

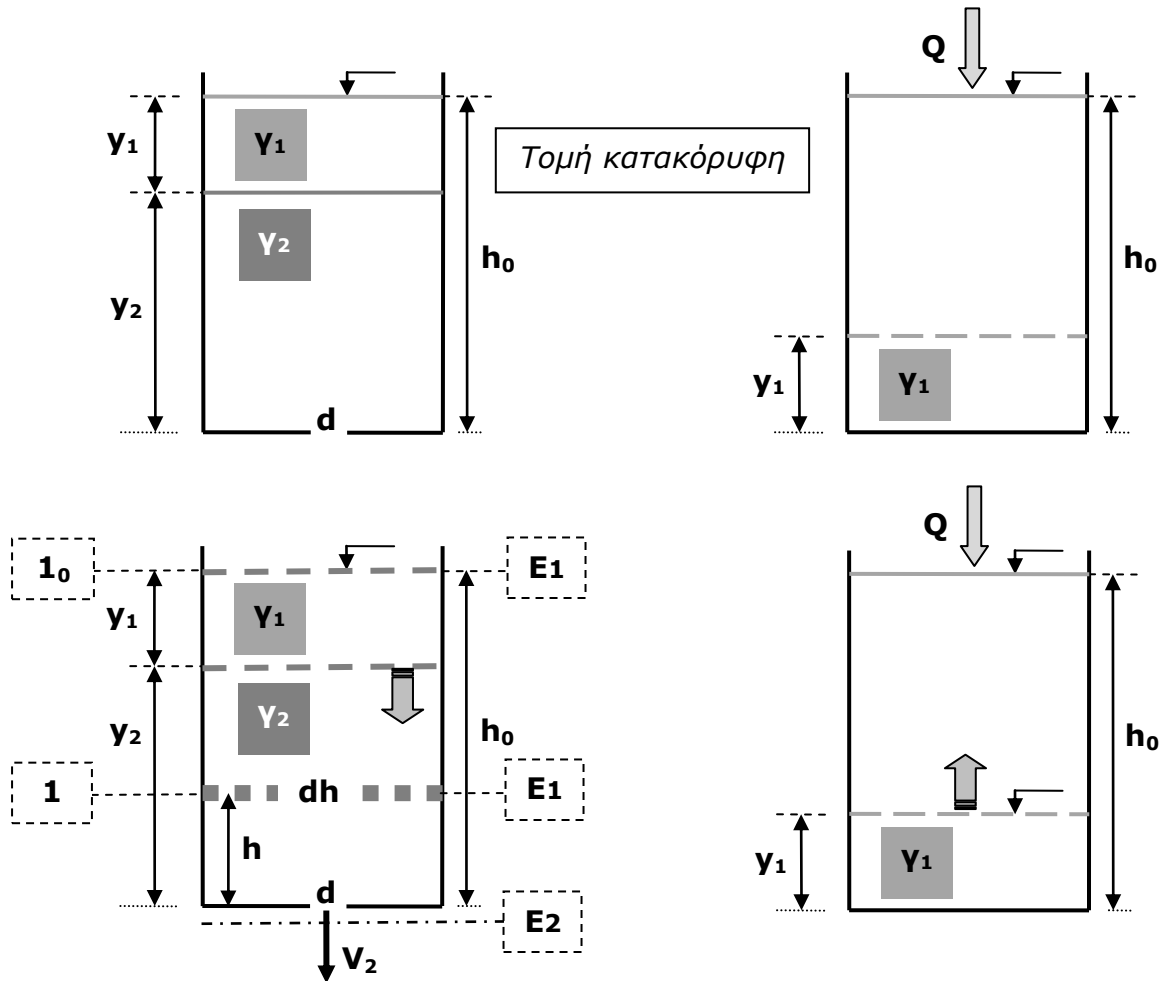
8.9.3 Η εφαρμογή αφορά στα 8.7.8 και 8.7.3

Κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο D και αρχικό συνολικό βάθος h_0 περιέχει δύο στρώσεις υγρών: Πετρέλαιο με ειδικό βάρος γ_1 και βάθος Y_1 και νερό με ειδικό βάρος γ_2 και βάθος Y_2 . Τα αρχικά βάθη των δύο υγρών γ_1 και γ_2 είναι άγνωστα.

Προκειμένου να διαπιστωθεί πόσο νερό περιέχει η δεξαμενή, ανοίγεται στον πυθμένα του δοχείου μικρή *απλή* οπή, διαμέτρου d και μετράται ο χρόνος T εκροής του νερού από την οπή μέχρι τη στιγμή όπου αρχίζει να εκρέει πετρέλαιο.

1. Ζητείται να υπολογιστεί το ύψος γ_2 της στρώσης νερού ως συνάρτηση των D , h_0 , γ_1 , γ_2 , d και του χρόνου T εκροής του νερού.
2. Εάν μετά το πέρας της εκροής του νερού κλείσει η οπή, να υπολογιστεί ποιά πρέπει να είναι η παροχή τροφοδοσίας πετρελαίου Q , ώστε το δοχείο να γεμίσει με πετρέλαιο μέχρι το ύψος h_0 σε ίσο χρόνο T .

