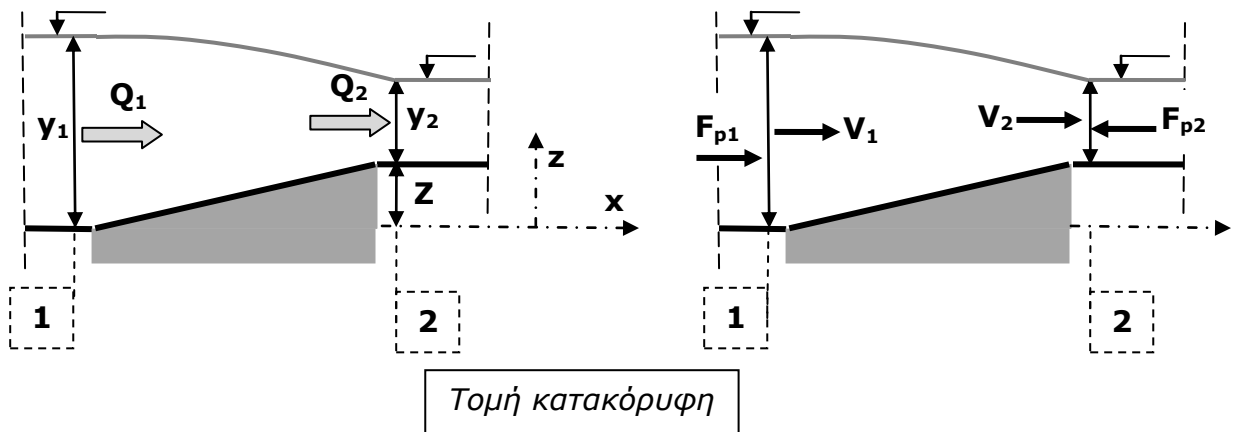


$$\left(h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \right) = \left(h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \right) + \left(\pm \frac{1}{\gamma \cdot Q} \frac{\delta W_\mu}{dt} + \left[\frac{I_2 - I_1}{g} - \frac{1}{\gamma \cdot Q} \frac{\delta Q^*}{dt} \right] \right) \quad (57\gamma) \text{ (Ενδιάμεση μορφή)}$$

$$H_1 = H_2 \mp H_\mu + \Delta H_{\alpha(1-2)} \quad (57\delta) \rightarrow \text{Χρηστική μορφή}$$

$$H_i = h_i + \frac{p_i}{\gamma} + \alpha_i \frac{V_i^2}{2 \cdot g}$$

- Στις σχέσεις (57γ) και (57δ) οι όροι εκφράζουν **ενέργεια ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού** και έχουν διαστάσεις μήκους (βλ. 5.1.4).
 - H_i : Μέσο ύψος μηχανικής ενέργειας (σε κάθε διατομή)
 - h_i : Ύψος δυναμικής ενέργειας λόγω θέσης (σε κάθε διατομή)
 - $\frac{p_i}{\gamma}$: Ύψος πίεσης (σε κάθε διατομή)
 - $\alpha_i \frac{V_i^2}{2 \cdot g}$: Ύψος κινητικής ενέργειας (σε κάθε διατομή)
 - $\Delta H_{\alpha(1-2)}$: Απώλειες μηχανικής ενέργειας (μεταξύ δύο διατομών)
 - H_μ : Μηχανικό έργο – Μανομετρικό ύψος υδραυλικής μηχανής (βλ. 5.4.3).
 - Προσλαμβάνεται στο σύστημα (-) από **αντλία**.
 - Αποδίδεται από το σύστημα (+) από **στρόβιλο**.
- Η σχέση (57δ) γράφεται για όλους τους συνδυασμούς ζευγών του πλήθους n διατομών εισόδου / εξόδου:
 - Προκύπτουν n εξισώσεις!
 - Όμως, στην επίλυση του συστήματος είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε μόνο **$n-1$** (οιεσδήποτε) εξισώσεις $\bullet^*$, (διότι είναι *συνδεδεμένες* - μία προκύπτει από τις υπόλοιπες).
- Η **εφαρμογή** της εξίσωσης ενέργειας **διαφέρει** στις διαφορετικές **μορφές ροής**, διότι **διαφέρουν** οι **κατανομές** των **πιέσεων** $\propto$
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** υπό **Πίεση**:
 - Το ύψος δυναμικής ενέργειας εκφράζεται από την απόσταση z_i του **άξονα** της **διατομής** από το επίπεδο αναφοράς.
 - Το ύψος πίεσης εκφράζεται από το λόγο της αντιπροσωπευτικής πίεσης p_i προς το ειδικό βάρος.
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** με **Ελεύθερη Επιφάνεια**:



- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς**:
 - Στερεά όρια = πυθμένας, κατακόρυφα τοιχώματα και ελεύθερη επιφάνεια.
 - Διατομή εισόδου η διατομή **1** και εξόδου η διατομή **2**, **όχι** οι **ακραίες** διατομές της συναρμογής (και του ειδικού στοιχείου σκυροδέματος)! ☹️
 - Διότι **δεν** είναι διατομές **ομοιόμορφης ροής**! ☹️
 - Εκεί τα βάθη ροής είναι **άγνωστα** και η κατανομή των πιέσεων **δεν** είναι **υδροστατική**! ☹️
 - Σε αντίθεση με την 5.3.2 είμαστε υποχρεωμένοι να συμβιβαστούμε και να περιλάβουμε δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται απευθείας στους αγωγούς.
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**:
 - Άξονας x, ο άξονας του αγωγού, άξονας z κατακόρυφος - κάθετος στον x.
 - Επίπεδο αναφοράς οριζόντιο, αυτό το οποίο ορίζεται από τον πυθμένα του αγωγού ανάντη της συναρμογής.
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 = Q_1 - Q_2 = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2$$

$$\rightarrow z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\bar{V}_1 \cdot Q_1) - (\bar{V}_2 \cdot Q_2) \right] = \sum_1^2 (\bar{F}_{pi}) + \bar{F}_g + \bar{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot \left[(V_1 \cdot Q_1) - (V_2 \cdot Q_2) \right] = (\gamma \cdot \tilde{y}_1 \cdot E_1) - (\gamma \cdot \tilde{y}_2 \cdot E_2) + N_x$$

Άγνωστα μεγέθη: $E_1, \tilde{y}_1, V_1, Q_1, E_2, \tilde{y}_2, V_2, Q_2, N_x$

Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{E_1}, V_2 = \frac{Q_2}{E_2}, \text{ όπου: } E_1 = (b + y_1) \cdot y_1 \text{ και } E_2 = b \cdot y_2$$

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = Z + y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \text{ (διότι } z_1 = 0 \text{ και } z_2 = Z)$$

$$\rightarrow Q_1 = \left[\frac{2 \cdot g \cdot (y_1 - y_2 - Z)}{E_1^2 - E_2^2} \right] \cdot E_1 \cdot E_2$$

$$\rightarrow N_x = \frac{\gamma \cdot Q_1^2 \cdot (E_1 - E_2)}{g \cdot E_1 \cdot E_2} - (\gamma \cdot \tilde{y}_1 \cdot E_1) + (\gamma \cdot \tilde{y}_2 \cdot E_2)$$

$$\text{όπου: } \tilde{y}_1 = \frac{(3 \cdot b + 2 \cdot y_1) \cdot y_1}{6 \cdot (b + y_1)} \text{ και } \tilde{y}_2 = \frac{y_2}{2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$E_1 = 3,840 \text{ m}^2 \text{ και } E_2 = 1,720 \text{ m}^2$$

$$Q_1 = Q_2 = 3,996825 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V_1 = 1,040840 \text{ m /s και } V_2 = 2,323736 \text{ m /s}$$

$$\tilde{y}_1 = 0,525 \text{ m και } \tilde{y}_2 = 0,430 \text{ m}$$

$$N_x = - 0,753718 \text{ t}$$

$$\rightarrow N'_x = + 0,753718 \text{ t} = + 7,394 \text{ kN}$$

(οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στο ειδικό στοιχείο σκυροδέματος)

- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 = Q_1 - Q_2 = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2$$

$$\rightarrow z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V}_1 \cdot \vec{Q}_1) - (\vec{V}_2 \cdot \vec{Q}_2) \right] = \sum_1^2 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot \left[(V_1 \cdot Q_1) - (V_2 \cdot Q_2) \right] = (\gamma \cdot \tilde{y}_1 \cdot E_1) - (\gamma \cdot \tilde{y}_2 \cdot E_2) + N_x$$

Άγνωστα μεγέθη: $E_1, \tilde{y}_1, V_1, E_2, \tilde{y}_2, V_2, Q_2, b_2, N_x$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{E_1}, V_2 = \frac{Q_1}{E_2}, \text{ όπου: } E_1 = b_1 \cdot y_1 \text{ και } E_2 = b_2 \cdot y_2$$

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \text{ (διότι } z_1 = z_2 = 0)$$

$$\rightarrow y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} = y_2 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_2^2 \cdot y_2^2}$$

$$\rightarrow y_2^3 - \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right) \cdot y_2^2 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_2^2} = 0$$

$$\rightarrow y_2^3 - 1,203887 \cdot y_2^2 + 0,203874 = 0$$

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4 **Προτείνεται** ως μέθοδος!

Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: $y_2^3 - 1,203887 \cdot y_2 + 0,203874 = 0$

a	b	c	d
1	-1,203887	0	0,203874

$$(17) \rightarrow y_{2v+1} = y_v - \frac{y_{2v}^3 - 1,203887 \cdot y_{2v}^2 + 0,203874}{3 \cdot y_{2v}^2 - 2,407774 \cdot y_{2v}}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το **<+0,203874>** $\rightarrow y_{21} = 1,203887$

(Επί της ουσίας σημαίνει ότι, έχουμε αμελήσει τον όρο κινητικής ενέργειας $\frac{V_2^2}{2 \cdot g}$)

y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
1,203887	1,063221	1,009260	1,000270 ✓

→ $y_2 = 1,00$ m. Ο περιορισμός $y_2 > 0,74$ καλύπτεται.

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3 **ΔΕΝ προτείνεται** ως μέθοδος!

A	B	C	D	p	q	Δ
1	-1,203887	0	0,203874	-0,161038	0,037313	-0,002784 < 0

$\cos \varphi$	φ	y_{21}	y_{22}	y_{23}
-0,577384	125,266730	1,000023	0,564813	-0,360949

→ $y_2 = 1,00$ m. Ο περιορισμός $y_2 > 0,74$ καλύπτεται.

Ενώ δεν καλύπτεται για την επίσης θετική ρίζα: **0,564813** * (βλ. 5.2.6).

- Συνεχίζουμε με το ερώτημα 2.

$$\text{Εξίσωση ενέργειας: } y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} = y_2 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_2^2 \cdot y_2^2}$$

- ο Η ενέργεια στη διατομή **1** είναι **σταθερή** και **δεδομένη**.
- ο Η ενέργεια στη διατομή **2** είναι ίση με την προηγούμενη, άρα είναι **σταθερή** αλλά, αποτελεί συνάρτηση των μεταβλητών (αγνώστων) **y_2 και b_2** !

$$\text{Η παράγωγός της εξίσωσης ενέργειας: } y_2 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_2^2 \cdot y_2^2} - \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right) = 0$$

$$\text{δηλαδή της } y_2^3 - \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right) \cdot y_2^2 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_2^2} = 0, \text{ ως προς } y_2 \text{ είναι:}$$

$$3 \cdot y_2^2 - 2 \cdot \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right) \cdot y_2 \text{ και ο μηδενισμός της μας δίνει τις οριακές τιμές:}$$

$$3 \cdot y_2^{*2} - 2 \cdot \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right) = 0 \rightarrow y_2^* = \frac{2}{3} \cdot \left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right)$$

$$\text{και } b_{2\min} = \left(\frac{3,375}{g} \right)^{1/2} \cdot \frac{Q_1}{\left(y_1 + \frac{Q_1^2}{2 \cdot g \cdot b_1^2 \cdot y_1^2} \right)^{3/2}}$$

