\tilde{y}}{d}$
0,100	0,04036	0,425	0,17828
0,125	0,05058	0,450	0,18947
0,150	0,06085	0,475	0,20078
0,175	0,07117	0,500	0,21221
0,200	0,08155	0,525	0,22376
0,225	0,09200	0,550	0,23456
0,250	0,10251	0,575	0,24730
0,275	0,11309	0,600	0,25391
0,300	0,12375	0,625	0,27149
0,325	0,13448	0,650	0,28386
0,350	0,14529	0,675	0,29644
0,375	0,15619	0,700	0,30925
0,400	0,16718	0,725	0,32332

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

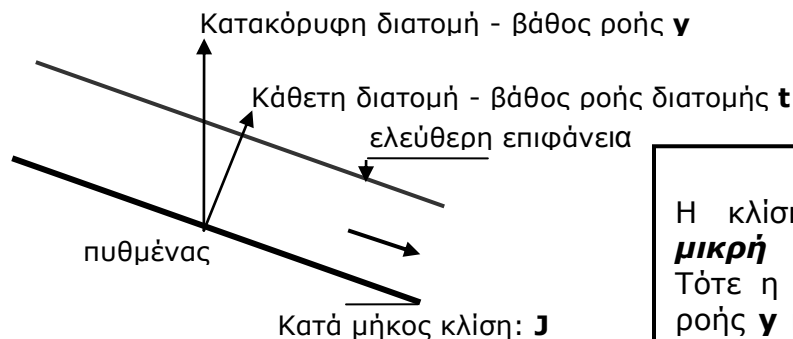
Ορίζονται τα γεωμετρικά μεγέθη της υδάτινης διατομής, οι χαρακτηρισμοί της ροής και επισημαίνεται η διαφορά μεταξύ των διαφόρων λογιστικών μεγεθών της ροής και του πραγματικού βάθους ροής. Επαναλαμβάνονται συνοπτικώς στοιχεία από το Κεφάλαιο **1** του τεύχους **NTUA D AH NV501 B**. Η ανάλυση βασίζεται σε μεγάλο βαθμό εις τη μέθοδο της Μονοδιάστατης Ανάλυσης, της οποίας στοιχεία παρουσιάζονται συνοπτικώς. Η μέθοδος είναι γνωστή από το μάθημα <Μηχανική των Ρευστών> του 5^{ου} εξαμήνου, όπου και προτείνω να ανατρέξετε!

1.1 Βασικές έννοιες

1.1.1 Γεωμετρικά μεγέθη

Ένας αγωγός καλείται **πρισματικός**, όταν έχει **σταθερή** και **ενιαία** κατά μήκος **κλίση πυθμένα** και **σταθερή - αναλλοίωτη διατομή** σε όλο του το μήκος.

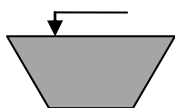
Διατομή (υδάτινη) αγωγού καλείται η τομή του **κάθετα** προς τη **κατεύθυνση της ροής**, η οποία στη περίπτωση του πρισματικού αγωγού θεωρείται παράλληλη προς την κατά μήκος γραμμή του πυθμένα.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ

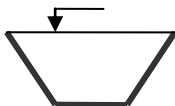
Η κλίση **J** είναι συνήθως **μικρή** (όριο 0,150 ή 8°). Τότε η διαφορά των βαθών ροής **y** και **t** είναι **λογιστικά αμελητέα**.

Το ίδιο ισχύει και για τα υδραυλικά βάθη **y_μ** και **t_μ**



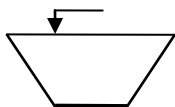
E

Εμβαδόν υδάτινης διατομής



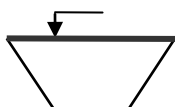
P

Βρεχόμενη περίμετρος



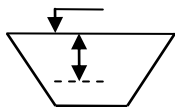
b

Πλάτος πυθμένα



B

Πλάτος υδάτινης επιφάνειας



$\bar{y}$

Απόσταση κέντρου βάρους υδάτινης διατομής από την επιφάνεια

Λογιστικά μεγέθη

Υδραυλική ακτίνα: **$R = E / P$**

Υδραυλικό βάθος: **$t_{\mu} \approx y_{\mu} = E / B$**

Στους υπολογισμούς εξετάζουμε πρισματικούς αγωγούς οι οποίοι επί πλέον έχουν ευθύγραμμη χάραξη και σταθερά στοιχεία τραχύτητας) σε όλο το μήκος τους. Ας επεκτείνουμε λοιπόν τον ορισμό του πρισματικού αγωγού, ώστε να περιλάβει πέρα από τις αρχικές απαιτήσεις γεωμετρίας και τις πρόσθετες λογιστικές απαιτήσεις. (Σημ. Κάντε τη σύνδεση με τον αντίστοιχο ορισμό του ομοιόμορφου αγωγού στη ροή υπό πίεση).

1.1.2 Κατηγορίες ροής με ελεύθερη επιφάνεια ☞ (βλ. 1.1.2 NTUA D AH NV501 B)

Υπενθυμίζεται ότι ροή με ελεύθερη επιφάνεια είναι δυνατό να πραγματοποιείται και σε αγωγούς κλειστές γεωμετρικής διατομής, αρκεί η διατομή να μην έχει πληρωθεί από το ρευστό = στην επιφάνεια της ροής να εμφανίζεται ατμοσφαιρική πίεση.

- **Μόνιμη – Μη μόνιμη:** Χαρακτηρισμός ως προς κινηματική – χρονική μεταβολή. Θα ασχοληθούμε μόνο με τη Μόνιμη ροή.
- **Ομοιόμορφη – Ανομοιόμορφη (ή Μεταβαλλόμενη):** Χαρακτηρισμός ως προς κινηματική – χωρική μεταβολή. Θα ασχοληθούμε με την Ομοιόμορφη αλλά και με τις **Βαθμιαίως** και **Ταχέως** Μεταβαλλόμενες ροές.
- **Στρωτή – Τυρβώδης:** Χαρακτηρισμός από δυναμική άποψη - επίδραση συνεκτικότητας → αριθμός **Reynolds**. Στη ροή με ελεύθερη επιφάνεια σπανίως εμφανίζεται στρωτή ροή σε πρακτικά προβλήματα ενδιαφέροντος Υδραυλικού Μηχανικού. Σε αντίθεση με τη ροή υπό πίεση ο αριθμός Reynolds δεν υπεισέρχεται ούτε καν λογιστικά στις διαδικασίες επίλυσης και ο χαρακτηρισμός

είναι τυπικός $R = \frac{V \cdot \frac{E}{\Pi}}{\nu}$ και $R_{\kappa\rho} \approx 750$ ή $R = \frac{V \cdot 4 \cdot \frac{E}{\Pi}}{\nu}$ και $R_{\kappa\rho} \approx 3.000$

- **Υποκρίσιμη – Κρίσιμη – Υπερκρίσιμη:** Χαρακτηρισμός από δυναμική άποψη - επίδραση βαρύτητας → αριθμός **Froude**. Στη ροή με ελεύθερη επιφάνεια αυτή η επίδραση είναι σημαντική και ο χαρακτηριστικός αριθμός Froude αποτελεί σημαντικό εργαλείο στις διαδικασίες επίλυσης και γενικότερα στο σχεδιασμό.

1.1.3 Εισαγωγική παρατήρηση

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε τον ορισμό και μεθόδους υπολογισμού μιας πλειάδος «βαθών» της ροής: <κρίσιμο βάθος>, <βάθος ομοιόμορφης ροής> και «ζευγών βαθών»: <εναλλακτά βάθη>, <συζυγή βάθη> καθώς και άλλων σχετιζομένων μεγεθών: <κρίσιμη κλίση> κ.λπ.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε εξ' αρχής ότι αυτά τα **μεγέθη** είναι απλώς λογιστικά. Έχουν μεν πολύ μεγάλη σημασία στο σχεδιασμό και είναι απαραίτητη η ικανότητα υπολογισμού τους, αλλά σε ένα σύστημα αγωγών μόνο σε ελάχιστες διατομές εμφανίζονται – υλοποιούνται!.. Αποτελούν **όρια**.

Δεν πρέπει ποτέ να μας διαφεύγει ότι η υδάτινη διατομή σε ένα σύστημα αγωγών μεταβάλλεται σε κάθε θέση και τελικώς **σηματοδοτείται** - **χαρακτηρίζεται** από το συνεχώς μεταβαλλόμενο – τοπικό - **πραγματικό βάθος ροής!**

1.2 Βασικές εξισώσεις για μόνιμη ροή ☞

1.2.1 Μονοδιάστατη ανάλυση

Οι εξισώσεις εφαρμόζονται σε κατάλληλα εκλεγόμενο όγκο αναφοράς, πεπερασμένο ή διαφορικό, σε περιοχές παράλληλης (ή *περίπου* παράλληλης) ροής, ο οποίος ορίζεται από:

- Την υδάτινη διατομή εισόδου (1) – ανάντη.
- Την υδάτινη διατομή εξόδου (2) – κατόντη.
- Την εσωτερική βρεχόμενη επιφάνεια του αγωγού μεταξύ των δύο διατομών.
- Την ελεύθερη επιφάνεια μεταξύ των δύο διατομών.

1.2.2 Τα εμπλεκόμενα φυσικά και λογιστικά μεγέθη

- Η παροχή **Q** (εισερχόμενη ή εξερχόμενη) σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
- Το εμβαδό της υδάτινης διατομής **E** (εισόδου ή εξόδου).

- Η μέση ταχύτητα **V** σε κάθε υδάτινη διατομή (εισόδου ή εξόδου): $V = \frac{Q}{E}$

Η μέση ταχύτητα είναι **λογιστικό μέγεθος**!

- Η πίεση σε κάθε διατομή υδάτινη (εισόδου ή εξόδου).
Η κατανομή των πιέσεων είναι **υδροστατική** καθ' ύψος της επιφάνειας!
- Η δύναμη εκ πιέσεων **F_p** σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
- Η δύναμη εκ διατμητικών τάσεων **F_τ** στα όρια του όγκου αναφοράς (Κυρίως στην βρεχόμενη επιφάνεια, το μέγεθος στην ελεύθερη επιφάνεια θεωρείται αμελητέο).
- Το βάρος του υγρού **F_g** το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο αναφοράς.
- Η πυκνότητα **ρ** και το ειδικό βάρος **γ** του ρέοντος ρευστού.
- Η ποσότητα κίνησης σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
- Η ενέργεια **H** σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου)
και οι απώλειες ενέργειας **ΔH_{a(1-2)}** μεταξύ των δύο διατομών.