Αριθμητική εφαρμογή: $D = 1,20$ m, $h_0 = 0,90$ m, $\gamma_1 = 0,82$ t /m³, $\gamma_2 = 1,00$ t /m³, $d = 12,0$ cm και $T = 58,0$ s.



1^η Φάση:

- Εφαρμόζουμε τις **απλοποιημένες εξισώσεις:**

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} \text{ για } h > y_2$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b** και **d** και **ΟΧΙ** η **c** ☹)

Είναι και: $y_2 = h_0 - y_1$

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2}$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt}$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**. Αρχικώς **δεν** υπάρχει εισροή **Q₁**)

- Μορφώνουμε τη **σύνθετη διαφορική εξίσωση:**

$$dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{\left(h + \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2}}, \text{ για } h : y_2 \rightarrow 0, t : 0 \rightarrow T$$

$$\text{Όπου η σταθερά είναι: } K_2 = \frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} = \frac{D^2}{c_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot d^2}$$

- Ολοκληρώνουμε τη **σύνθετη διαφορική εξίσωση:**

$$T = -K_2 \cdot \int_{y_2}^0 \frac{dh}{\left(h + \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot \left[\left(y_2 + \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\text{Είναι: } y_1 = h_0 - y_2 \rightarrow T = 2 \cdot K_2 \cdot \left[\left(y_2 + \frac{\gamma_1 \cdot h_0}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1 \cdot y_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\gamma_1 \cdot h_0}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1 \cdot y_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\rightarrow \left(y_2 + \frac{\gamma_1 \cdot h_0}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1 \cdot y_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\gamma_1 \cdot h_0}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1 \cdot y_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} = \frac{T}{2 \cdot K_2}$$

2^η Φάση:

- Εφαρμόζουμε τις **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$V_2(h) = 0 \rightarrow Q_2(h) = 0 \text{ για } y_1 \leq h \leq h_0$$

(διότι δεν υπάρχει εκροή ☹)

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_1 = E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{y_2}{T} \text{ ♪}$$

Τώρα υπάρχει μόνο εισροή **Q₁**

Αριθμητική εφαρμογή: Η σχέση τιμής των διαμέτρων **d** και **D** οριακώς επιτρέπει τον χαρακτηρισμό της οπής ως μικρής...

Ως εκ τούτου ο συντελεστής πλήρους συστολής **c₂** είναι δυνατό να ληφθεί **0,611**, ως συνήθως – θεωρώντας στον Πίνακα ν. Mises **d/D ≈ 0 → K₂ = 36,049561**, ή με την ακριβέστερη τιμή του, εάν θεωρήσουμε **d/D = 0,1**.

$$\rightarrow (0,18 \cdot y_2 + 0,738)^{1/2} - (0,738 - 0,82 \cdot y_2)^{1/2} = 0,784854$$

$$\rightarrow (0,18 \cdot y_2 + 0,738)^{1/2} - (0,738 + y_2 - 0,18 \cdot y_2)^{1/2} = 0,784854$$

$$\rightarrow (a \cdot y_2 + b)^{1/2} - (b + y_2 - a \cdot y_2)^{1/2} = c$$

Η εξίσωση καταλήγει σε δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το **y₂**, με μία θετική ρίζα.

$$\rightarrow y_2 = 0,868454 \text{ m} \approx 0,87 \text{ m}$$

$$\rightarrow y_1 = 0,031545 \text{ m} \approx 0,03 \text{ m (η στρώση πετρελαίου ήταν για «ξεκάρφωμα»).$$

$$\rightarrow Q = 0,017 \text{ m}^3/\text{s}.$$

8.9.4 Η εφαρμογή αφορά στο 8.7.10

Στον πυθμένα λεπτότοιχης κυλινδρικής δεξαμενής Δ_1 διαμέτρου D , υπάρχει μικρή απλή κυκλική οπή διαμέτρου d . Η δεξαμενή έχει σταθερή στάθμη νερού σε ύψος D και τροφοδοτείται με σταθερή παροχή νερού Q_1 .