Συνεχίζουμε με το ερώτημα 3.

$$\rightarrow N_x = \frac{\gamma \cdot Q_1^2 \cdot (E_1 - E_2^*)}{g \cdot E_1 \cdot E_2^*} - (\gamma \cdot \tilde{y}_1 \cdot E_1) + (\gamma \cdot \tilde{y}_2^* \cdot E_2^*) \text{ όπου: } \tilde{y}_1 = \frac{y_1}{2} \text{ και } \tilde{y}_2^* = \frac{y_2^*}{2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$E_1 = 3,322200 \text{ m}^2 \text{ και } V_1 = 1,204021 \text{ m/s}$$

$$y_2 = 1,00 \text{ m}$$

$$E_2 = 2,000046 \text{ m}^2 \text{ και } V_2 = 1,999954 \text{ m/s}$$

$$y_2^* = 0,802591 \text{ m και } b_{2\min} = 1,776166 \text{ m}$$

$$\tilde{y}_1 = 0,565 \text{ m και } \tilde{y}_2^* = 0,500 \text{ m}$$

$$N_x = -0,552548 \text{ t}$$

$$\rightarrow N'_x = +0,552548 \text{ t} = +5,028 \text{ kN}$$

(οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στη *συναρμογή*)

5.3.9 Η εφαρμογή αφορά σε συνδυασμό Ροής με Ελεύθερη Επιφάνεια και Ροής υπό Πίεση

Αγωγός κυκλικής διατομής με διάμετρο **D** σχεδιάζεται με οριζόντιο πυθμένα (μηδενική κατά μήκος κλίση), μεταφέρει νερό με παροχή **Q₁** και καταλήγει σε *φρεάτιο*. Κατάντη του *φρεατίου* η παροχή διοχετεύεται σε αγωγό κυκλικής διατομής με διάμετρο **D** και οριζόντιο πυθμένα.

Το βάθος ομοιόμορφης ροής στη διατομή **1** – ολίγον ανάντη του *φρεατίου* είναι **y₁**. Ολίγον κατάντη του *φρεατίου*, σε διατομή ομοιόμορφης ροής **2**, είναι τοποθετημένο απλό πιεζόμετρο, του οποίου η ένδειξη - εκτός του αγωγού - είναι **h** (βλ. σχήμα).

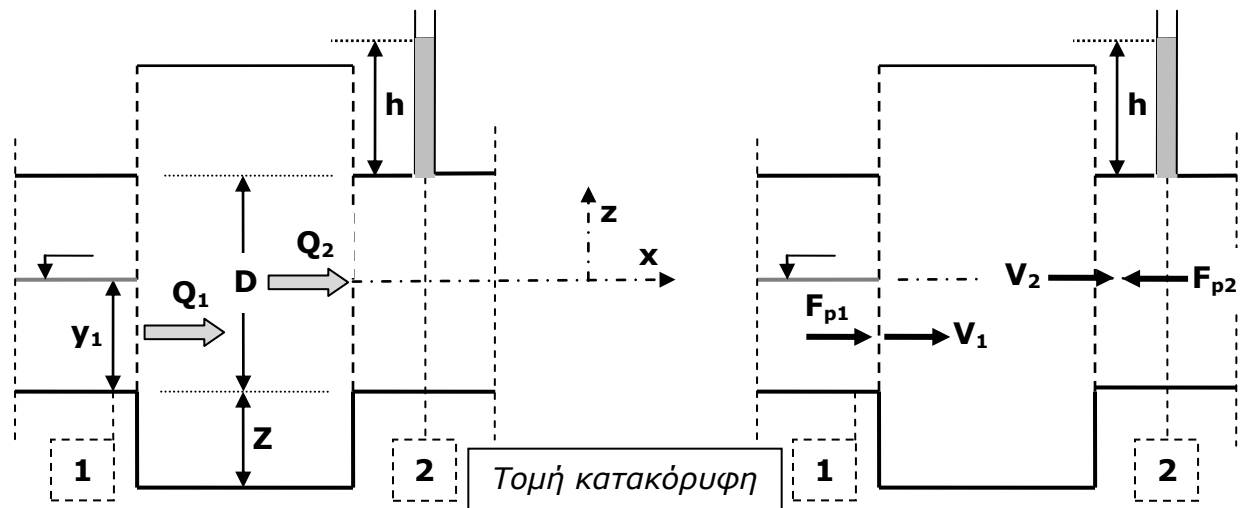
Οι απώλειες ενέργειας μεταξύ της διατομής εισόδου και της διατομής εξόδου δίδονται από τη σχέση: $\Delta H_{1-2} = V_2^2 / 4 \cdot g$.

