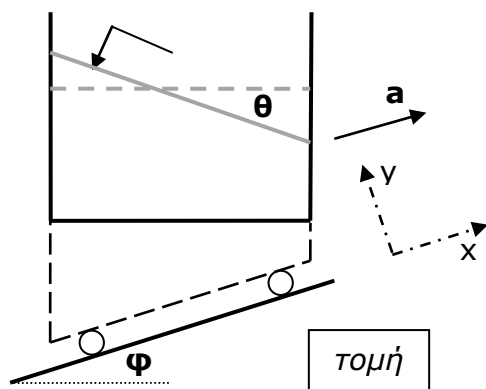


3.1 Ένα ανοιχτό δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και κινείται προς τα πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ με σταθερή επιτάχυνση a , παράλληλη στο επίπεδο (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί η γωνία θ , την οποία σχηματίζει η επιφάνεια του υγρού με το οριζόντιο επίπεδο.

Αριθμητική εφαρμογή: $\varphi = 30^\circ$, $a = 3,5 \text{ m/s}^2$, $\rho = 1.050 \text{ kgr/m}^3$.



$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{f}_\kappa - \vec{f}_\alpha \\ \vec{f}_\kappa &(-g \cdot \sin\varphi, -g \cdot \cos\varphi, 0) \\ (2.37) \rightarrow \vec{f}_\alpha &(-a, 0, 0) \\ \rightarrow \vec{f} &(-(a + g \cdot \sin\varphi), -g \cdot \cos\varphi, 0)\end{aligned}$$

$$(2.17) \rightarrow dp = \rho \cdot [-(a + g \cdot \sin\varphi) \cdot dx - g \cdot \cos\varphi \cdot dy]$$

$$dp = \rho \cdot [-(a + g \cdot \sin\varphi) \cdot dx - g \cdot \cos\varphi \cdot dy]$$

$$\text{Για } dp = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a + g \cdot \sin\varphi}{g \cdot \cos\varphi} \rightarrow \tan(\varphi + \theta) = \frac{a + g \cdot \sin\varphi}{g \cdot \cos\varphi}$$

Αριθμητική εφαρμογή: $\tan(\varphi + \theta) = 0,989323 \rightarrow \varphi + \theta = 44,692486^\circ$

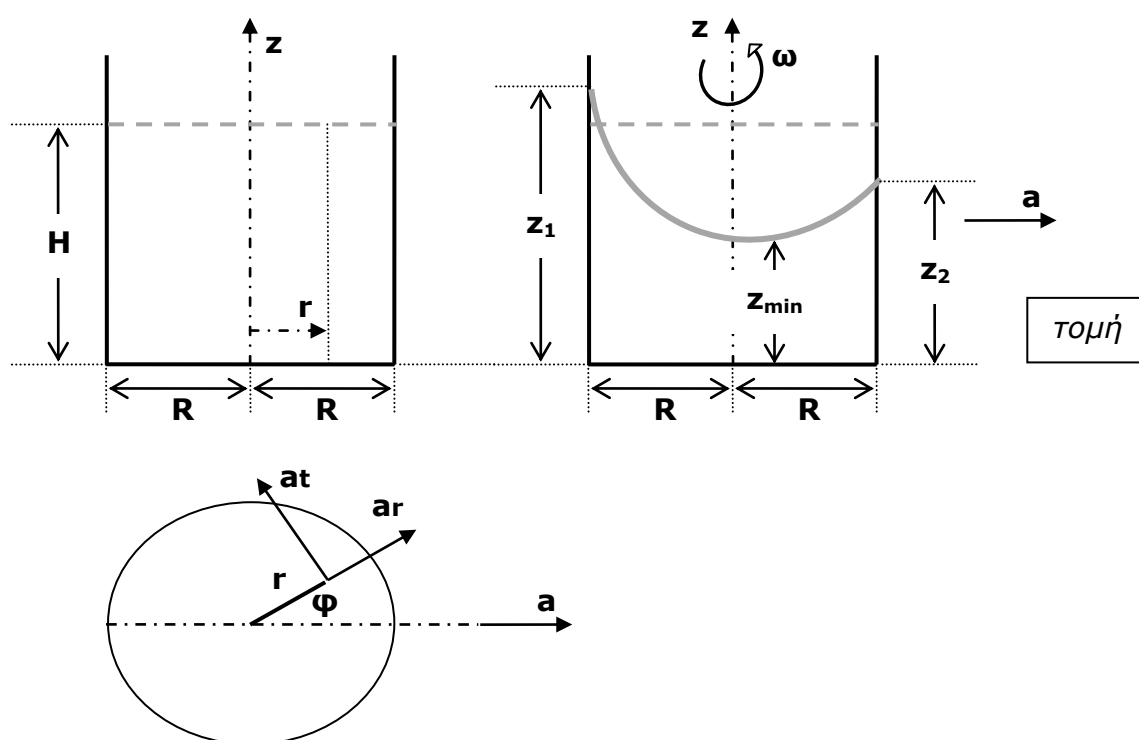
$$\rightarrow \theta = 14,692486^\circ$$