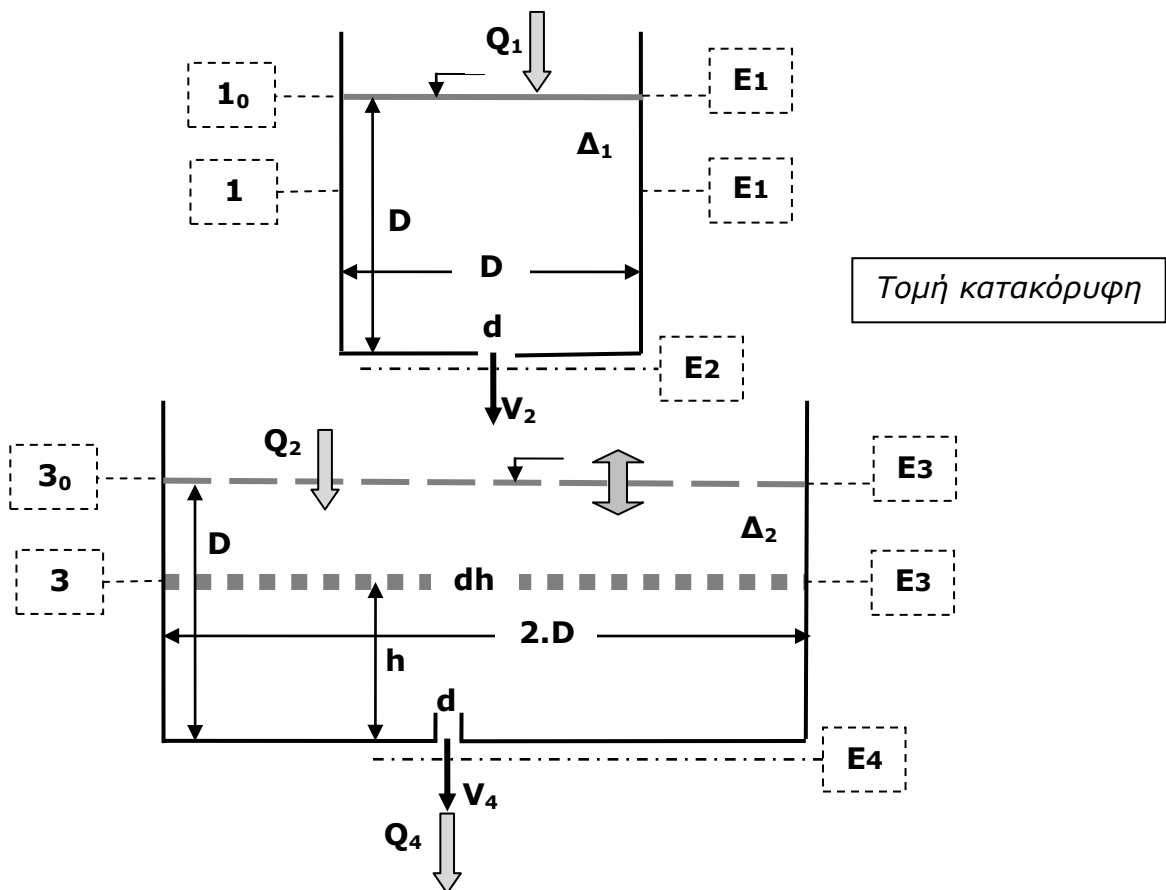
Η φλέβα η οποία εξέρχεται από την οπή της Δ_1 τροφοδοτεί λεπτότοιχη κυλινδρική δεξαμενή Δ_2 , διαμέτρου $2.D$, η οποία περιλαμβάνει στον πυθμένα της μικρή κυκλική οπή με ιδιαίτερη διαμόρφωση διαμέτρου d (βλ. σχήμα).

Η δεξαμενή Δ_2 έχει αρχική στάθμη νερού σε ύψος D .

Ζητούνται:

1. Η παροχή Q_1 .
2. Ο χρόνος T κατά τον οποίο θα σταθεροποιηθεί η στάθμη στη δεξαμενή Δ_2 και η τελική αυτή στάθμη H .

Αριθμητική εφαρμογή: $D = 2,0$ m και $d = 3,0$ cm.



Στη δεξαμενή Δ_1 η στάθμη είναι σταθερή:

Άρα είναι η στάθμη ισορροπίας και $Q_1 = Q_2$ ♪

$$(168) \rightarrow Q_1 = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot D)^{1/2} \rightarrow Q_1 = Q_2 = c_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (2 \cdot g \cdot D)^{1/2}$$

- Στη δεξαμενή **Δ_2** εφαρμόζουμε τις **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$(135) \rightarrow h + \frac{p_3}{\gamma} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_4(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **a, b, c** και **d**)

$$(136) \rightarrow Q_4(h) = c_4 \cdot E_4 \cdot V_4(h) = c_4 \cdot E_4 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$(165) \rightarrow Q_4(h) = Q_1 - E_3 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_4(h) = -E_3 \cdot \frac{dh}{dt} + Q_1$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση**: **f** αλλά **όχι** η **e**  και η **$Q_1 = Q_2$** είναι **εισροή**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$\rightarrow dt = -K_4 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_3}$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_4 = \left[\frac{E_3}{c_4 \cdot E_4} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] = \frac{4 \cdot D^2}{c_4 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot d^2}$

Η **στάθμη ισορροπίας H**, η οποία προκύπτει όταν **$Q_1 = Q_4(H)$** είναι:

$$H = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{Q_1}{c_4 \cdot E_4} \right)^2 = \left(\frac{c_2}{c_4} \right)^2 \cdot D > D \rightarrow \text{η στάθμη στη δεξαμενή } \Delta_2 \text{ **ανέρχεται!**}$$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$t = K_4 \cdot \int_D^H \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_3} = 2 \cdot K_4 \cdot (D^{1/2} - H^{1/2}) - \frac{Q_1}{E_3} \text{ για } h: D \rightarrow H, t: 0 \rightarrow T$$

$$\rightarrow T = \left[2 \cdot K_4 \cdot \left(\frac{c_2}{c_4} - 1 \right) \cdot D^{1/2} \right] - \frac{c_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2}}{4 \cdot D^{3/2}}$$

