

7.1 Στον άξονα οριζόντιας εργαστηριακής σήραγγας ορθογωνικής διατομής με πολύ μεγάλο πλάτος, ώστε η ροή να θεωρείται δισδιάστατη και μεταβλητό ύψος Y τοποθετείται εγκάρσια και συμμετρικά κύλινδρος διαμέτρου d . Στη σήραγγα διοχετεύεται νερό υπό πίεση με γνωστή παροχή (ανά μέτρο πλάτους) q . Σε δύο διατομές: **1** (ανάντη του κυλίνδρου) και **2** (ολίγον κατά κατάντη του κυλίνδρου) είναι δεδομένα τα παρακάτω μεγέθη (βλ. σχήμα).

- Ύψη της διατομής: $Y_1 = d$ και $Y_2 = 2.d$
- Ενδείξεις απλών πιεζομέτρων: h_1 και h_2

Είναι επίσης γνωστές οι κατανομές των ταχυτήτων (βλ. λεπτομέρεια).

Ζητούνται:

1. Οι μέσες ταχύτητες V_i και οι μέγιστες ταχύτητες $u_{i \max}$ στις δύο διατομές ($i=1,2$).
2. Το ύψος των απωλειών ενέργειας ΔH_{1-2} μεταξύ των δύο διατομών.
3. Η ολική δύναμη αντίστασης του κυλίνδρου F_D .

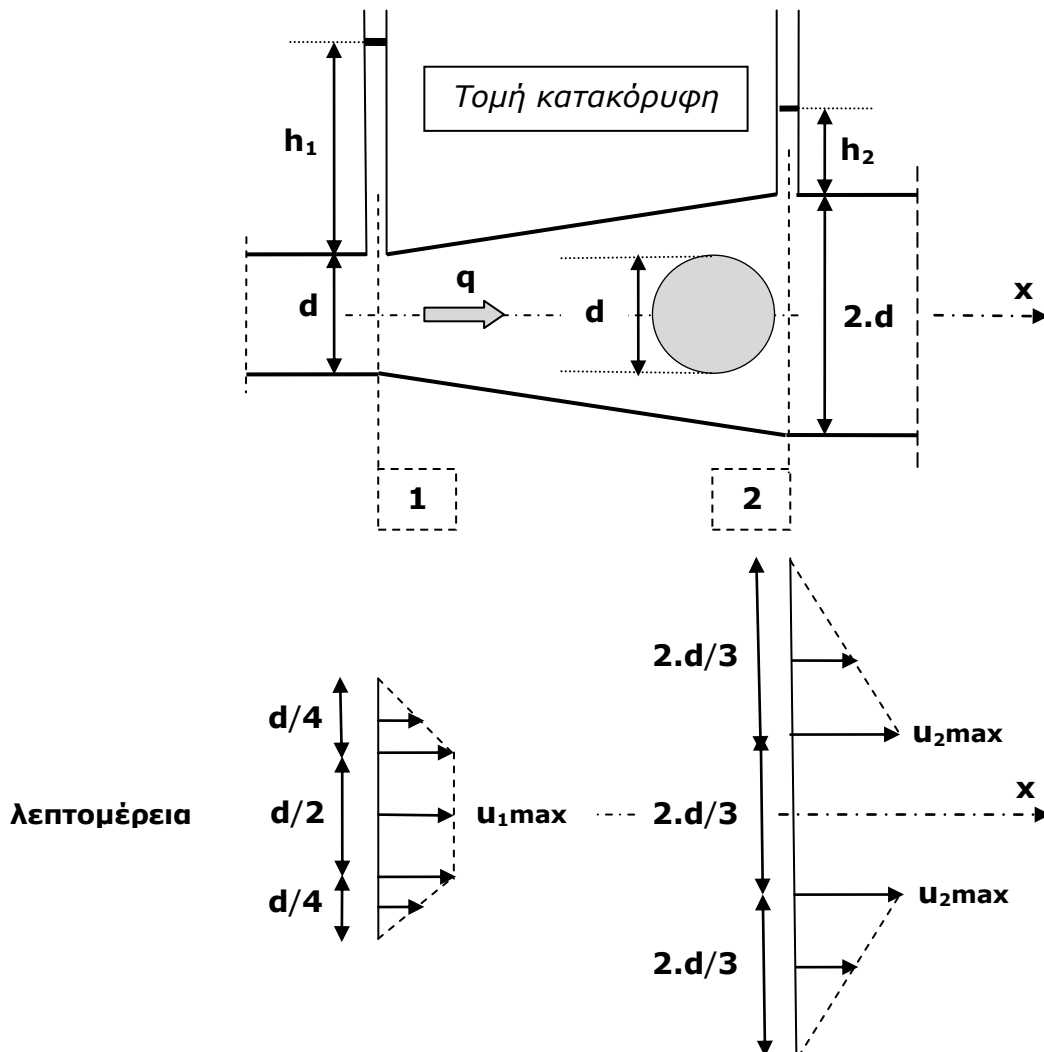
Παραδοχές - Υποδείξεις:

Να αμεληθούν οι δυνάμεις, οποίες παραλαμβάνονται από τα τοιχώματα της σήραγγας.