3.2 Κυλινδρικό δοχείο, με βάση κύκλο ακτίνας R και πολύ μεγάλο ύψος βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και το περιεχόμενο νερό φθάνει σε ύψος H (βλ. σχήμα). Στη συνέχεια το δοχείο επιταχύνει οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση a , ενώ ταυτοχρόνως τίθεται σε περιστροφική γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κίνηση, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

1. Να υπολογιστούν το μέγιστο ύψος z_1 και το ελάχιστο ύψος z_2 του νερού στα τοιχώματα του δοχείου.
2. Με δεδομένη τη γωνιακή ταχύτητα ω να υπολογιστεί η μέγιστη οριζόντια επιτάχυνση $a_{\max}$, ώστε να βρέχεται όλος ο πυθμένας του δοχείου. Στην περίπτωση αυτή που εμφανίζεται το $z_{\min}$;

Αριθμητική εφαρμογή: $R = 1,00 \text{ m}$, $H = 1,50 \text{ m}$, $a = 3,0 \text{ m/s}^2$, $\omega = 2,0 \text{ rad.s}^{-1}$.

Υπόδειξη: Για την έκφραση της γενικευμένης εξίσωσης ισορροπίας χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες: $\{r, \varphi, z\}$.



$$a_r = \omega^2 \cdot r^2 - a \cdot \cos \varphi, a_t = a \cdot \sin \varphi, a_z = -g$$

$$\partial p = \rho \cdot a_r \cdot \partial r \rightarrow p = \rho \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - a \cdot \cos \varphi \right) + \Phi_1(\varphi, z)$$

$$\partial p = \rho \cdot r \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \partial \varphi \rightarrow p = -\rho \cdot r \cdot a \cdot \cos \varphi + \Phi_2(r, z)$$

$$\partial p = -\rho \cdot g \cdot \partial z \rightarrow p = -\rho \cdot r \cdot g \cdot z + \Phi_3(r, \varphi)$$

Οι επιλύσεις είναι συμβατές όταν:

$$p = p_0 + \rho \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - a \cdot \cos \varphi - g \cdot z \right)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια είναι: $p = 0$

$$\rightarrow z = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 - \frac{a \cdot \cos \varphi}{g} \cdot r$$

Πρέπει:

$$\iint z \cdot d\varphi \cdot r \cdot dr = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\rightarrow \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} z \cdot d\varphi \right) \cdot r \cdot dr = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\rightarrow \pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{p_0}{\gamma} + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} \right) \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\rightarrow \frac{p_0}{\gamma} = H - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}$$

$$\rightarrow z = H - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 - \frac{a \cdot \cos \varphi}{g} \cdot r$$

Στα τοιχώματα είναι: $r = R$

$$z_{\text{τοιχ}} = H + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} - \frac{a \cdot \cos \varphi}{g} \cdot R$$

$$\rightarrow \max z_1 = H + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} + \frac{a}{g} \cdot R \text{ για } \varphi = \pi$$

$$\min z_1 = H + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} - \frac{a}{g} \cdot R \text{ για } \varphi = 0$$