Αριθμητική εφαρμογή: **$c_2 = 0,611$** , **$c_4 = 0,500$** , **$K_4 = 8.027,086951$**

$$Q_1 = 0,002705 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = 2,986568 \text{ m} \approx \mathbf{2,99 \text{ m}}$$

$$T = 5.040,055550 \text{ s} \approx \mathbf{84 \text{ min}}$$

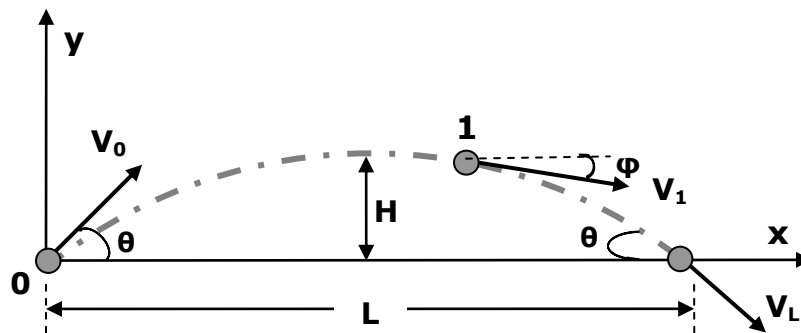
8.10 Στοιχεία θεωρίας φλεβών - βολών

8.10.1 Εισαγωγή

- Οι **φλέβες** υγρού οι οποίες εκρέουν από οπές ή *ακροφύσια* ακολουθούν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, (κυρίως αμέληση τριβών και αντίστασης του αέρα) τους νόμους οι οποίοι διέπουν τις **βολές στερεών σωμάτων** → ανάλυση κατά **Lagrange** (βλ. 3.1.2).
- Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε, εάν εφαρμόσουμε την εξίσωση **Bernoulli** (βλ. 7.1.2).

8.10.2 Βασικές σχέσεις

- Φλέβα εκρέει υπό γωνία θ (ως προς την οριζόντια) με αρχική ταχύτητα V_0 και προσπίπτει σε οριζόντιο επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το σημείο εκροής.



- **Εξίσωση τροχιάς** (x, y) των ρευστών σωματιδίων:

$$x = V_0 \cdot \cos \theta \cdot t \quad (172) \quad \text{και} \quad y = \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot (V_0 \cdot \cos \theta)^2} \cdot x^2 \quad (173)$$

- **Γεωμετρικά μεγέθη και ταχύτητα σε τυχόν σημείο 1(x_1, y_1) της τροχιάς:**

$$V_{1x} = V_0 \cdot \cos \theta \quad (174) \quad - \text{σταθερή συνιστώσα σε } \underline{\text{όλο το μήκος}} \text{ της τροχιάς!}$$

$$V_{1y} = V_0 \cdot \sin \theta - g \cdot t = V_0 \cdot \sin \theta - \frac{g \cdot x}{V_0 \cdot \cos \theta} \quad (175)$$

$$\tan \varphi = \frac{V_{1y}}{V_{1x}} = \tan \theta - \frac{g \cdot x}{(V_0 \cdot \cos \theta)^2} \quad (176)$$

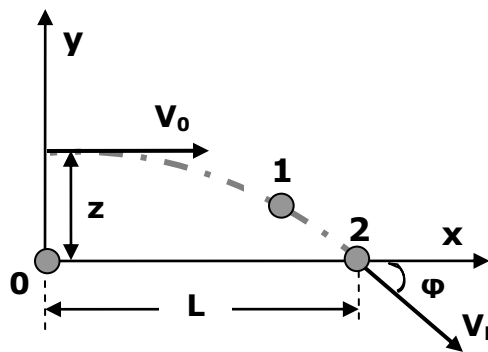
- ο **Οριακά μεγέθη:**

Βεληνεκές **L** → $x_{\max} = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{g}$ (177)

Μέγιστο ύψος **H** → $y_{\max} = \frac{(V_0 \cdot \sin \theta)^2}{2 \cdot g}$ (178) (αντιστοιχεί στο **L / 2**)

Ταχύτητα πρόσπτωσης: $V_{1xL} = V_0 \cdot \cos \theta$ και $V_{1yL} = -V_0 \cdot \sin \theta$

- Φλέβα εκρέει **οριζόντια** με αρχική ταχύτητα **V₀** και προσπίπτει σε οριζόντιο επίπεδο, το οποίο απέχει ύψος (-)**z** από το επίπεδο του σημείου εκροής.



- ο **Εξίσωση τροχιάς** (x, y) των ρευστών σωματιδίων:

$x = V_0 \cdot t$ (172a) και $y = z - \frac{g \cdot t^2}{2} = z - \frac{g}{2 \cdot V_0^2} \cdot x^2$ (173a)

- ο **Γεωμετρικά μεγέθη** και **ταχύτητα** σε **τυχόν σημείο 1** (x_1, y_1) της **τροχιάς**:

$V_{1x} = V_0$ (174a), $V_{1y} = -g \cdot t = -\frac{g \cdot x}{V_0}$ (175a),

$\tan \varphi = \frac{V_{1y}}{V_{1x}} = -\frac{g \cdot x}{V_0^2}$ (176a)

- ο **Οριακά γεωμετρικά μεγέθη:**

Βεληνεκές **L** → $x_{\max} = \left(\frac{2 \cdot z}{g} \right)^{1/2} \cdot V_0$ (177a)