Η κατανομή της πίεσης στις διατομές **1** και **2** να ληφθεί ομοιόμορφη.

Οι συντελεστές συνόρθωσης *προφανώς* ΔΕΝ είναι μονάδα.

Αριθμητική εφαρμογή: $q = 2,0 \text{ m}^2/\text{s}$, $d = 1,0 \text{ m}$, $h_1 = 250 \text{ cm}$, $h_2 = 50 \text{ cm}$.



<βλ. **5.2**, 5.3.2 και 5.5.7 FM NV401 A και Κεφάλαιο 9  >

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς**:
 - ο Στερεά όρια = τοιχώματα και κύλινδρος.
 - Διατομή εισόδου η διατομή **1** και εξόδου η διατομή **2**.
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**:
 - Άξονας x, ο άξονας της σήραγγας, άξονας z κατακόρυφος - κάθετος στον x.
 - Επίπεδο αναφοράς οριζόντιο, ορίζεται από τον άξονα της σήραγγας.
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot d - 2 \cdot V_2 \cdot d = q_1 - q_2 = 0$$

$$(52\beta) \rightarrow q = \sum_0^d u \cdot \Delta d \rightarrow q = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot u_1 \max \cdot \frac{d}{4} \right) + \left(u_1 \max \cdot \frac{d}{4} \right)$$

$$\text{και } q = \sum_0^{2 \cdot d} u \cdot \Delta d \rightarrow q = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot u_2 \max \cdot \frac{2 \cdot d}{3} \right) + 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 + \Delta H_{(1-2)}$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta H_{(1-2)}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\beta_1 \cdot \bar{V}_1 \cdot q_1) - (\beta_2 \cdot \bar{V}_2 \cdot q_2) \right] = \sum_1^2 (\bar{F}_{pi}) + \bar{F}_g + \bar{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot q \cdot [(\beta_1 \cdot V_1) - (\beta_2 \cdot V_2)] = p_1 \cdot d - 2 \cdot p_2 \cdot d + N_x$$

Άγνωστα μεγέθη: $V_1, V_2, u_1 \max, u_2 \max, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2, N_x$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$V_1 = \frac{q}{d} \text{ και } V_2 = \frac{q}{2 \cdot d}, u_1 \max = \frac{4 \cdot q}{3 \cdot d} \text{ και } u_2 \max = \frac{3 \cdot q}{2 \cdot d}$$

Μορφώνουμε τη σχέση μεταξύ της τοπικής ταχύτητας **u(z)** και της μέγιστης ταχύτητας **u(z)max** σε κάθε περιοχή της διατομής:

$$\mathbf{1:} \ u(z) = \frac{4 \cdot z}{d} \cdot u_1 \max \leftrightarrow 0 \leq z \leq \frac{d}{4} \text{ και } u(z) = u_1 \max \leftrightarrow \frac{d}{4} \leq z \leq \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{2:} \ u(z) = \frac{3 \cdot z}{2 \cdot d} \cdot u_2 \max \leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{2 \cdot d}{3} \text{ και } u(z) = 0 \leftrightarrow \frac{2 \cdot d}{3} \leq z \leq \frac{d}{2}$$

Συσχετίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα **u(z)max** με τη μέση ταχύτητα **V**:

$$u_1 \max = \frac{4 \cdot V_1}{3} \text{ και } u_2 \max = 3 \cdot V_2$$

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (56) και (58):

$$\beta_1 = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{d/4} u(z)^2 \cdot dz + \int_{d/4}^{d/2} u(z)^2 \cdot dz \right)}{V_1^2 \cdot d} = \frac{512 \cdot \int_0^{d/4} z^2 \cdot dy}{9 \cdot d^3} + \frac{32 \cdot \int_{d/4}^{d/2} dy}{9 \cdot d} = 1,185$$