Θεωρούμε όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα.

Ζητούνται να υπολογιστούν:

1. Η ένδειξη **h** στο πιεζόμετρο.
2. Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης, οποία ασκείται στο *φρεάτιο*.

Αριθμητική εφαρμογή: **Q₁ = 4,5 m³/s, D = 1,5 m, y₁ = 0,75 m, Z = 0,75 m.**



Αριθμητική εφαρμογή:

$$E_1 = 0,883573 \text{ m}^2, V_1 = 5,092958 \text{ m/s}, E_2 = 1,767146 \text{ m}^2, V_2 = 2,546479 \text{ m/s}$$

$$h = 0,076269 \text{ m}$$

$$\gamma_1 = 0,318310 \text{ m και } p_2 = 0,796269 \text{ t/m}^2$$

$$N_x = -0,010777 \text{ t}$$

$$\rightarrow N'_x = +0,010777 \text{ t} = +0,106 \text{ kN}$$

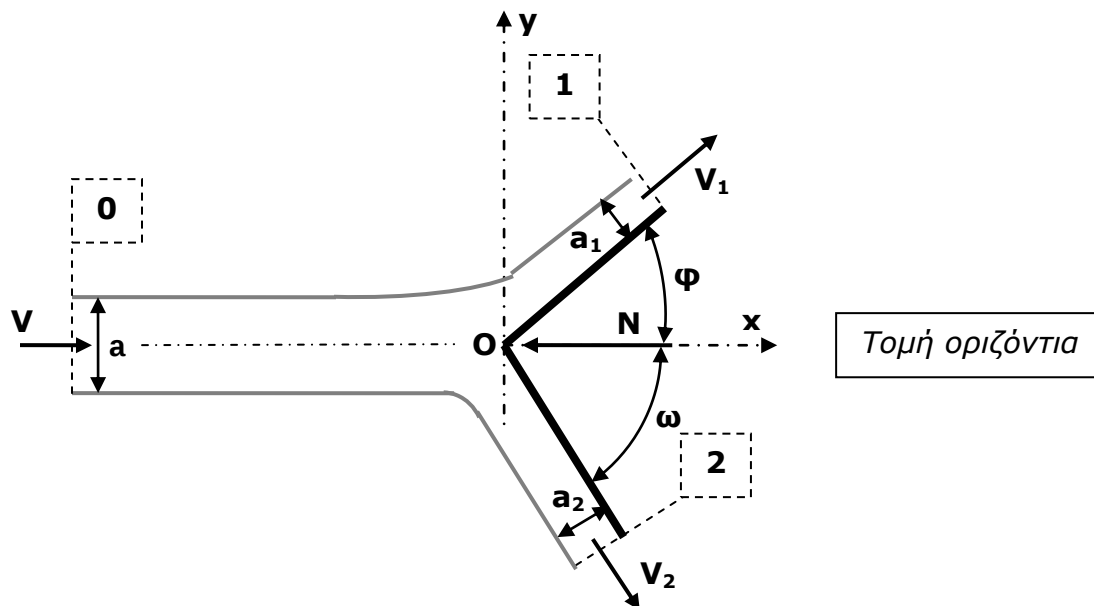
(οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στο φρεάτιο)