1.2.3 Εξίσωση Συνέχειας

$$Q = V_1 \cdot E_1 = V_2 \cdot E_2 \quad (\text{εφόσον στον όγκο αναφοράς δεν υπάρχει εισροή ή εκροή})$$

1.2.4 Εξίσωση Ποσότητας Κίνησης

$$-\rho \cdot Q \cdot (\beta_1 \cdot \vec{V}_1 - \beta_2 \cdot \vec{V}_2) = (\vec{F}_{p1} - \vec{F}_{p2}) + \vec{F}_\tau + \vec{F}_g$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

- Για απλές γεωμετρικές διατομές και τυρβώδη ροή, ο συντελεστής β είναι κατά προσέγγιση ίσος με τη μονάδα.
- Η κατανομή των πιέσεων είναι υδροστατική.
- Η κατά μήκος κλίση του πυθμένα είναι συνήθως μικρή (βλ. 1.1.1).
- Και εφόσον στον όγκο αναφοράς δεν υπάρχει εισροή ή εκροή.

$$\frac{\gamma}{g} \cdot Q^2 \cdot \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) = (E_1 \cdot \tilde{y}_1 - E_2 \cdot \tilde{y}_2) + F_{\tau x}$$

1.2.4 Εξίσωση Ενέργειας

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$
$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

όπου z_1 και z_2 οι αποστάσεις του πυθμένα από οριζόντιο επίπεδο αναφοράς

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

- Για απλές γεωμετρικές διατομές και τυρβώδη ροή, ο συντελεστής α είναι κατά προσέγγιση ίσος με τη μονάδα.
- Η κατά μήκος κλίση του πυθμένα είναι συνήθως μικρή (βλ. 1.1.1).
- Και εφόσον στον όγκο αναφοράς δεν υπάρχει εισροή ή εκροή.

$$z_1 + y_1 + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot E_1^2} = z_2 + y_2 + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot E_2^2} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

όπου z_1 και z_2 οι αποστάσεις του πυθμένα από οριζόντιο επίπεδο αναφοράς

1.3 Ερωτήσεις κατανόησης

1.3.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Ένας πρισματικός αγωγός έχει:
	Ευθύγραμμη κατά μήκος χάραξη
	Σταθερή – αναλλοίωτη διατομή σε όλο του το μήκος
	Σταθερά στοιχεία τραχύτητας διατομής σε όλο του το μήκος
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ένας αγωγός σταθερής διατομής κλειστού τετραγώνου με εσωτερική επένδυση από τσιμεντοκονία έχει ευθύγραμμη κατά μήκος χάραξη
	Ο αγωγός δεν θεωρείται πρισματικός επειδή έχει κλειστή διατομή
	Ο αγωγός θεωρείται πρισματικός μόνο εάν η ροή είναι στρωτή
	Ο αγωγός θεωρείται πρισματικός μόνο εάν η ροή είναι υποκρίσιμη
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ένας αγωγός σταθερής τραπεζοειδούς διατομής έχει ευθύγραμμη κατά μήκος χάραξη, σε τμήμα του μήκους του εσωτερική επένδυση από τσιμεντοκονία και στο υπόλοιπο είναι ανεπένδυτος
✓	Ο αγωγός δεν θεωρείται πρισματικός σε όλο του το μήκος, αλλά κατά τμήμα
	Ο αγωγός θεωρείται πρισματικός σε όλο του το μήκος
	Ο αγωγός θεωρείται πρισματικός σε όλο του το μήκος εάν η ροή είναι κρίσιμη
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα αγωγό με σταθερή κατά μήκος κλίση πυθμένα πραγματοποιείται ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Το βάθος ροής διατομής t μετράται σε διατομή κάθετη στον πυθμένα
	Το βάθος ροής y μετράται σε διατομή κατακόρυφη
	Το εμβαδόν υδάτινης διατομής E μετράται σε διατομή κάθετη στον πυθμένα
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε έναν πρισματικό αγωγό με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα πραγματοποιείται ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Το υδραυλικό βάθος t_u είναι δυνατό να ληφθεί στους υπολογισμούς περίπου ίσο με το βάθος ροής y μόνο σε ορθογωνική διατομή
✓	Το υδραυλικό βάθος t_u είναι δυνατό να ληφθεί στους υπολογισμούς περίπου ίσο με το βάθος ροής y
	Το υδραυλικό βάθος t_u είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το βάθος ροής y
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

1.3.2 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Σε ένα πρισματικό αγωγό μεγάλου μήκους πραγματοποιείται ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Η ροή μπορεί να είναι στρωτή και υποκρίσιμη
	Η ροή μπορεί να είναι τυρβώδης και υπερκρίσιμη
	Η ροή μπορεί να είναι μόνιμη και κρίσιμη
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ο αριθμός REYNOLDS σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Είναι ο λόγος των δυνάμεων βαρύτητας προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας
	Είναι ο λόγος των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις βαρύτητας
✓	Είναι ο λόγος των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό μεγάλου μήκους πραγματοποιείται ροή με ελεύθερη επιφάνεια, η τιμή του αριθμού REYNOLDS:
✓	Συσχετίζεται με τη γεωμετρία της διατομής του αγωγού, την κινηματική συνεκτικότητα του υγρού και την εκάστοτε παροχή
	Προσδιορίζει εάν η ροή είναι υποκρίσιμη, κρίσιμη ή υπερκρίσιμη
	Η τιμή του ισούται με την τιμή του αριθμού FROUDE όταν η ροή είναι κρίσιμη
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η χαρακτηριστική τιμή του μήκους L στον υπολογισμό του αριθμού REYNOLDS σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια:
	Είναι το υδραυλικό βάθος t_u
✓	Μπορεί να είναι η υδραυλική ακτίνα R
	Μπορεί να είναι το βάθος ροής y
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η κρίσιμη τιμή του αριθμού REYNOLDS σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να είναι περίπου ίση με:
	1.000
	2.000
✓	3.000
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό σύνθετης διατομής και μικρής κατά μήκος κλίσης πυθμένα, πραγματοποιείται τυρβώδης ροή με ελεύθερη επιφάνεια. Ο συντελεστής συνόρθωσης α της Εξίσωσης Ενέργειας είναι δυνατό να ληφθεί κατά προσέγγιση:
	$\alpha = 1,00$
	$\alpha \approx 0,75$
	$\alpha \approx 1,25$
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

2 ΚΡΙΣΙΜΗ ΡΟΗ

Ορίζεται ο αριθμός Froude, τα μεγέθη της ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης των οποίων εξετάζονται τα διαγράμματα και σχέσεις. Ορίζεται το κρίσιμο βάθος ροής, αναλύεται η σημασία, οι διαδικασίες υπολογισμού του καθώς και οι διαδικασίες υπολογισμού των πραγματικών βαθών ροής με δεδομένη την παροχή και είτε την ειδική ενέργεια, ή την ειδική δύναμη. Αναλύονται σημαντικές εφαρμογές της κρίσιμης ροής, ορίζονται οι διατομές ελέγχου γενικώς και εξετάζονται χαρακτηριστικές διατομές ελέγχου σε κρίσιμη ροή. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και οι μέθοδοι υπολογισμού του φαινομένου του υδραυλικού άλματος (ταχέως μεταβαλλόμενη ροή) για οριζόντια (ή πολύ μικρή) κλίση πυθμένα πρισματικών αγωγών.

2.1 Βασικές έννοιες

2.1.1 Αριθμός FROUDE (αδιάστατος):

- Είναι ο λόγος των δυνάμεων **αδράνειας** προς τις δυνάμεις **βαρύτητας**.

$$F = \frac{V}{(g \cdot t_\mu)^{1/2}} = \frac{V}{(g \cdot y_\mu)^{1/2}} \quad (1) \quad \text{και} \quad F = \frac{Q}{E(y)^{1,5} \cdot \left(\frac{g}{B(y)}\right)^{1/2}} \quad (1a)$$

Η ποσότητα $C = (g \cdot t_\mu)^{1/2} = (g \cdot y_\mu)^{1/2} = \left(g \cdot \frac{E(y)}{B(y)}\right)^{1/2} \quad (2)$

εκφράζει την **ταχύτητα διάδοσης κύματος βαρύτητας μικρού ύψους**, (το οποίο είναι δυνατόν να δημιουργηθεί εντός του αγωγού ως αποτέλεσμα στιγμιαίας τοπικής μεταβολής - διαταραχής του βάθους ροής λόγω εξωτερικών αιτιών).

- Άρα ο αριθμός Froude, όπως ορίστηκε ως άνω για *ανοικτούς αγωγούς*, είναι ο λόγος της **μέσης ταχύτητας** προς την **ταχύτητα διάδοσης κύματος βαρύτητας μικρού ύψους**.
- Έχοντας υπολογίσει τον αριθμό Froude **F** για το πραγματικό βάθος ροής **y**, είναι δυνατό να χαρακτηρίσουμε τη ροή στο σημείο αυτό του αγωγού:
 - F(y) < 1**: η **ροή** καλείται **υποκρίσιμη** και ο **κυματισμός** ($C > V$) μεταδίδεται **ανάντη και κατόντη** της διαταραχής.
 - F(y) = 1**: η **ροή** καλείται **κρίσιμη** (χωρίς ο όρος να σηματοδοτεί κάτι *δραματικό*).
 - F(y) > 1**: η **ροή** καλείται **υπερκρίσιμη** και ο **κυματισμός** ($C < V$) μεταδίδεται **μόνο κατόντη** της διαταραχής.

2.1.2 Ειδική ενέργεια H_E

Εκφράζει το **ύψος ενέργειας**, ως προς επίπεδο αναφοράς **οριζόντιο** το οποίο διέρχεται από τον **πυθμένα** της **διατομής**.