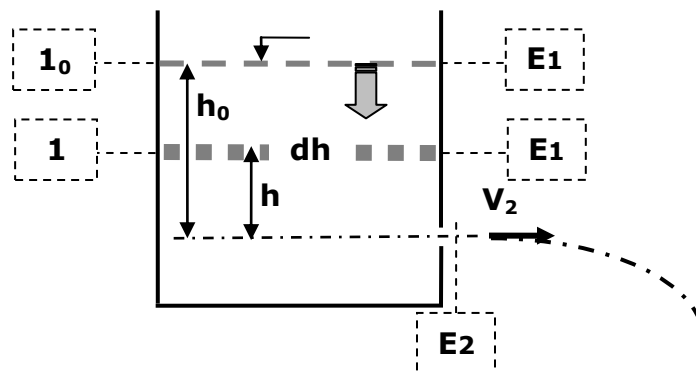
- **Γεωμετρικά μεγέθη και ταχύτητα στο σημείο 2(L , 0) πρόσπτωσης:**

$$V_{2x} = V_0 \quad (174\alpha) \quad \text{καί} \quad V_{2y} = -(2 \cdot g \cdot z)^{1/2} \quad (175\beta)$$

$$\tan \varphi = \frac{V_{2y}}{V_{2x}} = \frac{(2 \cdot g \cdot z)^{1/2}}{V_0} \quad (176\beta)$$

8.10.3 Τραγικά σφάλματα ☠

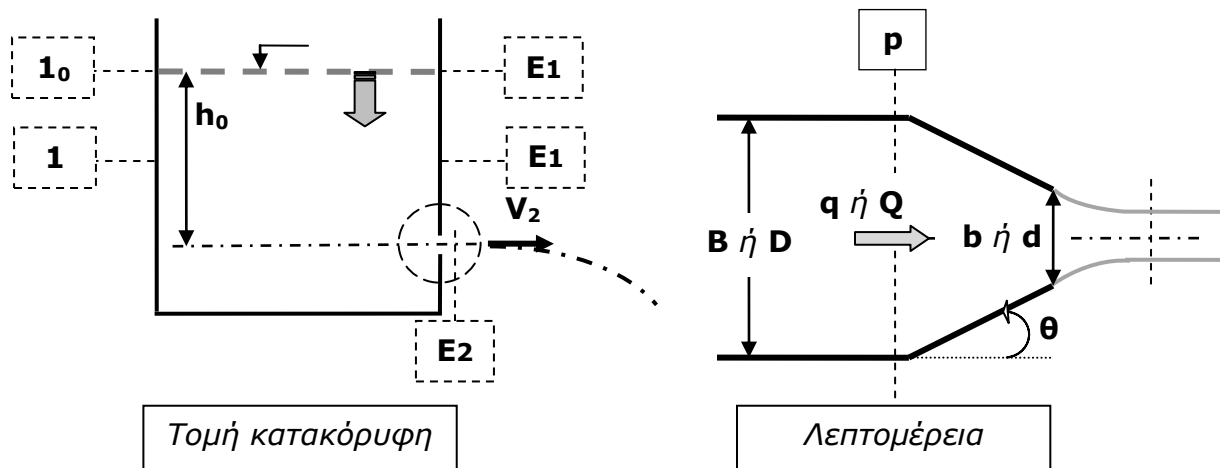
- Οι εφαρμογές σε προβλήματα φλεβών συνήθως συνδυάζονται με άλλα πεδία προβλημάτων και τούτο είναι δυνατό να οδηγήσει σε παιδαριώδη - τραγικά σφάλματα:
- Σε περίπτωση εκκένωσης δοχείου – δεξαμενής μέσω μικρής οπής υπολογίζεται ο χρόνος t καθόδου της στάθμης από επίπεδο σε επίπεδο (ενδεικτικώς βλ. 8.7.3).



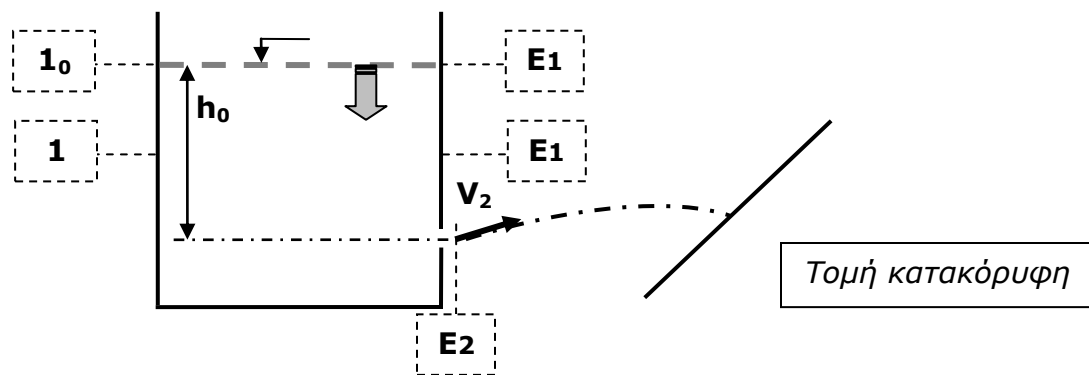
- Η αρχική ταχύτητα της βολής $\mathbf{V}_0$ όντως ταυτίζεται με την ταχύτητα εξόδου της φλέβας στη διατομή πλήρους συστολής **2**, άρα είναι και η $\mathbf{V}_0$ **μεταβλητή**.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΩΣ (135)→ $V_0 = V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$

- Όμως, ο χρόνος **t** στη **βολή** - ενδεικτικώς στις σχέσεις (172), (173) κ.λπ. - δεν έχει **καμία σχέση** με το χρόνο **t** στην **εκροή** - ενδεικτικώς στις σχέσεις (142), (144) κ.λπ. - ☹.
- Σε περίπτωση ακροφυσίου, είτε σε δοχείο - δεξαμενή, ή ως ειδικό τεμάχιο αγωγού, η διαμόρφωση των χειλέων του περιλαμβάνει κάποια γωνία **θ** (ενδεικτικώς βλ. 8.2.4).
- Όμως, η γωνία **θ** στη **βολή** - ενδεικτικώς στις σχέσεις (172), (173) κ.λπ. - δεν έχει **καμία σχέση** με γωνία **θ** στο **ακροφύσιο** - χρήσιμη για τον Πίνακα γ. Mises ☹.



- Σε περίπτωση πρόσπτωσης φλέβας σε πλάκα ή πτερύγιο απαραίτητο στοιχείο αποτελεί η γωνία πρόσπτωσης ω (ενδεικτικώς βλ. 5.3.10 και 8.11.2).



- ο Η γωνία ω πρόσπτωσης της φλέβας προσδιορίζεται μέσω της γωνίας φ της **φλέβας** στο σημείο πρόσπτωσης - ενδεικτικώς από τη σχέση (176) - και της **αντίστοιχης γωνίας κλίσης της πλάκας** (ή του άξονα του πτερυγίου) και γενικώς δεν είναι 90° .

8.11 Εφαρμογές υπολογισμού

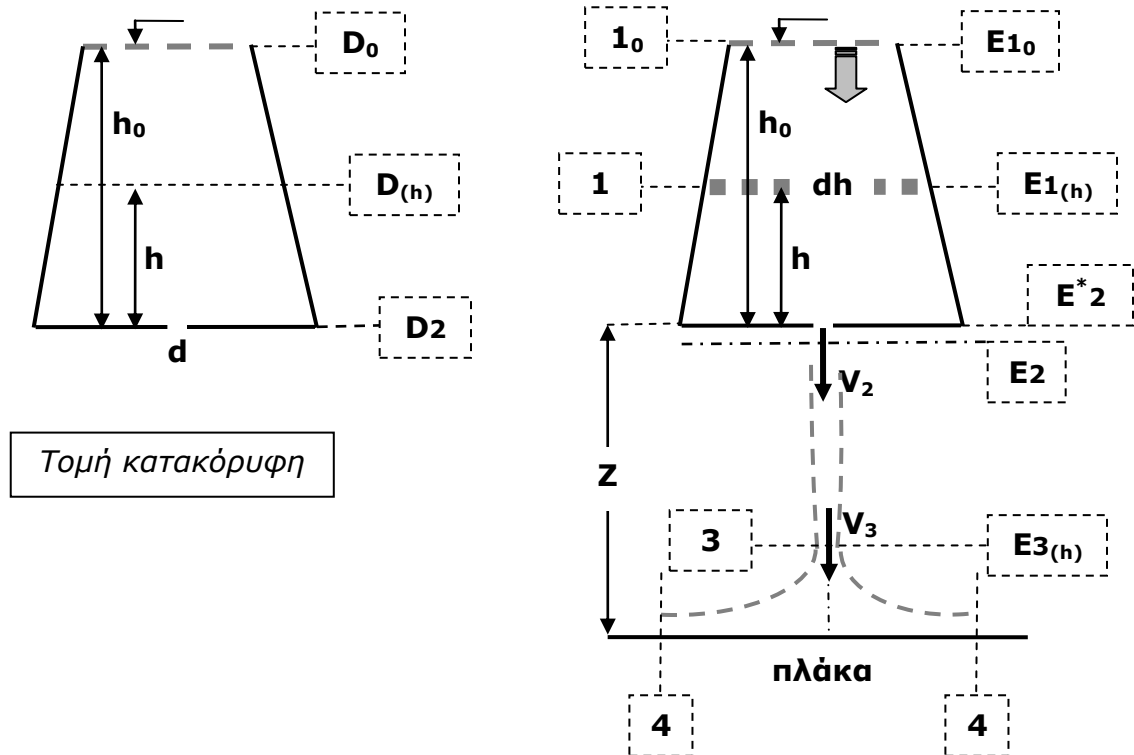
8.11.1 Η εφαρμογή αφορά σε εκκένωση δεξαμενής μέσω μικρής οπής σε συνδυασμό με Ροή τρισδιάστατης Φλέβας στην Ατμόσφαιρα. Βασίζεται – αξιοποιεί τα 8.9.1, 5.3.6, 8.10.2.