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{d/4} u(z)^3 \cdot dz + \int_{d/4}^{d/2} u(z)^3 \cdot dz \right)}{V_1^3 \cdot d} = \frac{8192 \cdot \int_0^{d/4} z^3 \cdot dz}{27 \cdot d^4} + \frac{128 \cdot \int_{d/4}^{d/2} dy}{27 \cdot d} = 1,481$$

$$\beta_2 = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{2 \cdot d/3} u(z)^2 \cdot dz \right)}{V_2^2 \cdot 2 \cdot d} = \frac{81 \cdot \int_0^{2 \cdot d/3} z^2 \cdot dz}{4 \cdot d^3} = 2,000$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{2 \cdot d/3} u(z)^3 \cdot dz \right)}{V^3 \cdot 2 \cdot d} = \frac{729 \cdot \int_0^{2 \cdot d/3} z^3 \cdot ddz}{8 \cdot d^4} = 4,500$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \cdot \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot d^2} = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \cdot \frac{q^2}{8 \cdot g \cdot d^2} + \Delta H_{(1-2)} \quad (\text{διότι } z_1 = z_2 = 0)$$

$$p_1 = \gamma \cdot \left(h_1 + \frac{d}{2} \right) \quad \text{και} \quad p_2 = \gamma \cdot (h_2 + d)$$

$$\rightarrow \Delta H_{(1-2)} = h_1 - h_2 - \frac{d}{2} + \frac{q^2}{8 \cdot g \cdot d^2} \cdot (4 \cdot \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\rightarrow N_x = - \left[\frac{\gamma \cdot q^2}{2 \cdot g \cdot d} \cdot (2 \cdot \beta_1 - \beta_2) \right] - \gamma \cdot \left(h_1 + \frac{d}{2} \right) \cdot d + \gamma \cdot 2 \cdot (h_2 + d) \cdot d$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_1 = 2,000000 \text{ m/s}, V_2 = 1,000000 \text{ m/s}$$

$$u_{1\max} = 2,666667 \text{ m/s}, u_{2\max} = 3,000000 \text{ m/s}$$

$$\Delta H_{1-2} = 1,572579 \text{ m}$$

$$N_x = -0,075433 \text{ t/m}$$

$$\rightarrow F_D = +0,075433 \text{ t/m} = 0,74 \text{ kN/m}$$

Η εκφώνηση υποδεικνύει: «*Να αμεληθούν οι δυνάμεις, οποίες παραλαμβάνονται από τα τοιχώματα της σήραγγας*».

Άρα το σύνολο της δύναμης αναλαμβάνεται - επιδρά στον κύλινδρο ♪

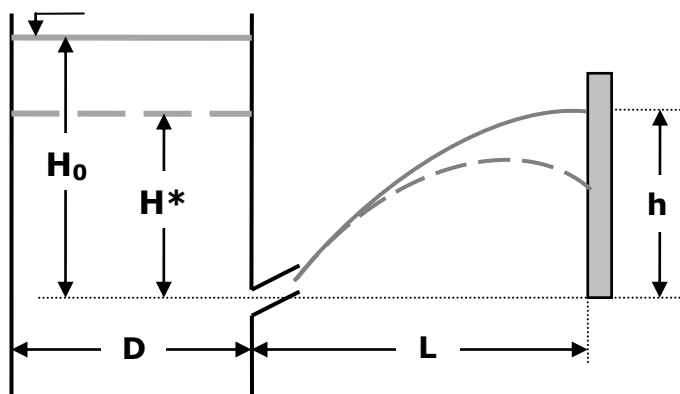
7.2 Στο τοίχωμα δεξαμενής διαμέτρου **D** υπάρχει σωλήνας, ο οποίος καταλήγει σε ακροφύσιο διαμέτρου **d**, απ' όπου η υδάτινη φλέβα εκτοξεύεται υπό γωνία **50°** ως προς την οριζόντια (βλ. σχήμα). Η φλέβα προσπίπτει σε κατακόρυφο τοίχωμα τοποθετημένο σε απόσταση **L**, όπου μετράται το σημείο και η γωνία πρόσπτωσης. Για την αρχική στάθμη **H₀** στη δεξαμενή η φλέβα προσέβαλε κάθετα το τοίχωμα σε σημείο ύψους **h**.