(Σημ. Κάντε τη *σύνδεση* με τη χάραξη της Γ.Ε. στη Ροή υπό Πίεση, όπου και εκεί *εξαφανίζεται* η απόσταση z από το επίπεδο αναφοράς, θεωρώντας μεταβλητό επίπεδο αναφοράς, το οποίο διέρχεται από τον άξονα του αγωγού).

$$H_E = y + \frac{V^2}{2 \cdot g} = y + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot E^2(y)} \quad (3) \rightarrow \text{Η } H_E \text{ εκφράζεται σε m.}$$

$$H_E = y + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot b^2 \cdot y^2} \quad (3a) \text{ σε ορθογωνική διατομή}$$

Για δεδομένη παροχή Q (και γεωμετρία διατομής) $\square$, η σχέση (3) γίνεται:

$H_E = H_E(y) \rightarrow$ *Τριτοβάθμια εξίσωση*

- Δύο πραγματικές – θετικές ρίζες $\rightarrow$ **εναλλακτά βάθη**
- ή μία *διπλή* ρίζα $\rightarrow$ **κρίσιμο βάθος** y_k , όπου η H_E είναι **minimum** και **F = 1**!

$$H_{Emin} = y_k + \frac{y_{\mu k}}{2} = y_k + \frac{E(y_k)}{2 \cdot B(y_k)} \quad (4)$$

$y_{\mu k}$ είναι το υδραυλικό βάθος το οποίο αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος y_k .

Ροή με $H_E < H_{Emin}$ με δεδομένη παροχή Q είναι **αδύνατον να συμβεί!**

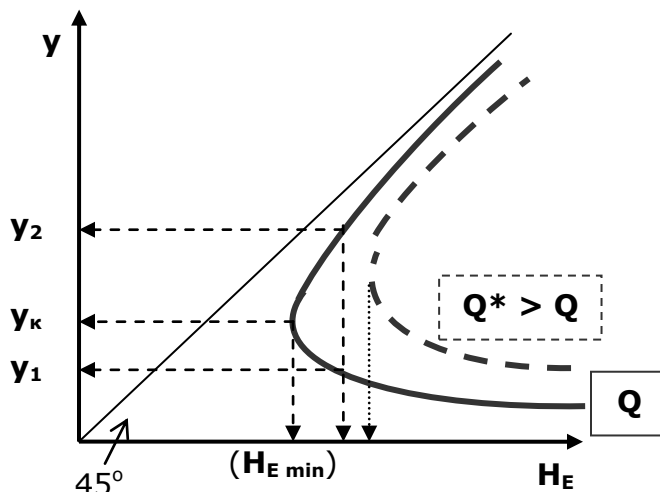
Η ροή θα αναπροσαρμοσθεί από μόνη της: Θα μειωθεί η παροχέτευση!

(Σημ. Κάντε τη *σύνδεση* με την αντίστοιχη περίπτωση στη Ροή υπό Πίεση, όπου και εκεί η παροχέτευση *αναπροσαρμόζεται* όταν το Ενεργειακό Διαθέσιμο δεν επαρκεί).

ο Ορθογωνική διατομή $H_{Emin} = 1,5 \cdot y_k \quad (4a)$

ο Τριγωνική διατομή $H_{Emin} = 1,25 \cdot y_k \quad (4b)$

Σημ.: Σε ορθογωνική διατομή ορίζεται η παροχή ανά μονάδα πλάτους $q = Q / b$ και αντιστοίχως έχει νόημα η q σε φυσική διατομή πολύ μεγάλου πλάτους $b \approx B \gg y$



Διάγραμμα H_E, y
(*μικρή κλίση*)

y_1 και y_2 **εναλλακτά** $\rightarrow$ ίδια H_E
 y_k **κρίσιμο** $\rightarrow H_E$ minimum

για $Q^* > Q$
 $(H_{Emin})^* > (H_{Emin})$
 $(y_k)^* > (y_k)$

Σχήμα 1

Για δεδομένη Ειδική ενέργεια H_E (και γεωμετρία διατομής) Ξ , η σχέση (3) γίνεται:

$$Q = E(y) \cdot [2g \cdot (H_E - y)]^{1/2} \quad (5)$$

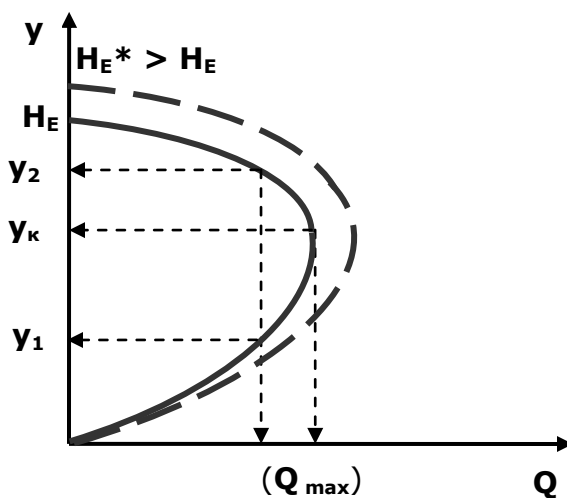
- Δύο πραγματικές – θετικές ρίζες
- ή μία διπλή ρίζα $\rightarrow$ **κρίσιμο βάθος** y_k όπου η Q είναι **maximum** και **F = 1!**

$$Q_{\max} = E(y_k) \cdot [2g \cdot (H_E - y_k)]^{1/2} \quad (6) - \text{Μέγιστη παροχή με δεδομένη } H_E$$

ο Ορθογωνική διατομή $Q_{\max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1,5} \cdot \sqrt{g} \cdot b \cdot H_E^{1,5} \quad (6a)$

ο Τριγωνική - συμμετρική διατομή $Q_{\max} = \frac{2^{4,5}}{5^{2,5}} \cdot \sqrt{g} \cdot z \cdot H_E^{2,5} \quad (6\beta)$

ο Τριγωνική - Μη συμμετρική διατομή $Q_{\max} = \frac{2^{3,5}}{5^{2,5}} \cdot \sqrt{g} \cdot (z_1 + z_2) \cdot H_E^{2,5} \quad (6\gamma)$



Διάγραμμα Q, y
(μικρή κλίση J)

y_1 και y_2 **εναλλακτά** $\rightarrow$ ίδια Q
 y_k **κρίσιμο** $\rightarrow Q_{\max}$
 $y \rightarrow 0$ και $y \rightarrow H_E \rightarrow Q \rightarrow 0$

για $H_E^* > H_E$
 $Q^*_{\max} > Q_{\max}$
 $(y_k)^* > (y_k)$

Σχήμα 2

2.1.3 Ειδική δύναμη M Ξ

Εκφράζει τη **δύναμη ανά μονάδα βάρους** ρέοντος υγρού δια της **διατομής**.

$$M = \frac{Q^2}{g \cdot E(y)} + E(y) \cdot \tilde{y}(y) \quad (7) \rightarrow \text{Η } M \text{ εκφράζεται σε } m^3$$

$$M = \frac{Q^2}{g \cdot b \cdot y} + \frac{b \cdot y^2}{2} \quad (7a) \text{ σε } \text{ορθογωνική διατομή}$$

Για δεδομένη παροχή Q (και γεωμετρία διατομής) Ξ , η σχέση (9) γίνεται:

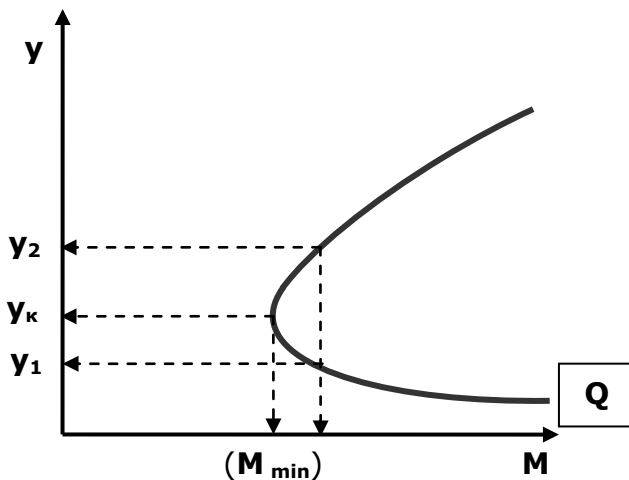
$M = M(y) \rightarrow$ Τριτοβάθμια εξίσωση

- Δύο πραγματικές – θετικές ρίζες $\rightarrow$ **συζυγή βάθη**
- ή μία διπλή ρίζα $\rightarrow$ **κρίσιμο βάθος** y_k όπου η M είναι **minimum** και **F = 1!**

$$M_{\min} = \frac{Q^2}{g \cdot E(y_{\kappa})} + E(y_{\kappa}) \cdot \tilde{y}(y_{\kappa}) = \frac{E(y_{\kappa})^2}{B(y_{\kappa})} + E(y_{\kappa}) \cdot \tilde{y}(y_{\kappa}) \quad (8)$$

Ροή με $M < M_{\min}$ με δεδομένη παροχή Q είναι **αδύνατον να συμβεί!**
 Η ροή θα αναπροσαρμοσθεί από μόνη της!