Σε απόσταση **Z** κάτω από τη δεξαμενή της εφαρμογής 8.9.1 τοποθετείται επίπεδη οριζόντια πλάκα, όπου προσπίπτει η φλέβα (βλ. σχήμα).

Ζητούνται:

1. Η διάμετρος **d₃** της φλέβας του νερού στη διατομή **E₃**, ολίγον πριν την πρόσπτωση στην πλάκα, σε δύο περιπτώσεις: Για την αρχική στάθμη **h₀** στη δεξαμενή και τη στάθμη **h₀/2**.
2. Η δύναμη **F**, η οποία ασκείται στην πλάκα από τη φλέβα, για την αρχική στάθμη **h₀** στη δεξαμενή και τη στάθμη **h₀/2**.

Αριθμητική εφαρμογή: **d = 8,0 cm**, **h₀ = 4,0 m**, **D₀ = 3,0 m**, **D₂ = 5,0 m**, **Z = 3,0 m**.



Από την επίλυση στην (8.9.1) $\rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$ και $E_{2c} = \frac{0,611 \cdot \pi \cdot d^2}{4}$

Εξίσωση συνέχειας (**2**)~(**3**):

$$V_2(h) \cdot E_{2c} = V_3(h) \cdot E_3(h) \rightarrow d_3(h) = 0,611^{1/2} \cdot d \cdot \frac{(2 \cdot g \cdot h)^{1/4}}{V_3(h)^{1/2}}$$

Εξίσωση ενέργειας (2)~(3):

$$\frac{V_2(h)^2}{2 \cdot g} = -Z + \frac{V_3(h)^2}{2 \cdot g} \rightarrow d_3(h) = V_3(h) = \left(V_2(h)^2 + 2 \cdot g \cdot Z \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow d_3(h) = 0,611^{1/2} \cdot \left(\frac{h}{h+Z} \right)^{1/4} \cdot d$$

→ Η E_3 είναι **μικρότερη** από τη **διατομή πλήρους συστολής** (βλ. και 5.3.6)

Εξίσωση ποσότητας κίνησης (3)~(4) κατά τον κατακόρυφο άξονα:

Δεν υπάρχει **δύναμη** κατά τον **οριζόντιο άξονα**! (βλ. 5.3.6)

$$F(h) = \rho \cdot V_3(h) \cdot Q_3(h) = \frac{\gamma}{g} \cdot V_3(h)^2 \cdot E_3(h)$$

$$\rightarrow F(h) = \gamma \cdot \frac{0,611 \cdot \pi \cdot d^2}{2} \cdot [(h+Z) \cdot h]^{1/2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$h = h_0 \rightarrow d_3 = 5,436897 \text{ cm και } F = 0,032503 \text{ t} = 0,319 \text{ kN}$$

$$h = h_0/2 \rightarrow d_3 = 4,973082 \text{ cm και } F = 0,019424 \text{ t} = 0,191 \text{ kN}$$

8.11.2 Η εφαρμογή αφορά σε εκροή από δεξαμενή σταθερής στάθμης μέσω μικρής σχισμής σε συνδυασμό με Ροή δισδιάστατης Φλέβας στην Ατμόσφαιρα.
Βασίζεται – αξιοποιεί τα 8.3.2, 8.10.2 και **5.2**

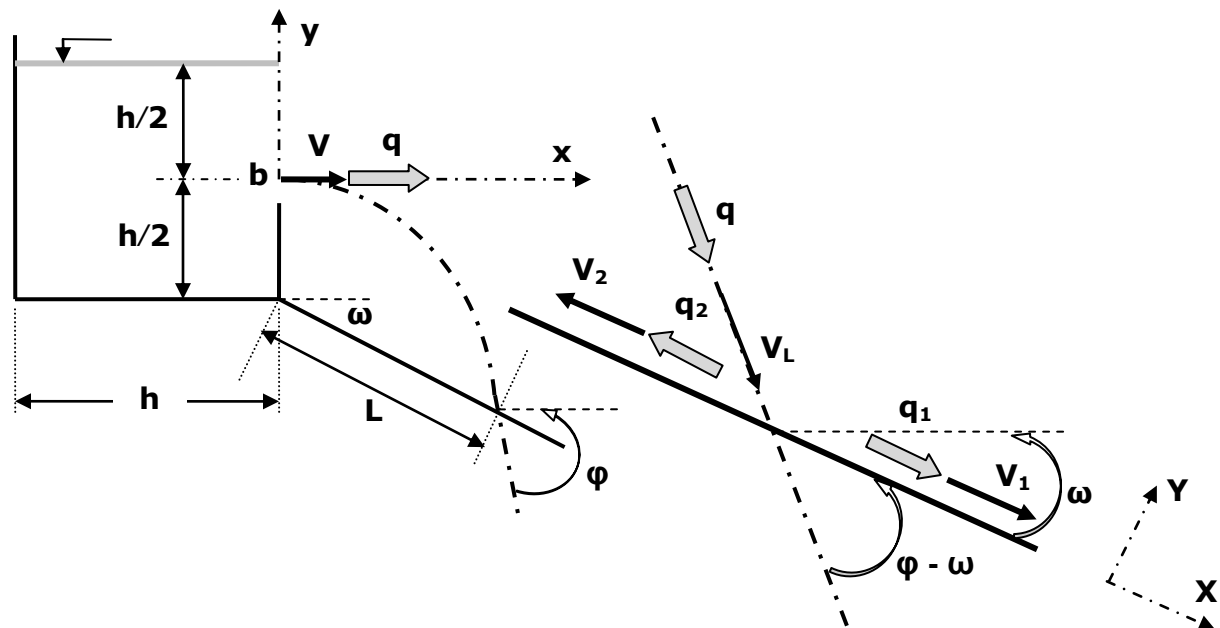
Δισδιάστατο δοχείο έχει πλάτος **h** και περιέχει νερό με σταθερή στάθμη **h**. Στο ένα κατακόρυφο τοίχωμά του υπάρχει σχισμή πλάτους **b**, της οποίας ο άξονας βρίσκεται στο μέσο της στάθμης **h**, απ' όπου εκρέει φλέβα, η οποία προσκρούει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας **ω** ως προς την οριζόντια (βλ. σχήμα).

Ζητούνται:

1. Η απόσταση **L** όπου προσκρούει η φλέβα.
2. Οι παροχές **q**, **q₁** και **q₂**.

Υπόδειξη : Αμελήστε τις τριβές, απώλειες ενέργειας και το βάρος της φλέβας.

Αριθμητική εφαρμογή: **b = 2,0 cm**, **h = 2,5 m**, **ω = 30°**.



- Εκροή: (101) $\rightarrow V = (g \cdot h)^{1/2}$ και $q = c \cdot b \cdot V = c \cdot b \cdot (g \cdot h)^{1/2}$

- Εξίσωση τροχιάς: (172a) $\rightarrow x = V \cdot t = (g \cdot h)^{1/2} \cdot t$

και (173a) $\rightarrow y = \frac{h}{2} - \frac{g}{2 \cdot V^2} \cdot x^2 = \frac{h}{2} - \frac{g \cdot t^2}{2}$

- Σημείο πρόσκρουσης: $L \cdot \cos \omega = (g \cdot h)^{1/2} \cdot t \rightarrow t = \frac{L \cdot \cos \omega}{(g \cdot h)^{1/2}}$

και $-\left(\frac{h}{2} + L \cdot \sin \omega\right) = \frac{h}{2} - \frac{g \cdot t^2}{2} \rightarrow L^2 + \frac{h \cdot \tan \omega}{\cos \omega} \cdot L - \left(\frac{h}{\cos \omega}\right)^2 = 0$

- Μεγέθη στο σημείο πρόσκρουσης:

$$(174a) \rightarrow V_{xL} = V = (g \cdot h)^{1/2} \text{ και } (175a) \rightarrow V_{yL} = -\frac{g \cdot x}{V} = -\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \cdot L \cdot \cos \omega$$

$$V_1 = V_2 = V_L = \left[g \cdot h + \frac{g}{h} \cdot (L \cdot \cos \omega)^2 \right]^{1/2}$$

$$(176a) \rightarrow \tan \varphi = \frac{V_{yL}}{V_{xL}} = -\frac{L \cdot \cos \omega}{h} \rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{L \cdot \cos \omega}{h}\right)$$

- Μονοδιάστατη ανάλυση στο σημείο πρόσκρουσης:

$$\text{Εξίσωση συνέχειας: } q = q_1 + q_2 = c \cdot b \cdot (g \cdot h)^{1/2}$$

$$\text{Εξίσωση ενέργειας: } z_L + \frac{p_L}{\gamma} + \frac{V_L^2}{2 \cdot g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow V_1 = V_2 = V_L = \left[g \cdot h + \frac{g}{h} \cdot (L \cdot \cos \omega)^2 \right]^{1/2}$$

$$(\text{διότι } z_L = z_1 = z_2 = 0 \text{ και } p_L = p_1 = p_2 = 0)$$

$$\text{Εξίσωση ποσότητας κίνησης στον άξονα } X:$$

$$-\rho \cdot [V_L \cdot q \cdot \cos(\varphi - \omega) - V_1 \cdot q_1 + V_2 \cdot q_2] = N_x = 0$$

Διότι συμφώνως με την υπόδειξη οι **τριβές αμελούνται**, άρα και η **N_x** ♪

$$\rightarrow q \cdot \cos(\varphi - \omega) - q_1 + q_2 = 0$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{q}{2} \cdot [1 + \cos(\varphi - \omega)] \text{ και } q_2 = \frac{q}{2} \cdot [1 - \cos(\varphi - \omega)]$$

Αριθμητική εφαρμογή

$$L^2 + \frac{5}{3} \cdot L - \frac{25}{3} = 0 \rightarrow L = \mathbf{5,0 \text{ m}}$$

$$|\varphi| = \mathbf{60^\circ} \rightarrow |\varphi - \omega| = \mathbf{30^\circ}$$

$$V_L = 9,904544 \text{ m/s}$$

$$c=0,611 \rightarrow \mathbf{q = 0,060517 \text{ m}^2/\text{s}, q_1 = 0,056463 \text{ m}^2/\text{s}, q_2 = 0,004054 \text{ m}^2/\text{s}.$$