5.3.10 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή δισδιάστατης Φλέβας στην Ατμόσφαιρα

4.1 Δισδιάστατο πτερύγιο, μορφής L με γωνία 90° , σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται εκτοξευόμενη δισδιάστατη φλέβα νερού πάχους a , με ταχύτητα V . Με δεδομένο ότι η συνολική αντίδραση N της στήριξης του πτερυγίου είναι ομοαξονική με τη φλέβα (βλ. σχήμα), αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, ζητούνται:

1. Να υπολογιστούν τα πάχη των φλεβών a_1 και a_2 συναρτήσει των a , φ και ω .
2. Να υπολογιστεί η αντίδραση της στήριξης N (ανά μέτρο πλάτους καθέτως στο οριζόντιο επίπεδο).
3. Αν το πτερύγιο μπορεί να στραφεί περί το O, παραμένοντας απαραμόρφωτο, να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της αντίδρασης $N'_{\max}$ και οι αντίστοιχες (ως προς τον άξονα της φλέβας) γωνίες, όπου αυτή εμφανίζεται.

Αριθμητική εφαρμογή : $a = 45 \text{ cm}$, $V = 3,5 \text{ m/s}$, $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 60^\circ$.



$$\rightarrow V_1 \cdot q_1 \cdot \sin \phi - V_2 \cdot q_2 \cdot \sin \omega = 0 \rightarrow a_1 = \frac{\sin \omega}{\sin \omega + \sin \phi} \cdot a \text{ και } a_2 = \frac{\sin \phi}{\sin \omega + \sin \phi} \cdot a$$

$$\rightarrow N = N_x = -\frac{\gamma \cdot V^2 \cdot a}{g} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin \omega + \cos \omega}\right)$$

Συνεχίζουμε με το ερώτημα 3.

Πρέπει να μεγιστοποιηθεί ο όρος $\sin \omega + \cos \omega$

Παραγωγίζοντας: $\cos \omega - \sin \omega = 0 \rightarrow \tan \omega = 1 \rightarrow \omega = \varphi = 45^\circ$

$$\rightarrow N_{\max} = N_{x\max} = -\frac{\gamma \cdot V^2 \cdot a}{g} \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sin 45^\circ}\right)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_1 = V_2 = V = 3,5 \text{ m/s}$$

$$a_1 = 0,285289 \text{ cm και } a_2 = 0,164711 \text{ cm}$$

$$q_0 = 1,575000 \text{ m}^2/\text{s}, q_1 = 0,998512 \text{ m}^2/\text{s} \text{ και } q_2 = 0,576488 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$N_x = -0,150568 \text{ t/m και } N_y = 0$$

$$\rightarrow N'_x = +0,150568 \text{ t/m και } N'_y = 0 \text{ (συνιστώσες της δύναμης στο πτερύγιο)}$$

$$\rightarrow N' = +0,150568 \text{ t/m} = 1,477 \text{ kN/m}$$

$$N_{x\max} = -0,164584 \text{ t/m}$$

$$\rightarrow N'_{\max} = +0,164584 \text{ t} = 1,615 \text{ kN/m και } \omega = \varphi = 45^\circ$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη **διαφορική εξίσωση**:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