- $M_{\min} = 1,5 \cdot b \cdot y_{\kappa}^2$ (8α) Ορθογωνική διατομή
- $M_{\min} = \frac{5}{6} \cdot z \cdot y_{\kappa}^3$ (8β) Τριγωνική συμμετρική διατομή
- $M_{\min} = \frac{5 \cdot (z_1 + z_2)}{12} \cdot y_{\kappa}^3$ (8γ) Τριγωνική Μη-συμμετρική διατομή



Διάγραμμα M, y
 (μικρή κλίση J)

y_1 και y_2 συζυγή $\rightarrow$ ίδια M
 y_{κ} κρίσιμο $\rightarrow M_{\min}$

Σχήμα 3

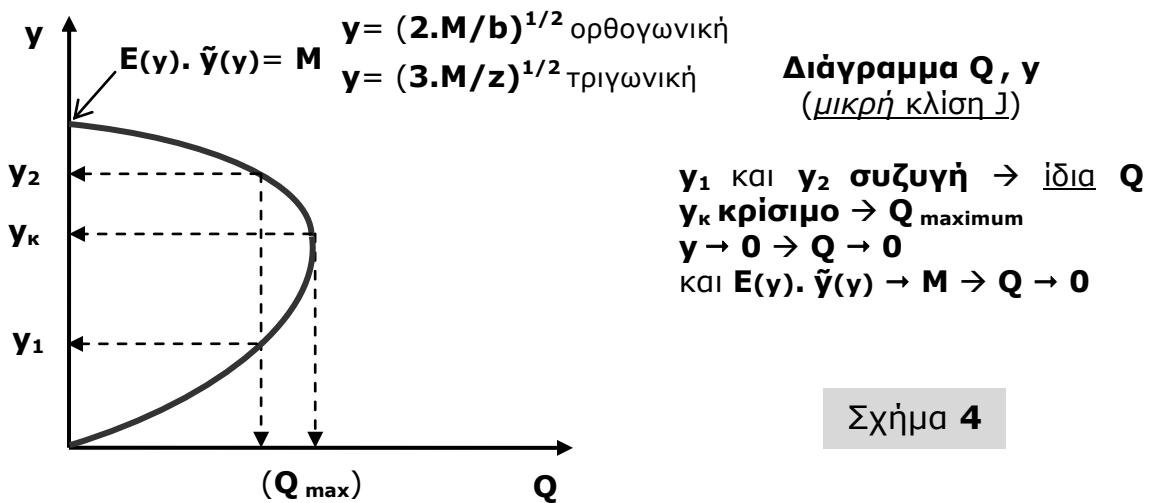
Για δεδομένη Ειδική Δύναμη M (και γεωμετρία διατομής), η σχέση (7) γίνεται:

$$Q = \{g \cdot E(y) \cdot [M - E(y) \cdot \tilde{y}(y)]\}^{1/2} \quad (9)$$

- Δύο πραγματικές – θετικές ρίζες
- **ή** μία πολλαπλή ρίζα $\rightarrow$ **κρίσιμο βάθος y_{κ}** , όπου η Q είναι **maximum** και **$F = 1$** !

$$Q_{\max} = \{g \cdot E(y_{\kappa}) \cdot [M - E(y_{\kappa}) \cdot \tilde{y}(y_{\kappa})]\}^{1/2} \quad (10) - \text{Μέγιστη παροχή με δεδομένη } M$$

- Ορθογωνική διατομή $Q_{\max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0,75} \cdot \sqrt{g} \cdot b^{0,25} \cdot M^{0,75}$ (10α)
- Τριγωνική – συμμετρική $Q_{\max} = 2^{1/3} \cdot 0,6^{5/6} \cdot \sqrt{g} \cdot z^{1/6} \cdot M^{5/6}$ (10β)
- Τριγωνική – Μη συμμετρική διατομή
 $Q_{\max} = 2^{1/6} \cdot 0,6^{5/6} \cdot \sqrt{g} \cdot (z_1 + z_2)^{1/6} \cdot M^{5/6}$ (10γ)



2.1.4 Θεωρητικός υπολογισμός Κρίσιμου βάθους y_k

Όταν δίδεται μία από τις εξισώσεις των H_E – σχέση (3) ή M – σχέση (7):

- Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της τριτοβάθμιας εξίσωσης
- Θέτουμε την προκύπτουσα εξίσωση ίση με μηδέν
- Η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι το y_k !

2.1.5 Χαρακτηριστικά Κρίσιμου βάθους y_k (ανακεφαλαίωση)

- Ο αριθμός **Froude** είναι ίσος με τη **μονάδα** – σχέση (1)
- Η ειδική ενέργεια H_E είναι **ελάχιστη** – σχέση (5)
 (για δεδομένη παροχή Q και γεωμετρία διατομής)
- Η ειδική δύναμη M είναι **ελάχιστη** – σχέση (10)
 (για δεδομένη Παροχή Q και γεωμετρία διατομής)
- Η παροχή Q είναι **μέγιστη** – σχέση (7)
 (για δεδομένη Ειδική Ενέργεια H_E και γεωμετρία διατομής)
- Η παροχή Q είναι **μέγιστη** – σχέση (8β)
 (για δεδομένη Ειδική Δύναμη M και γεωμετρία διατομής)

2.1.6 Υπολογισμός του Κρίσιμου βάθους y_k – Βασικά Προβλήματα

- Θα χειριστούμε τον υπολογισμό του κρίσιμου βάθους y_k με **δεδομένα** τα **γεωμετρικά στοιχεία** της **διατομής** και **ένα** από τα ακόλουθα μεγέθη:
 - Δεδομένη Παροχή Q : Πρόβλημα **T1**
 - Δεδομένη Ειδική Ενέργεια H_E : Πρόβλημα **T2**
 - Δεδομένη Ειδική Δύναμη M : Πρόβλημα **T3**
- Θα χειριστούμε επίσης τον υπολογισμό της παροχής Q με **δεδομένα** τα **γεωμετρικά στοιχεία** της **διατομής** και το κρίσιμο βάθος y_k :
 - Δεδομένο Κρίσιμο βάθος y_k : Πρόβλημα **T4**
 - Το πρόβλημα αυτό έχει ιδιαίτερη αξία! Επιτρέπει τον υπολογισμό της παροχής σε κάποια διατομή, όπου γνωρίζουμε ότι το **πραγματικό** βάθος **ταυτίζεται** με το **κρίσιμο** βάθος. Οι διατομές αυτές καλούνται **διατομές ελέγχου** και θα επανέλθουμε στη συνέχεια.
- Τα **τέσσερα** αυτά προβλήματα είναι δυνατό να τα αποκαλέσουμε **Βασικά** ή **Θεμελιώδη**. Στα επόμενα Κεφάλαια θα ορίσουμε ως **Βασικά** και άλλα προβλήματα. Σύνθετα προβλήματα, τα οποία θα χειριστούμε στη συνέχεια αναλύονται – διασπώνται σε ένα σύνολο αποτελούμενο από επί μέρους Βασικά προβλήματα. Ή τουλάχιστον η επίλυσή τους βασίζεται σε μεγάλο μέρος στα Βασικά ♪
- Αναλόγως των δεδομένων μετά τον υπολογισμό του y_k στα τρία πρώτα προβλήματα είναι ευχερές να υπολογιστούν και πρόσθετα σημαντικά μεγέθη ♪
 - Δεδομένη Παροχή Q : Πρόβλημα **T1** $\rightarrow H_{E\text{minimum}}$ και M_{minimum}
 - Δεδομένη Ειδική Ενέργεια H_E : Πρόβλημα **T2** $\rightarrow Q_{\text{maximum}}$ και M_{minimum}
 - Δεδομένη Ειδική Δύναμη M : Πρόβλημα **T3** $\rightarrow Q_{\text{maximum}}$ και $H_{E\text{minimum}}$
- Γενικώς ισχύει ότι, με δεδομένα τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής η τιμή του y_k μεταβάλλεται ομόρροπα με τη μεταβολή της τιμής η τιμή των άλλων δεδομένων μεγεθών:
 - Παροχή Q - Πρόβλημα **T1**: $Q \uparrow \rightarrow y_k \uparrow$ και $Q \downarrow \rightarrow y_k \downarrow$
 - Ειδική Ενέργεια H_E - Πρόβλημα **T2**: $H_E \uparrow \rightarrow y_k \uparrow$ και $H_E \downarrow \rightarrow y_k \downarrow$
 - Ειδική Δύναμη M - Πρόβλημα **T3**: $M \uparrow \rightarrow y_k \uparrow$ και $M \downarrow \rightarrow y_k \downarrow$
- Έχοντας υπολογίσει το κρίσιμο βάθος y_k είναι δυνατό να χαρακτηρίσουμε τη ροή σε οιοδήποτε σημείο του αγωγού. Αρκεί να το συγκρίνουμε με το πραγματικό βάθος ροής y :
 - $y > y_k$: η ροή είναι **υποκρίσιμη**
 - $y = y_k$: η ροή είναι **κρίσιμη**
 - $y < y_k$: η ροή είναι **υπερκρίσιμη**
- Εάν η σύγκριση του y_k γίνει με το βάθος ομοιόμορφης ροής y_0 (βλ. κεφάλαιο **3**) το αντίστοιχο συμπέρασμα αφορά στο χαρακτηρισμό της ροής με ομοιόμορφο βάθος.

2.1.7 Υπολογισμός των Πραγματικών βαθών y – Βασικά Προβλήματα

- Γενικεύοντας θα χειριστούμε τον υπολογισμό των πραγματικών βαθών y με **δεδομένα** τα **γεωμετρικά στοιχεία** της **διατομής** και ένα από τα ακόλουθα **ζεύγη** μεγεθών:
 - ο Δεδομένη Παροχή Q + Ειδική Ενέργεια H_E : Πρόβλημα **T5**
 - ο Δεδομένη Παροχή Q + Ειδική Δύναμη M : Πρόβλημα **T6**
- Τα **δύο** αυτά προβλήματα είναι **επίσης** δυνατό (βλ. 2.1.5) να τα αποκαλέσουμε και αυτά **Βασικά**.
- Αναλόγως των δεδομένων μετά τον υπολογισμό του y είναι ευχερές να υπολογιστεί και το τρίτο – μη δεδομένο μέγεθος J
 - ο Παροχή Q + Ειδική Ενέργεια H_E : Πρόβλημα **T5** $\rightarrow M$
 - ο Παροχή Q + Ειδική Δύναμη M : Πρόβλημα **T6** $\rightarrow H_E$
- Με δεδομένα: Παροχή Q + Ειδική Ενέργεια H_E (Πρόβλημα **T5**) προκύπτει εξίσωση με **δύο** γενικώς πραγματικές – θετικές **ρίζες** για το y . Τα δύο **βάθη** καλούνται **εναλλακτά** και έχουν τιμές μεγαλύτερη και μικρότερη του y_K (βλ. 2.1.2 και Σχήμα **1**).
- Με δεδομένα: Παροχή Q + Ειδική Δύναμη M (Πρόβλημα **T6**) προκύπτει εξίσωση με **δύο** γενικώς πραγματικές – θετικές **ρίζες** για το y . Τα δύο **βάθη** καλούνται **συζυγή** και έχουν τιμές μεγαλύτερη και μικρότερη του y_K (βλ. 2.1.3 και Σχήμα **3**).
- Έχοντας υπολογίσει το πραγματικό βάθος ροής y είναι δυνατό να χαρακτηρίσουμε τη ροή σε οιοδήποτε σημείο του αγωγού. Αρκεί να το συγκρίνουμε με το κρίσιμο βάθος y_K (βλ. 2.1.5).

2.1.8 Ακρίβεια υπολογισμών και έλεγχοι

- Σε όλες τις προτεινόμενες στη συνέχεια διαδικασίες επίλυσης εξασφαλίζεται η απαιτούμενη – σε κάθε πρόβλημα - αριθμητική ακρίβεια στα αποτελέσματα.
- Όμως, πολλές από αυτές τις διαδικασίες βασίζονται στη χρήση Πινάκων ή σχετικώς μακροσκελών προσεγγιστικών σχέσεων.
 - ο Η πιθανότητα λανθασμένων χειρισμών ή / και πράξεων είναι πολύ μεγάλη.
 - ο Επειδή αρχικώς δεν υπάρχει εξοικείωση, κυρίως δε επειδή η εμπειρία για την τάξη μεγέθους του προς υπολογισμό μεγέθους είναι πολύ μικρή.
- Προτείνεται – σε κάθε πρόβλημα - **έλεγχος – επαλήθευση**, ο οποίος ΔΕΝ προκύπτει αναγκαστικώς από την διαδικασία σύγκλισης (μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων), ΑΛΛΑ για τον **εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων**. Επομένως, ΔΕΝ ακολουθεί πάντοτε διαδικασία περεταίρω σύγκλισης, αλλά απλώς **επαναλαμβάνονται οι πράξεις!**
- Σημειώνεται ότι, οι περισσότερες από τις προσεγγιστικές σχέσεις έχουν δομηθεί από το γράφοντα και προτείνονται για 1^η φορά εις την παρούσα έκδοση.

2.2 Ερωτήσεις κατανόησης

2.2.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Ο αριθμός FROUDE σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια:
	Είναι ο λόγος των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις βαρύτητας
	Είναι ο λόγος της μέσης ταχύτητας της ροής σε μία υδάτινη διατομή προς την ταχύτητα διάδοσης κύματος βαρύτητας μικρού ύψους
	Η τιμή του χαρακτηρίζει τη ροή σε υποκρίσιμη / κρίσιμη / υπερκρίσιμη
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό μεγάλου μήκους πραγματοποιείται υποκρίσιμη ροή με ελεύθερη επιφάνεια. Κύματα βαρύτητας μικρού ύψους στον αγωγό μεταδίδονται:
	Μόνο κατάντη διαταραχής
✓	Ανάντη και κατάντη διαταραχής
	Μόνο ανάντη διαταραχής
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό μεγάλου μήκους, με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα και δεδομένη σταθερή παροχή Q, πραγματοποιείται παράλληλη τυρβώδης ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Υπάρχει μια ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας, όπου η ροή πραγματοποιείται με κρίσιμο βάθος
	Υπάρχει μια ελάχιστη τιμή της ειδικής δύναμης, όπου η ροή πραγματοποιείται με κρίσιμο βάθος
	Για τιμές ειδικής ενέργειας μεγαλύτερης της ελαχίστης η ροή είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με δύο βάθη τα οποία καλούνται εναλλακτά
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό μεγάλου μήκους, με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα και δεδομένη σταθερή παροχή Q, πραγματοποιείται παράλληλη στρωτή ροή με ελεύθερη επιφάνεια
	Υπάρχει μια μέγιστη τιμή της ειδικής ενέργειας, όπου η ροή πραγματοποιείται με κρίσιμο βάθος
	Υπάρχει μια μέγιστη τιμή της ειδικής δύναμης, όπου η ροή πραγματοποιείται με κρίσιμο βάθος
	Για τιμές ειδικής ενέργειας μεγαλύτερης της μέγιστης η ροή είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με δύο βάθη τα οποία καλούνται συζυγή
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

2.2.2 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Σε ένα πρισματικό αγωγό, με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα, παράλληλη, ή περίπου παράλληλη ροή και δεδομένη σταθερή παροχή Q, στο διάγραμμα ειδικής ενέργειας:
	Η γραφική απεικόνιση της $H_E(y)$ έχει ασύμπτωτες τον άξονα x και ευθεία με κλίση 45°
	Η γραφική απεικόνιση της $H_E(y)$ έχει μία ελάχιστη τιμή H_{Emin} , η οποία προκύπτει για το κρίσιμο βάθος
	Οιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία για τιμές $H_E(y) > H_{Emin}$ τέμνει τη γραφική απεικόνιση της $H_E(y)$ σε δύο σημεία και οι αντίστοιχες τιμές του y καλούνται εναλλακτά βάθη
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πρισματικό αγωγό, με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα, παράλληλη, ή περίπου παράλληλη ροή και δεδομένη σταθερή παροχή Q, στο διάγραμμα ειδικής δύναμης:
	Η γραφική απεικόνιση της $M(y)$ έχει ασύμπτωτες τον άξονα y και ευθεία με κλίση 45°
	Η γραφική απεικόνιση της $M(y)$ έχει μία μέγιστη τιμή M_{max} , η οποία προκύπτει για το κρίσιμο βάθος
✓	Οιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία για τιμές $M(y) > M_{min}$ τέμνει τη γραφική απεικόνιση της $M(y)$ σε δύο σημεία και οι αντίστοιχες τιμές του y καλούνται συζυγή βάθη
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

2.2.3 (αιτιολογείστε την απάντησή σας)

	Σε ένα πρισματικό αγωγό, με μικρή κατά μήκος κλίση πυθμένα και δεδομένη σταθερή παροχή Q, πραγματοποιείται παράλληλη ροή με ελεύθερη επιφάνεια. Η ειδική ενέργεια δίδεται από τη σχέση: $H_E = y^3 - 1,2 \cdot y^2 + 0,2$. Να υπολογισθεί το κρίσιμο βάθος.
	- Υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο: $3 \cdot y^2 - 2,4 \cdot y$ - Θέτουμε: $3 \cdot y^2 - 2,4 \cdot y = 0 \rightarrow y = 0,8 \text{ m}$ - Το y_k αντιστοιχεί σε $H_{Emin} \rightarrow y_k = 0,8 \text{ m}$
	Εάν ο παραπάνω αγωγός έχει ορθογωνική διατομή πλάτους b, να υπολογισθεί η ελάχιστη τιμή της ειδικής δύναμης.
	- Το y_k αντιστοιχεί σε $M_{minimum}$ - Ορθογωνική διατομή (9a) $\rightarrow M_{minimum} = 0,96 \cdot b \text{ m}^3$

2.3 Κρίσιμο βάθος - δεδομένη Παροχή Q - Πρόβλημα T1

2.3.1 Υπολογισμός Κρίσιμου βάθους y_c - Γενικά στοιχεία

- Απαιτούμενα **δεδομένα** είναι η παροχή **Q** και τα **γεωμετρικά στοιχεία** της **διατομής**.

- Θέτουμε **F = 1** στην
$$F = \frac{Q}{E(y)^{1,5} \cdot \left(\frac{g}{B(y)}\right)^{0,5}} \quad (1a)$$

- Αρχικώς υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$\frac{E^3(y_c)}{B(y_c)} = \frac{Q^2}{g} = C_c \quad (11) \text{ σταθερό στοιχείο ελέγχου}$$

- Για οιαδήποτε τιμή y_{kv} διαδικασίας επίλυσης προκύπτει:

$$\frac{E^3(y_{kv})}{B(y_{kv})} = C_{kv} \quad (12) \text{ υπολογιζόμενο στοιχείο}$$

- Η τιμή y_{kv} είναι **αποδεκτή**, όταν:
$$\frac{|C_{kv} - C_c|}{C_c} \leq L_{limit} \% \quad (13)$$
 - Το **όριο L_{limit}** **ορίζεται κατά περίπτωση** και γενικώς είναι: **2 < L_{limit} < 5**
 - Επισημάνση: η (12) $\rightarrow C_{kv} \propto y_{kv}^2$
 - Επομένως, *σφάλμα* – προσέγγιση **2%** στο **C_{kv}** είναι προσέγγιση **1%** στο **y_{kv}** , ενώ **5%** στο **C_{kv}** είναι ικανοποιητική προσέγγιση **2,5%** στο **y_{kv}** .
- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις **H_{Emin}** , **$M_{minimum}$**

$$H_{Emin} = y_c + \frac{E(y_c)}{2 \cdot B(y_c)} \quad (4)$$

$$M_{min} = \frac{Q^2}{g \cdot E(y_c)} + E(y_c) \cdot \tilde{y}(y_c) \quad (8)$$

2.3.2 Ορθογωνική με πλάτος **b** - **απ' ευθείας** λύση ♪

$$y_{\kappa} = \left(\frac{Q^2}{b^2 \cdot g} \right)^{1/3} \quad (14)$$

$$H_{Emin} = 1,5 \cdot y_{\kappa} \quad (4\alpha) \text{ και } M_{min} = 1,5 \cdot b \cdot y_{\kappa}^2 \quad (8\alpha)$$

2.3.3 Τριγωνική συμμετρική με κλίση πρανών **z** - **απ' ευθείας** λύση ♪

$$y_{\kappa} = \left(\frac{2 \cdot Q^2}{z^2 \cdot g} \right)^{0,2} \quad (15)$$

$$H_{Emin} = 1,25 \cdot y_{\kappa} \quad (4\beta) \text{ και } M_{min} = \frac{5}{6} \cdot z \cdot y_{\kappa}^3 \quad (8\beta)$$

2.3.4 Τριγωνική Μη - συμμετρική με κλίσεις πρανών **z₁** , **z₂** - **απ' ευθείας** λύση ♪

$$y_{\kappa} = \left(\frac{8 \cdot Q^2}{(z_1 + z_2)^2 \cdot g} \right)^{0,2} \quad (15\alpha)$$

$$H_{Emin} = 1,25 \cdot y_{\kappa} \quad (4\beta) \text{ και } M_{min} = \frac{5 \cdot (z_1 + z_2)}{12} \cdot y_{\kappa}^3 \quad (8\gamma)$$

2.3.5 Τραπεζοειδής συμμετρική με πλάτος **b** και κλίση πρανών **z**

Προτείνονται δύο **διαδικασίες επίλυσης** με **χρήση Πίνακα** ή **προσεγγιστικής σχέσης**:

- ο Η **μέσω πίνακα** διαδικασία βασίζεται στη χρήση του Πίνακα **Π2** 📄.
- ο Η **αριθμητική** διαδικασία βασίζεται στη χρήση προσεγγιστικής σχέσης.
Η σύγκλιση με βάση την (13) εξασφαλίζεται!

Υπολογίζουμε αρχικώς τα $C_{\kappa} = \frac{Q^2}{g} \quad (11) \text{ και } \Phi_{\kappa} = (C_{\kappa})^{1/2} \cdot \frac{z^{1,5}}{b^{2,5}} \quad (16)$

μέσω πίνακα

- Εντοπίζουμε το **Φ_κ** στον πίνακα **Π2** 📄
- Διαβάζουμε το **μ** στην αντίστοιχη - **αμέσως αριστερά** - στήλη
(ή το **μ.ο.** ανάμεσα σε δύο γραμμές, ΔΕΝ παιδεύομαστε με ακριβή παρεμβολή!)

προσεγγιστική σχέση όταν είναι: $0,017 \leq \Phi_{\kappa}$

- Υπολογίζουμε το **μ**: $\mu = 10^a \quad (17)$

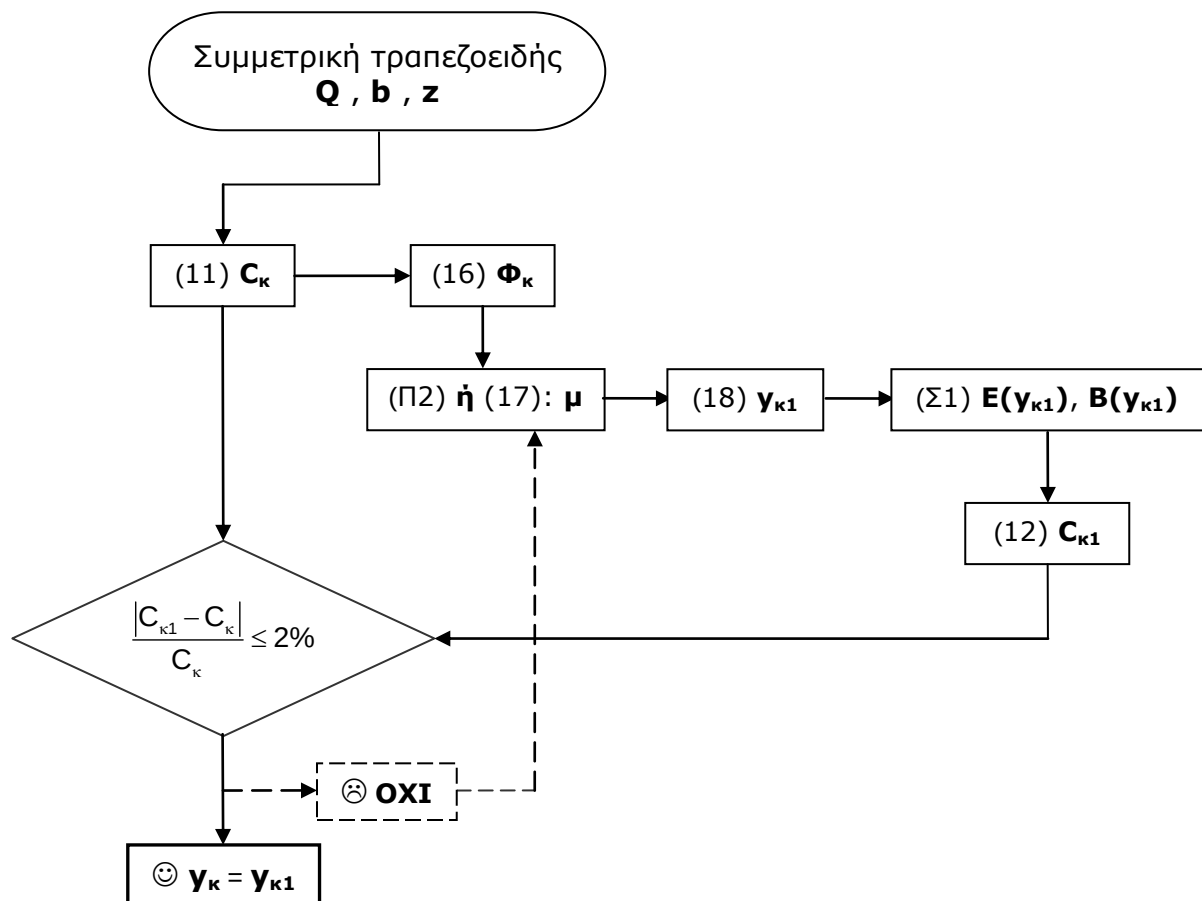
όπου: $a = -0,04 \cdot (\log \Phi_{\kappa})^2 + 0,54 \cdot (\log \Phi_{\kappa}) - 0,113 \quad (17\alpha)$

Στη **συνέχεια** – και στις δύο διαδικασίες

- Υπολογίζουμε το $y_{κ1} = \frac{b}{z} \cdot \mu$ (18)
- Υπολογίζουμε από τον πίνακα **Σ1** τα γεωμετρικά μεγέθη **E(y_{κ1})** και **B(y_{κ1})**
- Υπολογίζουμε το στοιχείο $\frac{E^3(y_{κ1})}{B(y_{κ1})} = C_{κ1}$ (12)
- Ελέγχουμε - επαληθεύουμε $\frac{|C_{κ1} - C_κ|}{C_κ} \leq 2\%$ (13)
- Τυποποίηση και Διάγραμμα ροής ισχύουν και για τις δύο διαδικασίες:

Q [m ³ /s]	b [m]	z	C_κ	Φ_κ	μ	y_{κ1} [m]

y_{κ1} [m]	E(y_{κ1}) [m ²]	B(y_{κ1}) [m]	C_{κ1}	δC [%]	y_κ [m]



- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις **H_{Eminimum}** , **M_{minimum}** από τις (4) και (8)

2.3.6 Τραπεζοειδής Μη - συμμετρική με πλάτος **b** και κλίσεις πρανών **z₁** , **z₂**

Εφαρμόζονται οι ως άνω δύο **διαδικασίες επίλυσης** με **χρήση Πίνακα** ή **προσεγγιστικής σχέσης**:

- Μορφώνουμε αρχικώς το μ.ο. $\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$

- Υπολογίζουμε αρχικώς τα $C_{\kappa} = \frac{Q^2}{g}$ (11)

και τα δύο Φ_{κ} : $\Phi_{\kappa 1} = (C_{\kappa})^{1/2} \cdot \frac{z_1^{1,5}}{b^{2,5}}$, $\Phi_{\kappa 2} = (C_{\kappa})^{1/2} \cdot \frac{z_2^{1,5}}{b^{2,5}}$ (16)

μέσω πίνακα

- Εντοπίζουμε τα δύο Φ_{κ} στον πίνακα **Π2**
- Διαβάζουμε τα δύο μ στις αντίστοιχες - **αμέσως αριστερά** - στήλες (ή το **μ.ο.** ανάμεσα σε δύο γραμμές, ΔΕΝ παιδευόμαστε με ακριβή παρεμβολή!)

προσεγγιστική σχέση όταν είναι: $0,017 \leq \Phi_{\kappa 1} , \Phi_{\kappa 2}$

- Υπολογίζουμε τα δύο μ : $\mu_1 = 10^{a_1}$, $\mu_2 = 10^{a_2}$ (17), όπου:

$$a_1 = -0,04 \cdot (\log \Phi_{\kappa 1})^2 + 0,54 \cdot (\log \Phi_{\kappa 1}) - 0,113 \quad (17a)$$

$$a_2 = -0,04 \cdot (\log \Phi_{\kappa 2})^2 + 0,54 \cdot (\log \Phi_{\kappa 2}) - 0,113 \quad (17a)$$

Στη **συνέχεια** – και στις **δύο** διαδικασίες

- Υπολογίζουμε τα δύο y_{κ} : $y_{\kappa 11} = \frac{b}{z_1} \cdot \mu_1$, $y_{\kappa 12} = \frac{b}{z_2} \cdot \mu_2$ (18)

- Μορφώνουμε το μ.ο. $y_{\kappa 1} = \frac{y_{\kappa 11} + y_{\kappa 12}}{2}$

- Υπολογίζουμε από τον πίνακα **Σ1** τα γεωμετρικά μεγέθη **E(y_{κ1})** και **B(y_{κ1})**:

$$E(y_{\kappa 1}) = (b + \bar{z} \cdot y_{\kappa 1}) \cdot y_{\kappa 1} \quad \text{και} \quad B(y_{\kappa 1}) = b + 2 \cdot \bar{z} \cdot y_{\kappa 1}$$