Ζητείται να υπολογιστούν:

1. Η αρχική στάθμη **H₀** στη δεξαμενή και το ύψος **h**.
2. Η στάθμη **H*** στη δεξαμενή και η γωνία πρόσπτωσης **φ**, όταν η φλέβα προσπίπτει στο τοίχωμα σε ύψος το ήμισυ του προηγούμενως υπολογισθέντος **h**.
3. Η στάθμη **H_{op}** στη δεξαμενή όταν η φλέβα προσπίπτει οριακά στον πόδα του τοιχώματος.
4. Ο χρόνος εκκένωσης της δεξαμενής από τη στάθμη **H₀** έως τη στάθμη **H_{op}**.

Σημείωση: Συντελεστής **c = 0,611**

Αριθμητική εφαρμογή: **D = 2,0 m**, **d = 5,0 cm**, **L = 10 m**.



<βλ. 7.1.2, 8.10.2, 8.11.2 και 8.7.3 FM NV401 A>

- Αρχική στάθμη: «η φλέβα προσέβαλε κάθετα το τοίχωμα». Αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος **y_{max}** και το ήμισυ του βεληνεκούς **x_{max} / 2**.

$$(177) \rightarrow x_{\max} = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{g} \rightarrow H_0 = \frac{L}{\sin(2 \cdot \theta)}$$

$$(178) \rightarrow y_{\max} = \frac{(V_0 \cdot \sin \theta)^2}{2 \cdot g} \rightarrow h = H_0 \cdot \sin^2 \theta = \frac{L \cdot \sin^2 \theta}{\sin(2 \cdot \theta)}$$

- Οριακή στάθμη: «η φλέβα προσπίπτει οριακά στον πόδα του τοιχώματος». Αντιστοιχεί στο βεληνεκές **x_{max}**.

$$(177) \rightarrow x_{\max} = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{g} \rightarrow H_{op} = \frac{L}{2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)}$$

$$(140) \rightarrow t = -K_2 \cdot \int_{H_0}^{H_{op}} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot (H_0^{1/2} - H_{op}^{1/2})$$

$$\text{και (139)} \rightarrow K_2 = \left[\frac{D^2}{c_2 \cdot d^2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right]$$

- Ενδιάμεση στάθμη: $x = L$ και $y = h/2$

$$(173) \rightarrow \frac{h}{2} = \tan \theta \cdot L - \frac{L^2}{4 \cdot H^* \cdot \cos^2 \theta} \rightarrow H^* = \frac{L^2}{4 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(\tan \theta \cdot L - \frac{h}{2} \right)}$$

$$(176) \rightarrow \tan \varphi = \tan \theta - \frac{L}{2 \cdot H^* \cdot \cos^2 \theta}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$H_0 = 10,154266 \text{ m}$ και $h = 5,958768 \text{ m}$

$H_{op} = 5,077133 \text{ m}$

$t = 1.103,552131 \text{ s} \approx 18 \text{ min} + 24 \text{ s}$

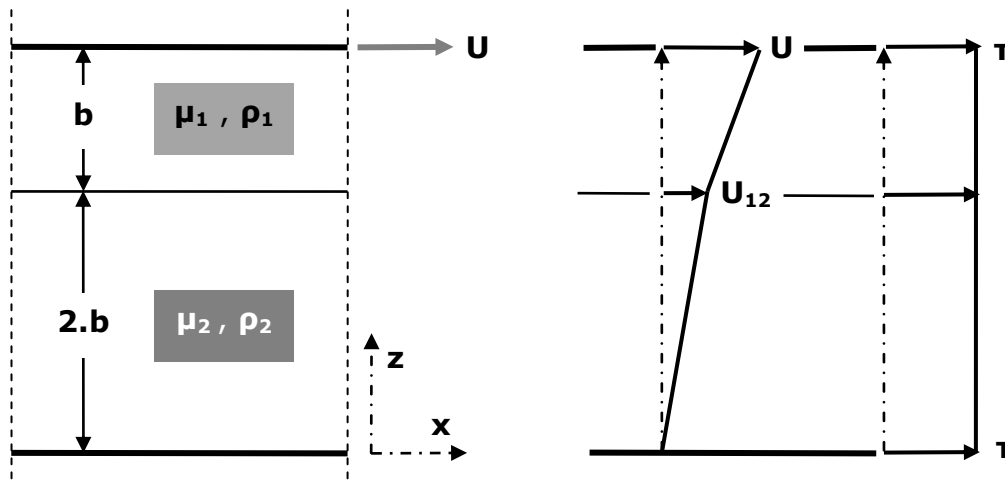
$H^* = 6,769511 \text{ m}$ και $\varphi = -30,79^\circ$

7.3 Μεταξύ δύο παραλλήλων οριζοντίων πλακών μεγάλων διαστάσεων οι οποίες απέχουν ύψος $3 \cdot b$, βρίσκονται δύο μη μίγνυόμενα υγρά με συνεκτικότητες μ_1, μ_2 , πυκνότητες ρ_1, ρ_2 και ύψη $b, 2 \cdot b$ αντιστοίχως. Η άνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα U , ενώ η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη.