Για το $z_{\min}$:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{\omega^2 \cdot r}{2 \cdot g} - \frac{a}{g} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow \sin \varphi = 0$$

$$\rightarrow r_{\min} = \frac{a}{\omega^2} \text{ και } \varphi = 0$$

$$\rightarrow z_{\min} = H - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g} - \frac{a^2}{2 \cdot g \cdot \omega^2}$$

Για να βρέχεται όλος ο πυθμένας πρέπει:

$$z_{\min} \geq 0 \rightarrow a_{\max} = \omega \cdot \left(2 \cdot g \cdot H - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{2} \right)^{1/2}$$

Με την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται και η:

$$r_{\min} = \frac{a}{\omega^2} \leq R \rightarrow a \leq \omega^2 \cdot R$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$z_1 = 1,908 \text{ m}, z_2 = 1,296 \text{ m.}$$

$$a_{\max} = 10,475 \text{ m/s}^2 > 6,0 = \omega^2 \cdot R \rightarrow r_{\min} = 2,619 \text{ m} > R$$

Δεν υπάρχει οριακή λύση εντός του δοχείου, ο πυθμένας βρέχεται!

3.3 Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ ρευστού με πυκνότητα ρ δίνονται από τις σχέσεις: $u = 2 \cdot x^2 + y^2$ και $v = -4 \cdot x \cdot y$, ενώ η πίεση δίνεται από την σχέση: $p = \rho \cdot x^2 \cdot (2 \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot y)$.

1. Να εξεταστεί εάν η ροή είναι Μόνιμη, Ομοιόμορφη, Αστρόβιλη.
2. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση στο σημείο **A** ($x = 1, y = 1$).
3. Να προσδιοριστεί η εξίσωση των γραμμών ροής.
4. Να υπολογιστεί, ως συνάρτηση της πυκνότητας ρ , η ολική μεταβολή $\frac{Dp}{Dt}$ της πίεσης στο σημείο **A** ($x = 1, y = 1$).

$$(25\delta) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{ροή } \underline{\text{μόνιμη}}$$

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot x \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cdot y$$

$$(25\alpha) \rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow [(2 \cdot x^2 + y^2) \cdot (4 \cdot x)] + [(-4 \cdot x \cdot y) \cdot (2 \cdot y)] \rightarrow$$

$$a_x = 8 \cdot x^3 - 4 \cdot x \cdot y^2 \neq 0$$

$\rightarrow$ ροή ανομοιόμορφη, μη μηδενική τιμή της a_x αρκεί για το χαρακτηρισμό 🎵

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial v}{\partial x} = -4 \cdot y, \text{ είναι και } \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot x$$

$$(28) \rightarrow \omega_z = -3 \cdot y \neq 0 \rightarrow \text{ροή } \underline{\text{στροβιλή}}$$

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial v}{\partial x} = -4 \cdot y \text{ είναι και } \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot x$$

$$(25\beta) \rightarrow u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = [(2 \cdot x^2 + y^2) \cdot (-4 \cdot y)] + [(-4 \cdot x \cdot y) \cdot (2 \cdot x)] \rightarrow$$

$$a_y = -4 \cdot y^3 + 8 \cdot x^2 \cdot y$$

$$a = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2} \rightarrow \mathbf{a_A = 5,656854 \text{ m/s}^2}$$

$$(26) \rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow u \cdot dy - v \cdot dx = 0 \rightarrow (2 \cdot x^2 + y^2) \cdot dy + 4 \cdot x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot x \cdot (8 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - 4 \cdot y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2 \cdot \rho \cdot x^2 \cdot (y - 1)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = 2 \cdot \rho \cdot x \cdot (8 \cdot x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot y^3 + y^4) \rightarrow \frac{Dp}{Dt}(A) = 18 \cdot \rho$$