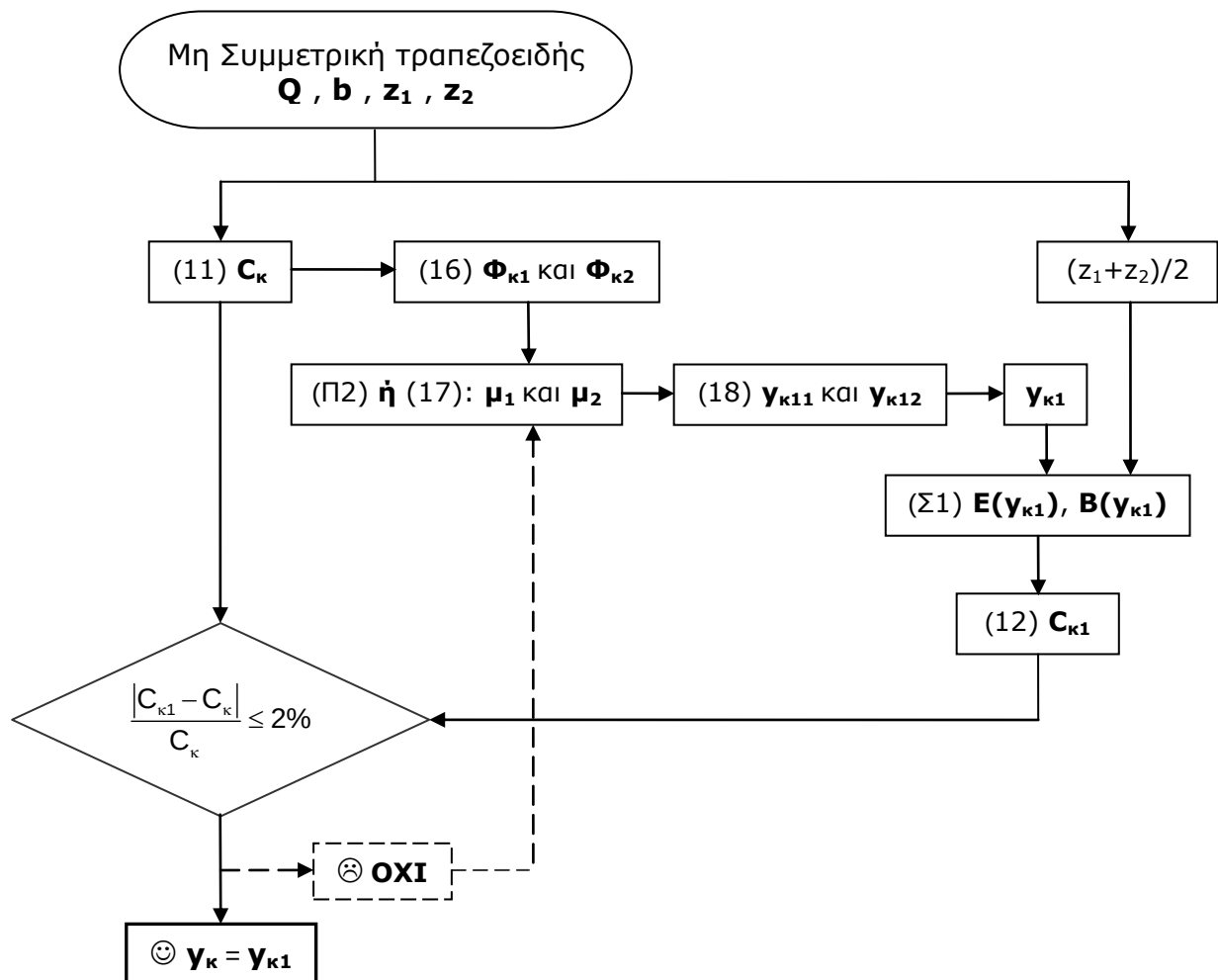
- Υπολογίζουμε το στοιχείο $\frac{E^3(y_{\kappa 1})}{B(y_{\kappa 1})} = C_{\kappa 1}$ (12)

- Ελέγχουμε – επαληθεύουμε: $\frac{|C_{κ1} - C_κ|}{C_κ} \leq 2\%$ (13)

- Τυποποίηση και Διάγραμμα ροής ισχύουν και για τις δύο διαδικασίες:

Q [m ³ /s]	b [m]	z_n	$\bar{z}$	$C_κ$	$\Phi_{κn}$	μ_n	$y_{κ1n}$ [m]	$y_{κ1}$ [m]

$y_{κ1}$ [m]	$E(y_{κ1})$ [m ²]	$B(y_{κ1})$ [m]	$C_{κ1}$	δC [%]	$y_κ$ [m]



- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις $H_{Eminimum}$, $M_{minimum}$ από τις (4) και (8)

2.3.7 Κυκλική με διάμετρο d

Προτείνονται δύο **διαδικασίες επίλυσης με χρήση Πίνακα ή προσεγγιστικής σχέσης**:

- Η **μέσω πίνακα** διαδικασία βασίζεται στη χρήση του Πίνακα **Π3**.
- Η **αριθμητική** διαδικασία βασίζεται στη χρήση προσεγγιστικής σχέσης. Η σύγκλιση με βάση την (13) εξασφαλίζεται!

- Υπολογίζουμε **αρχικώς** τα $C_{\kappa} = \frac{Q^2}{g}$ (11) και $f(\theta_{\kappa}) = \frac{C_{\kappa}}{d^5}$ (19)

μέσω πίνακα

- Εντοπίζουμε το $f(\theta_{\kappa})$ στον πίνακα **Π3**
- Διαβάζουμε το $y_{\kappa 1}/d$ στην **1^η αριστερή** στήλη (ή το **μ.ο.** ανάμεσα σε δύο γραμμές, ΔΕΝ παιδευόμαστε με ακριβή παρεμβολή!)

προσεγγιστική σχέση όταν είναι: $0,00010 \leq f(\theta_{\kappa}) \leq 0,28500$

- Υπολογίζουμε το $y_{\kappa 1}/d$: $\frac{y_{\kappa 1}}{d} = 10^a$ (20),

όπου: $a = 0,2575 \cdot (\log f(\theta_{\kappa})) + 0,0125$ (20a)

Στη **συνέχεια – και στις δύο** διαδικασίες στον πίνακα **Π3**

- Διαβάζουμε στις αντίστοιχες - **προς τα δεξιά** - στήλες τα $E(y_{\kappa 1})/d^2$ και $B(y_{\kappa 1})/d$
- Υπολογίζουμε τα $E(y_{\kappa 1})$ και $B(y_{\kappa 1})$

- Υπολογίζουμε το στοιχείο $\frac{E^3(y_{\kappa 1})}{B(y_{\kappa 1})} = C_{\kappa 1}$ (12)

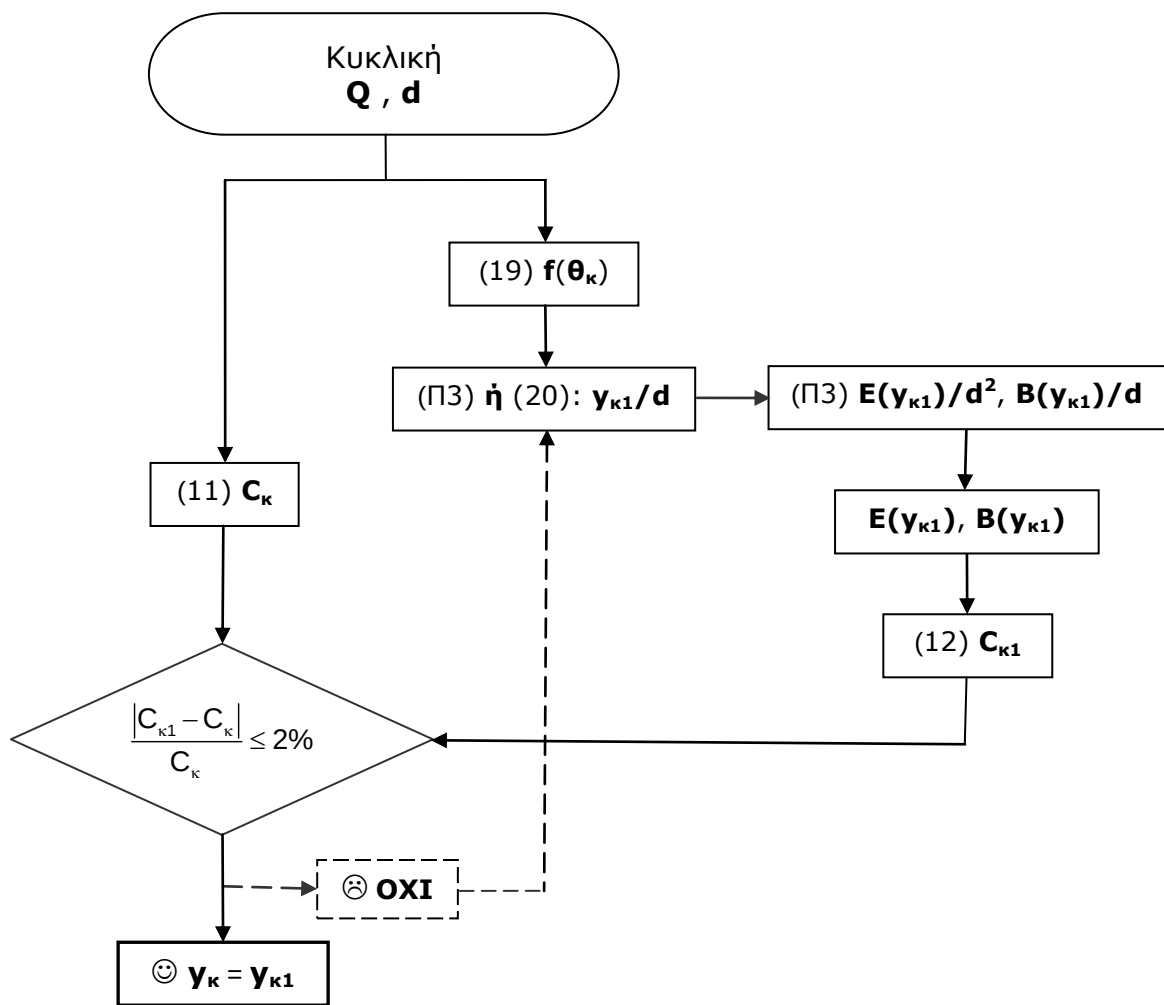
- Ελέγχουμε – επαληθεύουμε: $\frac{|C_{\kappa 1} - C_{\kappa}|}{C_{\kappa}} \leq 2\%$ (13) $\rightarrow y_{\kappa} = \frac{y_{\kappa 1}}{d} \cdot d$

- Τυποποίηση και Διάγραμμα ροής ισχύουν και για τις δύο διαδικασίες:

Q [m^3/s]	d [m]	C_{κ}	$f(\theta_{\kappa})$	$y_{\kappa 1}/d$

$E(y_{\kappa 1})/d^2$	$E(y_{\kappa 1})$ [m^2]	$B(y_{\kappa 1})/d$	$B(y_{\kappa 1})$ [m]	$C_{\kappa 1}$	δC [%]	y_{κ} [m]

- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις $H_{E_{\text{minimum}}}$, M_{minimum} από τις (4) και (8)