Για τη μόνιμη στρωτή ροή, η οποία δημιουργείται μεταξύ των πλακών, ζητούνται:

1. Να προσδιορισθούν οι κατανομές ταχυτήτων $u(z)$ και διατμητικών τάσεων $\tau(z)$ και να χαραχθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα κατανομής.
2. Να υπολογισθούν οι παροχές q_1, q_2 (ανά μονάδα πλάτους) των δύο στρωμάτων.

Αριθμητική εφαρμογή: $b = 10,0 \text{ cm}$, $\mu_1 = 7,20 \cdot 10^{-2} \text{ gr/cm.s}$, $\rho_1 = 0,86 \cdot 10^{-2} \text{ gr}^3/\text{cm}$, $\mu_2 = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ gr/cm.s}$, $\rho_2 = 1,59 \cdot 10^{-2} \text{ gr}^3/\text{cm}$, $U = 5,00 \text{ cm/s}$.



<βλ. Κεφάλαιο 10  >

Προσομοίωση:

Δύο μόνιμες Δισδιάστατες Στρωτές ροές - Couette - μεταξύ Παραλλήλων Πλακών, όπου έστω U_{12} η **κοινή ταχύτητα** στη διεπιφάνεια των δύο ρευστών.

- Κάτω στρώση:

$$(10.7) \rightarrow u_2(z) = \frac{U_{12} \cdot z}{2 \cdot b} \text{ και } (10.8) \rightarrow \tau_2(z) = \frac{\mu_2 \cdot U_{12}}{2 \cdot b}$$

- Άνω στρώση:

$$(10.7) \rightarrow u_1(z) = \frac{(U - U_{12}) \cdot (z - 2 \cdot b)}{b} + U_{12} \text{ και } (10.8) \rightarrow \tau_1(z) = \frac{\mu_1 \cdot (U - U_{12})}{b}$$

- Οι τάσεις στη διεπιφάνεια είναι ίσες ♪:

$$\frac{\mu_2 \cdot U_{12}}{2 \cdot b} = \frac{\mu_1 \cdot (U - U_{12})}{b} \rightarrow U_{12} = \frac{2 \cdot \mu_1}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot U$$

- Τελικές εξισώσεις:

$$u(z) = \left(\frac{2 \cdot \mu_1}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{U}{2 \cdot b} \right) \cdot z \leftrightarrow 0 \leq z \leq 2 \cdot b$$

$$u(z) = \left(\frac{\mu_2}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{U}{b} \right) \cdot z - \left(2 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot U \right) \leftrightarrow 2 \cdot b \leq z \leq 3 \cdot b$$

$$\tau(z) = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{U}{b} \leftrightarrow 0 \leq z \leq 3 \cdot b$$

- Μέσες ταχύτητες και παροχές:

$$(10.9) \rightarrow V_{\mu 2} = \frac{U_{12}}{2} = \frac{\mu_1}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot U \rightarrow q_2 = \frac{2 \cdot \mu_1}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot U \cdot b$$

$$\text{και } V_{\mu 1} = \frac{U + U_{12}}{2} = \frac{4 \cdot \mu_1 + \mu_2}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{U}{2} \rightarrow q_1 = \frac{4 \cdot \mu_1 + \mu_2}{2 \cdot \mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{U \cdot b}{2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$u(z) = \mathbf{0,234528 \cdot z} \text{ cm /s. Ισχύει για } \mathbf{0 \leq z \leq 2 \cdot b}$$

$$u(z) = \mathbf{0,030945 \cdot z + 4,071661} \text{ cm /s. Ισχύει για } \mathbf{2 \cdot b \leq z \leq 3 \cdot b}$$

$$\tau(z) = \mathbf{0,002228} \text{ gr/cm.s}^2. \text{ Ισχύει για } \mathbf{0 \leq z \leq 3 \cdot b}$$

$$q_2 = \mathbf{46,905537} \text{ cm}^2/\text{s. Ισχύει για } \mathbf{0 \leq z \leq 2 \cdot b}$$

$$q_1 = \mathbf{48,452769} \text{ cm}^2/\text{s. Ισχύει για } \mathbf{0 \leq z \leq 2 \cdot b}$$