Προσοχή: Στην περίπτωση υποπίεσης η εκροή τερματίζεται με βάση την (152) ☹

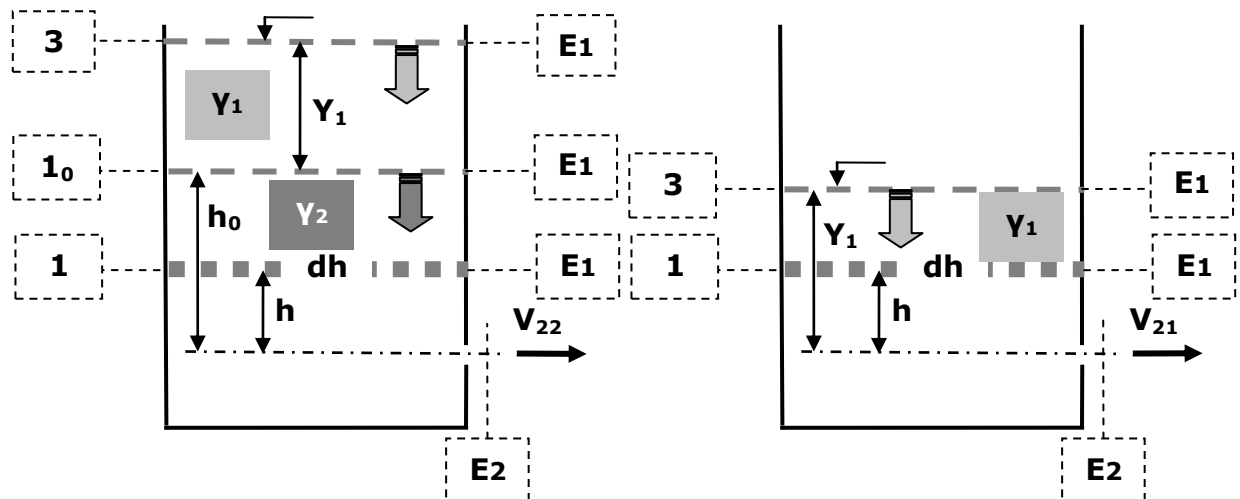
$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{\left(h \pm \frac{p_1}{\gamma}\right)^{1/2}} = \quad (155)$$

Για **πλήρη εκκένωση** σε περίπτωση υπερπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

Για **οριακή εκκένωση** σε περίπτωση υποπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h^*\}$

8.7.8 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παράλλαξη V - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, d, e, f ΟΧΙ η c**.
Στη δεξαμενή υπάρχουν **δύο στρώσεις** υγρού με διαφορετικά ειδικά βάρη γ_1 και γ_2 . Στη διατομή **1₀** (και προφανώς στην εκάστοτε **1**) ασκείται **σταθερή πίεση p₁** από την πάνω στρώση ύψους Y_1 .
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma_2} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{22}^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_{22}(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma_2}\right)^{1/2} \quad (156)$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b** και **d** και **ΟΧΙ η c** ☹)

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{21}^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_{21}(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν πλέον **όλες** οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **a**, **b** και **d** **ΚΑΙ** η **c** ☹)

$$Q_{22}(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} \quad (157)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_{22}(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } h_0 \geq h \geq 0$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_{21}(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } Y_1 \geq h \geq 0$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **e** και **f**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(157) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{\left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma_2} \right)^{1/2}} \quad (158) \text{ για } h : h_0 \rightarrow 0, t : 0 \rightarrow T_2$$

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138) \text{ για } h : Y_1 \rightarrow 0, t : 0 \rightarrow T_1$$

Όπου η σταθερά είναι ίδια και στα δύο πεδία: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(με **προσοχή** στα όρια - στάθμες ☹)

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_c}^{h_D} \frac{dh}{\left(h \pm \frac{p_1}{\gamma} \right)^{1/2}} = \quad (159)$$

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

Για **πλήρη εκκένωση** της **κάτω στρώσης** του υγρού **γ₂** είναι: **{h_c= h₀ , h_D= 0}**

Για **πλήρη εκκένωση** της **άνω στρώσης** του υγρού **γ₁** είναι: **{h_A= Y₁ , h_B= 0}**

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: **T = T₂ + T₁**

- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **a**, **b**, **c** και **d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \pm Q_1 \quad (165)$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση**: **f** αλλά **όχι** η **e** ☹)