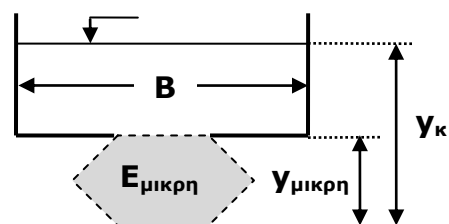
2.3.8 Σύνθετη - γεωμετρική διατομή

- Προσδιορίζουμε εάν το κρίσιμο βάθος εμφανίζεται στη **μικρή** διατομή, θέτοντας το γεωμετρικό βάθος $\gamma_{μικρή}$ της **μικρής** διατομής ως γ_{κ} και υπολογίζοντας την

προκύπτουσα παροχή: $Q_{κμικρη} = E_{μικρη} \cdot (g \cdot \gamma_{μμικρη})^{1/2}$ (21)

- ο **Προσοχή**: Στην (21) χρησιμοποιείται το **υδραυλικό βάθος** $\gamma_{μμικρη}$ ☹, το οποίο λαμβάνεται από τον πίνακα **Σ1** αναλόγως με τη μορφή της **μικρής** διατομής.
- ο Εάν $Q_{κμικρη} > Q$, τότε η ροή με κρίσιμο βάθος πραγματοποιείται στη **μικρή** διατομή και ακολουθείται η **αντίστοιχη** της **γεωμετρίας** της διαδικασία 🎵
- ο Εάν $Q_{κμικρη} < Q$, τότε η ροή με κρίσιμο βάθος πραγματοποιείται στη **σύνθετη** διατομή και ακολουθούνται οι παρακάτω διαδικασίες **αναλόγως** του εάν η **μεγάλη** διατομή είναι **ορθογωνική** ή **όχι**:

Μεγάλη διατομή **ορθογωνική**
- **απ' ευθείας** λύση 🎵



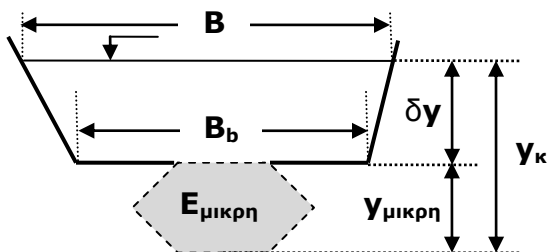
- Υπολογίζουμε το y_{κ} :
$$y_{\kappa} = \left(\frac{Q^2}{B^2 \cdot g} \right)^{1/3} + \left(y_{\text{μικρη}} - \frac{E_{\text{μικρη}}}{B} \right) \quad (22)$$

- Τυποποίηση διαδικασίας:

Q [m ³ /s]	$E_{\text{μικρη}}$ [m ²]	B [m]	$y_{\text{μικρη}}$ [m]	$Q_{\text{μικρη}}$ [m ³ /s]	έλεγχος	y_{κ} [m]

- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις $H_{\text{Εminimum}}$, M_{minimum} από τις (4) και (8)

Μεγάλη διατομή **τραπεζοειδής, συμμετρική ή μη - συμμετρική**



- Υπολογίζουμε αρχικώς το $C_{\kappa} = \frac{Q^2}{g}$ (11)
- Υπολογίζουμε την αρχική τιμή δy_s (ως εάν η μεγάλη διατομή είναι ορθογωνική)

$$\delta y_s = \frac{(C_{\kappa} \cdot B_b)^{1/3} - E_{\text{μικρη}}}{B_b} \quad (23)$$

- Υπολογίζουμε το δy_1 :

Συμμετρική με κλίση πρανών z

$$\delta y_1 = \frac{[C_{\kappa} \cdot (B_b + 2 \cdot z \cdot \delta y_s)]^{1/3} - E_{\text{μικρη}}}{B_b + z \cdot \delta y_s} \quad (24)$$

Μη - συμμετρική με κλίσεις πρανών z_1 και z_2

$$\delta y_1 = \frac{[C_{\kappa} \cdot (B_b + (z_1 + z_2) \cdot \delta y_s)]^{1/3} - E_{\text{μικρη}}}{B_b + \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \delta y_s} \quad (24a)$$

- Υπολογίζουμε το $y_{\kappa 1} = \delta y_1 + y_{\text{μικρη}}$ (25)
- Υπολογίζουμε από τον πίνακα $\Sigma 1$ τα γεωμετρικά μεγέθη $E(y_{\kappa 1})$ και $B(y_{\kappa 1})$

- Υπολογίζουμε το στοιχείο $\frac{E^3(y_{\kappa 1})}{B(y_{\kappa 1})} = C_{\kappa 1}$ (12)

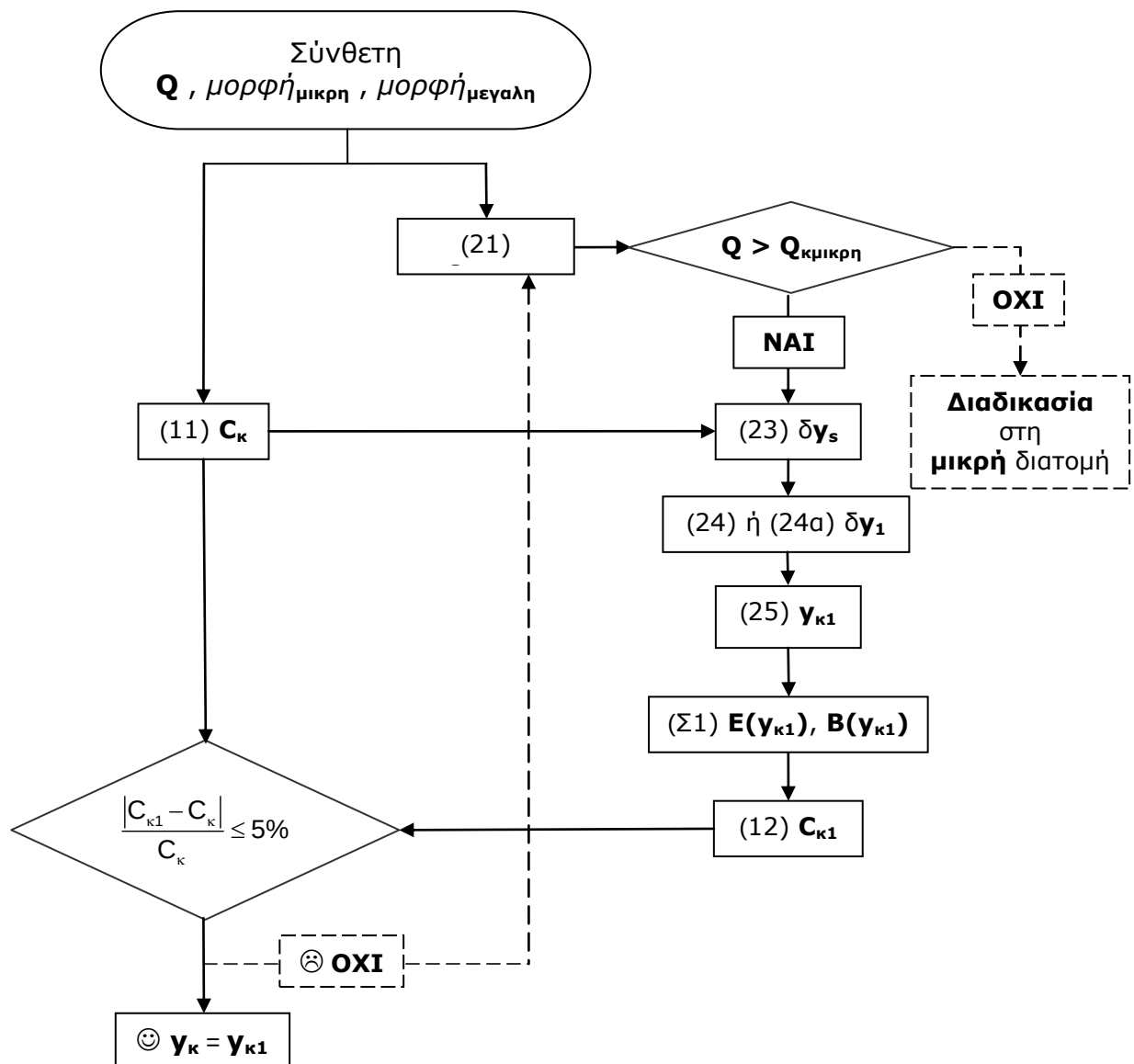
- Ελέγχουμε – επαληθεύουμε: $\frac{|C_{κ1} - C_κ|}{C_κ} \leq 3\%$ (13)

- Τυποποίηση και Διάγραμμα ροής διαδικασίας:

Q [m^3/s]	$E_{μικρη}$ [m^2]	$y_{μικρη}$ [m]	$Q_{κμικρη}$ [m^3/s]	έλεγχος	$C_κ$

B_b [m]	z_1	δy_s [m]	δy_1 [m]	$y_{κ1}$ [m]
	z_2			

$E(y_{κ1})$ [m^2]	$B(y_{κ1})$ [m]	$C_{κ1}$	δC [%]	$y_κ$ [m]



- Ενδεχομένως υπολογίζουμε και τις $H_{Εminimum}$, $M_{minimum}$ από τις (4) και (8)

2.3.9 Φυσική – τυχαία διατομή ∇ (ύλη 7^{ου} εξαμήνου)

- Προσεγγίζουμε τη διατομή με απλές γεωμετρικές διατομές
- Υπολογίζουμε σε κάθε μία από αυτές τα $\mathbf{E}_n(\mathbf{y}_\kappa)$ και $\mathbf{B}_n(\mathbf{y}_\kappa)$ - Πίνακας $\Sigma 1$
- Κατασκευάζουμε διάγραμμα $\{y_{\kappa 1} \uparrow, (C_{\kappa 1})^{1/2} \rightarrow\}$, όπου: $\frac{E^3(y_{\kappa 1})}{B(y_{\kappa 1})} = C_{\kappa 1}$ (12)
- Υπολογίζουμε το $C_\kappa = \frac{Q^2}{g}$ (11) $\rightarrow (C_{\kappa 1})^{1/2} = \frac{Q}{\sqrt{g}}$
- Τοποθετούμε την τιμή του $(C_\kappa)^{1/2}$ στο διάγραμμα και λαμβάνουμε το $\mathbf{y}_\kappa$