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή το πρόσημο της **Q₁** είναι **(+)**

Στην περίπτωση **εκροής** παροχής από τη δεξαμενή το πρόσημο της **Q₁** είναι **(-)**

- Μορφώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow \frac{dh}{dt} = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \pm \frac{E_1 \cdot h}{Q_1} \quad (166)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή (**αναπλήρωσης**) η **φορά κίνησης** της **στάθμης εξαρτάται** από τη **σχέση** της **εισροής Q₁** και της **εκροής Q₂(h)** ☹
και υπάρχει μια **στάθμη ισορροπίας h[#]**, η οποία προκύπτει όταν **Q₁ = Q₂(h[#])**!

$$\rightarrow h^{\#} = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{Q_1}{c_2 \cdot E_2} \right)^2 \quad (167)$$

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ < Q₂(h₀)**, η **στάθμη** θα **κατέβει** και θα **ισορροπήσει** στο **h[#]**!

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ > Q₂(h₀)**, η **στάθμη** θα **ανέβει** και θα **ισορροπήσει** στο **h[#]**!

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ = Q₂(h₀)**, δηλαδή $Q_1 = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2} \quad (168),$

η **στάθμη** θα **παραμείνει αμετάβλητη** στο **h₀ = h[#]** ♪

- Ολοκληρώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση**: **f**)

Αλλά, λαμβάνοντας **υπόψη** τους ως άνω **περιορισμούς κατά περίπτωση**:

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή:

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_1} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) + \frac{E_1 \cdot h}{Q_1} \quad (169)$$

για $h: h_0 \rightarrow h^\#$, $t: 0 \rightarrow T^\#$

Για **οριακή ισορροπία** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h^\#\}$

Στην περίπτωση **εκροής** παροχής από τη δεξαμενή:

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_1} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) - \frac{E_1 \cdot h}{Q_1} \quad (170)$$

για $h: h_0 \rightarrow 0$, $t: 0 \rightarrow T$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

8.7.11 Αριθμητική ολοκλήρωση σύνθετων διαφορικών εξισώσεων

- Οι σύνθετες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της ως άνω διαδικασίας δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις δυνατό (ή ευχερές...) να ολοκληρωθούν με μαθηματική σχέση.
- Προτείνεται η διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσής τους με μέθοδο τύπου Simpson, κατά την οποία η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε εξίσωση πεπερασμένων διαφορών.
 - Προσδιορίζεται η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών, η οποία αντικαθιστά τη συνεχή διαφορική εξίσωση.
 - Το πεδίο εκροής – μεταβολής της στάθμης διαιρείται σε **άνισα διαστήματα – ευφυώς επιλεγόμενα** - αναλόγως με τη γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης.
 - Στα διαστήματα αυτά προσδιορίζεται το αντίστοιχο **εμβαδό** (ή όγκος) τους και το **κέντρο βάρους** τους και η **απόσταση του** από το **επίπεδο αναφοράς**.
 - Εφαρμόζεται η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών για κάθε διάστημα και υπολογίζεται ο **χρόνος μεταβολής της στάθμης στο διάστημα** αυτό.
 - Το **άθροισμα** των ως άνω **χρόνων προσεγγίζει ικανοποιητικώς** το χρόνο μεταβολής της στάθμης, ο οποίος θα προέκυπτε από τη **συνεχή** μαθηματική ολοκλήρωση.
- Για να γίνει **κατανοητή** ή **διαδικασία** και **τεκμηριωθεί** η **ακρίβεια** των αποτελεσμάτων **της**, θα την εφαρμόσουμε στη **βασική μορφή** (βλ. 8.7.3).

$$dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138) \rightarrow \Delta t^* = K_2 \cdot \frac{\Delta y}{\tilde{y}^{1/2}} \quad (138\Delta)$$

Τα άνισα – *ευφυώς επιλεγθέντα* – διαστήματα απεικονίζονται στο σχήμα με στρεβλή κατακόρυφη κλίμακα: