

8.7 Εκκένωση δοχείων – δεξαμενών μέσω μικρών οπών

8.7.1 Εισαγωγή

- Πεδίο επίλυσης πρακτικών προβλημάτων **μη μόνιμης ροής** με επιμέρους στάδια:
 - Υπολογισμός της **μεταβαλλόμενης ταχύτητας εκροής** (ή εισροής).
 - Υπολογισμός της **διαφορικής εξίσωσης μεταβολής της στάθμης** στο δοχείο.
 - Υπολογισμός του **χρόνου μεταβολής της στάθμης** με ολοκλήρωση της ως άνω διαφορικής εξίσωσης.
- Το πρόβλημα υπολογισμού της ταχύτητας έχει ήδη λυθεί μέσω του θεωρήματος Torricelli (βλ. 7.2.1) και στην απλή του μορφή περιγράφεται στο βιβλίο 
- Στη συνέχεια προτείνεται μια διαδικασία επίλυσης, οποία αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου **Μονοδιάστατης Ανάλυσης** σε **μη μόνιμη ροή**
Καλύπτεται ένα ευρύ πεδίο περιπτώσεων – παραλλαγών και **εάν** η διαδικασία **αξιοποιηθεί** με **δημιουργικό τρόπο**, οδηγεί στην **επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος**.
- Το πεδίο επίλυσης προβλημάτων είναι δυνατό να γενικευθεί συμπεριλαμβάνοντας και εκροές (ή εισροές) μέσω αγωγών μικρής διατομής.

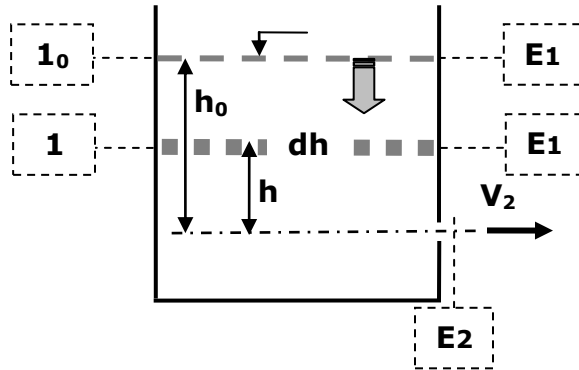
8.7.2 Η θεμελίωση της διαδικασίας

- Χρησιμοποιούμε τις **Γενικές Εξισώσεις Συνεχείας** (52α) και **Ενέργειας** (57α), τις οποίες **απλοποιούμε** με βάση πέντε (5) **Γενικές παραδοχές** και όσες από τις **Ειδικές προϋποθέσεις – δεσμεύσεις ισχύουν, έως κάποιο σημείο.**
- **Γενικές παραδοχές:**
 - **A:** Δεν υπάρχει μέσα στη δεξαμενή **υδραυλική μηχανή**.
 - **B:** Αμελούνται οι **απώλειες ενέργειας** μέσα στη δεξαμενή.
 - **C:** Οι **συντελεστές συνόρθωσης α** στην **εξίσωση ενέργειας** είναι **1**.
 - **D:** Η **διατομή της δεξαμενής** είναι **πολύ μεγαλύτερη** από τη **διατομή της οπής** (ή του αγωγού) **εκκένωσης** (ή πλήρωσης).
 - Η παραδοχή αυτή μέσω της εξίσωσης συνεχείας οδηγεί σε πολύ μικρή ταχύτητα καθόδου (ή ανόδου) της επιφάνειας του υγρού (στάθμη της δεξαμενής) και **επιτρέπει να αμελήσουμε** τον αντίστοιχο όρο $V^2/2.g$ στην **εξίσωση ενέργειας** ♪
 - Όταν δεν ισχύει, η επίλυση αλλάζει συνολικά (βλ. 8.7.12)!
 - **E:** Η **απόσταση της διατομής πλήρους συστολής** της φλέβας από το τοίχωμα της δεξαμενής θεωρείται **αμελητέα**.
 - Επί πλέον θεωρείται **καθορισμένη** η **μορφή** των **οπών**, ώστε να είναι δυνατός ο **προσδιορισμός** των συντελεστών πλήρους συστολής **c_i** καθεμιάς.

- **Κατάλληλος – μεταβλητός όγκος αναφοράς:**
 - **Διατομή εισόδου**, στην περίπτωση **εκροής**, είναι η **μεταβλητής θέσης επιφάνεια** του **ενιαίου υγρού** μέσα στη δεξαμενή, ή η επίσης μεταβλητής θέσης διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ της **κατώτερης στρώσης** ρευστού και της **αμέσως υψηλότερης** στρώσης υγρού.
 - **Διατομές εξόδου**, στην περίπτωση **εκροής**, είναι οι **διατομές πλήρους συστολής** της φλέβας σε **όλες** τις **οπές**.
 - Προφανώς, σε περίπτωση **εισροής** στη δεξαμενή, οι παραπάνω διατομές παραμένουν ως επιλογή, αλλά ο **χαρακτηρισμός** τους είναι **αντίστροφος**.
- **Επίπεδο αναφοράς – αρχή χρόνου εκκένωσης** (ή πλήρωσης):
 - Ως **επίπεδο αναφοράς** λαμβάνεται το **επίπεδο** της **χαμηλότερης διατομής εξόδου**, στην περίπτωση εκροής, ή της χαμηλότερης διατομής εισόδου, στην περίπτωση εισροής στη δεξαμενή.
 - Ως **αρχή του χρόνου** λαμβάνεται η **χρονική στιγμή έναρξης** της **εκκένωσης** (ή πλήρωσης).
- **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις:**
 - **a:** Υπάρχει **μόνο μία** οπή.
 - **b:** Υπάρχει **μόνο μία στρώση** υγρού σταθερής πυκνότητας.
 - **c:** Στην **επιφάνεια** του **υγρού** (στάθμη δεξαμενής) η **πίεση** είναι **ατμοσφαιρική**.
 - **d:** Στη **διατομή πλήρους συστολής** της **φλέβας** η **πίεση** είναι **ατμοσφαιρική**.
 - **e:** Στην **επιφάνεια** του **υγρού** (στάθμη δεξαμενής) **δεν** υπάρχει **εισροή** (ή εκροή).
 - **f:** Η **δεξαμενή** έχει **σταθερή οριζόντια διατομή**
 - **Οι Ειδικές προϋποθέσεις a, b, c και d** αφορούν - **επηρεάζουν** την **Εξίσωση Ενέργειας**.
 - **Οι Ειδικές προϋποθέσεις e και f** αφορούν - **επηρεάζουν** την **Εξίσωση Συνεχείας**.
 - **Όλες οι Ειδικές προϋποθέσεις** είναι **πιθανό** να **επηρεάσουν** τα **όρια ολοκλήρωσης** της **διαφορικής εξίσωσης**, η οποία θα προκύψει από την εφαρμογή της διαδικασίας.

8.7.3 Εφαρμογή της διαδικασίας: **βασική μορφή - εκροή**

- Ισχύουν **όλες** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, f**.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135) - \text{Ενέργειας}$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c** και **d**) - Συνεχείας

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**)

- Μορφώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

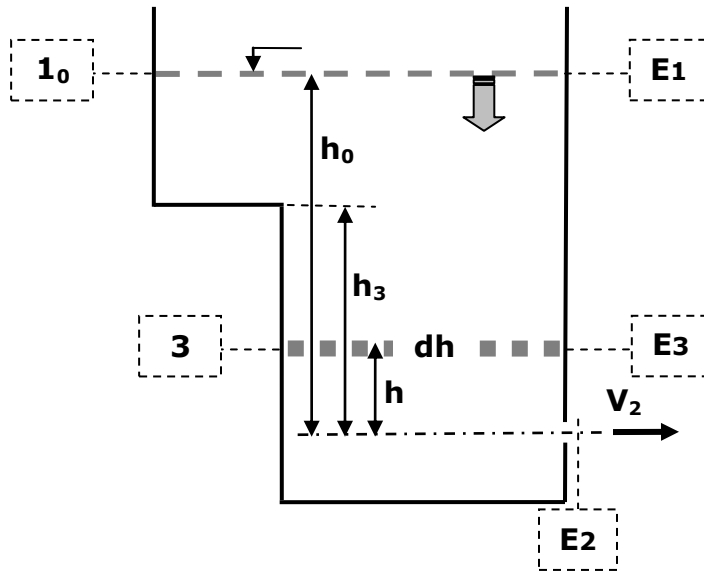
(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\} \rightarrow T = 2 \cdot K_2 \cdot h_0^{1/2} \quad (141)$

8.7.4 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή Ι - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, ΟΧΙ η f.**
- Η διατομή της δεξαμενής **μεταβάλλεται απότομα** σε κάποιο ύψος.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις:**

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c** και **d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } h_0 \geq h > h_3$$

$$Q_2(h) = \pm Q_3 - E_3 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_3(h) = -E_3 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137a) \text{ για } h_3 \geq h > 0$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: e** αλλά **όχι η f** ☹)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_1 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138), \text{ ισχύει για } h : h_0 \rightarrow h_3, t : 0 \rightarrow T_1$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_1 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right]$ (139)

(136) και (137α) $\rightarrow dt = -K_3 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}}$ (138), ισχύει για $h : h_3 \rightarrow 0, t : 0 \rightarrow T_3$

Όπου η σταθερά είναι: $K_3 = \left[\frac{E_3}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right]$ (139)

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(με προσοχή στα όρια - στάθμες, διότι **δεν** ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K_1 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_1 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

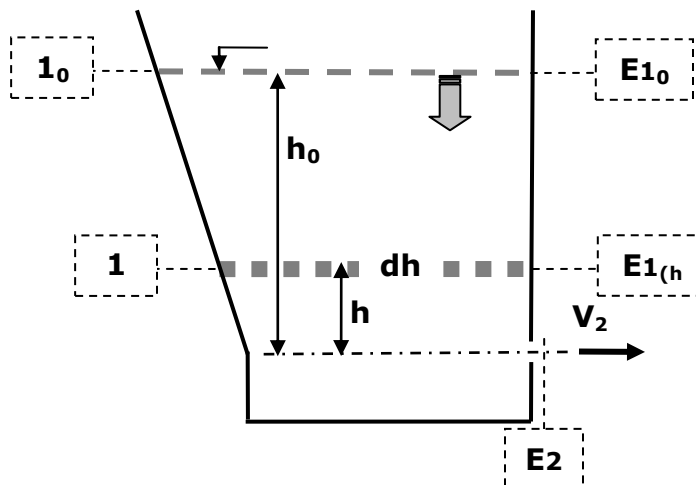
$$t = -K_3 \cdot \int_{h_C}^{h_D} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_3 \cdot (h_C^{1/2} - h_D^{1/2}) \quad (140a)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h_3\}$ και $\{h_C = h_3, h_D = 0\}$

$$\rightarrow T = T_1 + T_3$$

8.7.5 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παράλλαξη II - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, ΟΧΙ η f**.
- Η διατομή της δεξαμενής **μεταβάλλεται συνεχώς** (με γνωστή σχέση).
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c και d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1(h) \cdot \frac{dh}{dt} \quad (141)$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: e** αλλά **όχι η f** ☹)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K \cdot E_1(h) \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (142)$$

Όπου η σταθερά K:
$$K = \left[\frac{1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (143)$$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

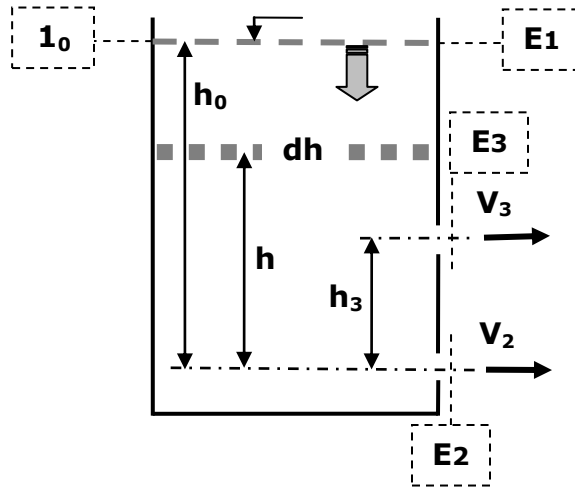
(με **προσοχή** στα όρια - στάθμες, διότι **δεν** ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K \cdot \int_{h_A}^{h_B} E_1(h) \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (144)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

8.7.6 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή III - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: b, c, d, e, f ΟΧΙ η a**.
- Υπάρχει **μία πρόσθετη οπή** σε κάποιο ύψος **h₃** πάνω από τη **βασική οπή 2**.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_3(h) = [2 \cdot g \cdot (h - h_3)]^{1/2} \quad (145)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c και d** για **καθεμιά οπή χωριστά!**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot V_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot [2 \cdot g \cdot (h - h_3)]^{1/2} \quad (146)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } h_3 \geq h > 0$$

$$Q_3(h) + Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_3(h) + Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (147)$$

για $h_0 \geq h > h_3$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e και f** και **για τις δύο οπές**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138), \text{ ισχύει για } h : h_3 \rightarrow 0, t : 0 \rightarrow T_2$$

$$\text{Όπου η σταθερά είναι: } K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$$

$$\rightarrow dt = - \left(\frac{K}{c_2 \cdot E_2 \cdot h^{1/2} + c_3 \cdot E_3 \cdot (h - h_3)^{1/2}} \right) \cdot dh \quad (148)$$

ισχύει για $h : h_0 \rightarrow h_3, t : 0 \rightarrow T_3$

Όπου η σταθερά είναι: $K = \left[\frac{E_1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (149)$

• Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(με προσοχή στα όρια – στάθμες ☹)

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

$$t = -K \cdot \int_{h_C}^{h_D} \left(\frac{1}{c_2 \cdot E_2 \cdot h^{1/2} + c_3 \cdot E_3 \cdot (h - h_3)^{1/2}} \right) \cdot dh \quad (150)$$

Για **πλήρη εκκένωση**: $\{h_A = h_3, h_B = 0\}$ και $\{h_C = h_0, h_D = h_3\} \rightarrow T = T_2 + T_3$

Σημείωση: Στην απλούστερη παραλλαγή IIIa, οι **δύο οπές** είναι **διαφορετικές** (εμβαδό της οπής 3: $E_3 \neq E_2$ ή και διαμόρφωση της οπής 3 διαφορετική: $c_3 \neq c_2$), **αλλά** οι δύο οπές είναι στο **ίδιο επίπεδο**. Οι εξισώσεις απλοποιούνται 🎵

$$(145) \rightarrow h + \frac{p_1}{\gamma} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_3(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (145a)$$

$$(146) \rightarrow Q_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot V_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (146a)$$

Η (147) ισχύει σε όλη την εκκένωση: $h_0 \geq h \geq 0$

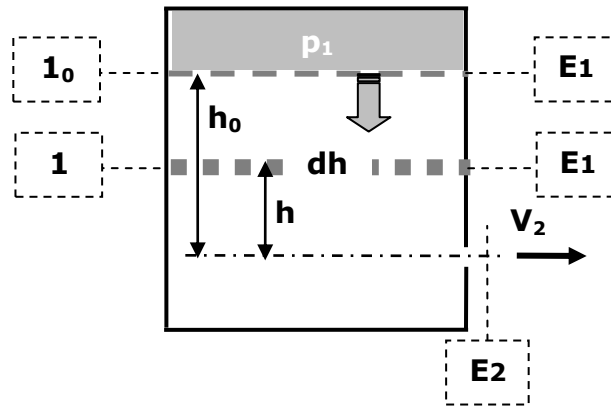
$$(148) \rightarrow dt = - \left(\frac{K}{(c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3) \cdot h^{1/2}} \right) \cdot dh \quad (148a) \text{ για } h_0 \geq h \geq 0$$

$$t = - \frac{K}{c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3} \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = \frac{2 \cdot K}{c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3} \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140\beta)$$

Για **πλήρη εκκένωση**: $\{h_A = h_0, h_B = 0\} \rightarrow T = \frac{2 \cdot K}{c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3} \cdot h_0^{1/2} \quad (141\beta)$

8.7.7 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή IV - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, d, e, f ΟΧΙ η c**. Στη διατομή **1₀** (και προφανώς στην εκάστοτε **1**) ασκείται **σταθερή πίεση p₁**.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h \pm \frac{p_1}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (151)$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b** και **d** και **ΟΧΙ η c** ☹️)

- Η **p₁** είναι δυνατό να είναι **υπερπίεση: p₁ > p_{ατμοσφαιρική} (+)**
- Η **p₁** είναι δυνατό να είναι **υποπίεση p₁: < p_{ατμοσφαιρική} (-)**

- Εάν είναι **p₁: < p_{ατμοσφαιρική}** η **εκροή** θα **σταματήσει** όταν: $h^* = \frac{p_1}{\gamma} \quad (152) \quad \bullet^*$

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h \pm \frac{p_1}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (153)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**)

- **Μορφώνουμε** τη **σύνθετη διαφορική εξίσωση**:

$$(153) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{\left(h \pm \frac{p_1}{\gamma} \right)^{1/2}} \quad (154)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f)**

Προσοχή: Στην περίπτωση υποπίεσης η εκροή τερματίζεται με βάση την (152) ☹*

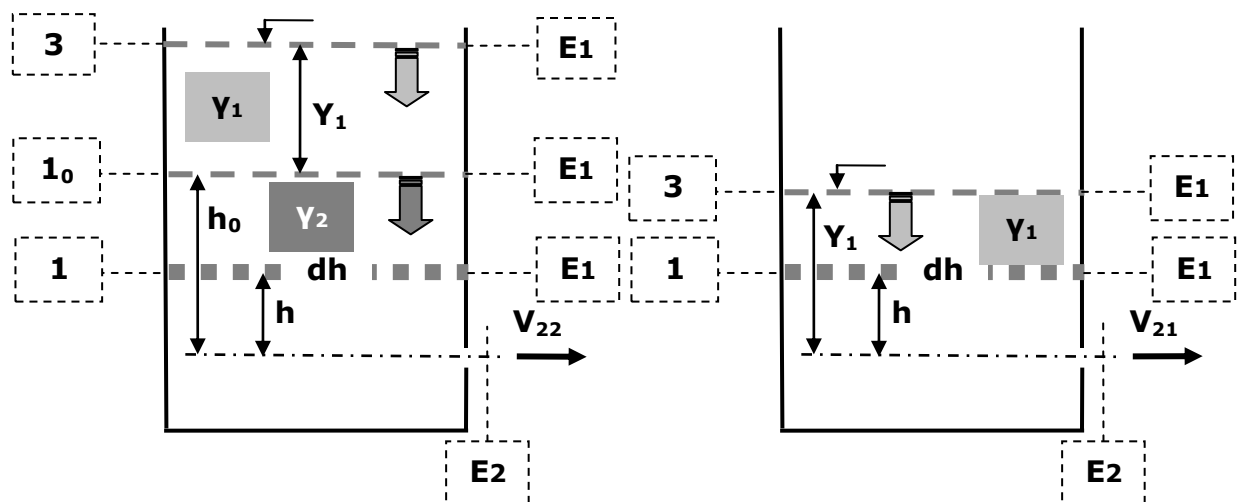
$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{\left(h \pm \frac{p_1}{\gamma}\right)^{1/2}} = \quad (155)$$

Για **πλήρη εκκένωση** σε περίπτωση υπερπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

Για **οριακή εκκένωση** σε περίπτωση υποπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h^*\}$

8.7.8 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή V - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, d, e, f ΟΧΙ η c**.
Στη δεξαμενή υπάρχουν **δύο στρώσεις** υγρού με διαφορετικά ειδικά βάρη γ_1 και γ_2 . Στη διατομή **1₀** (και προφανώς στην εκάστοτε **1**) ασκείται **σταθερή πίεση p₁** από την πάνω στρώση ύψους **Y₁**.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{22}^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_{22}(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma}\right)^{1/2} \quad (156)$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b και d** και **ΟΧΙ η c** ☹*)

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{21}^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_{21}(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν πλέον **όλες** οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b και d ΚΑΙ η c** ☼)

$$Q_{22}(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (157)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_{22}(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } h_0 \geq h \geq 0$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_{21}(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } Y_1 \geq h \geq 0$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e και f**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(157) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{\left(h + \frac{\gamma_1 \cdot Y_1}{\gamma} \right)^{1/2}} \quad (158) \text{ για } h: h_0 \rightarrow 0, t: 0 \rightarrow T_2$$

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138) \text{ για } h: Y_1 \rightarrow 0, t: 0 \rightarrow T_1$$

Όπου η σταθερά είναι ίδια και στα δύο πεδία: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(με **προσοχή** στα όρια – στάθμες ☼)

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_c}^{h_D} \frac{dh}{\left(h \pm \frac{p_1}{\gamma} \right)^{1/2}} = \quad (159)$$

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

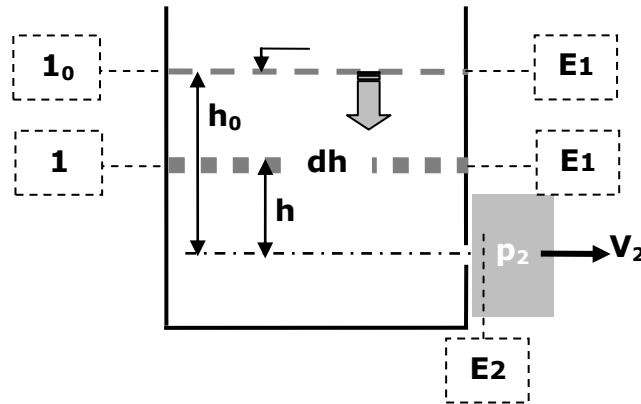
Για **πλήρη εκκένωση** της **κάτω στρώσης** του υγρού **γ₂** είναι: **{h_c= h₀ , h_D= 0}**

Για **πλήρη εκκένωση** της **άνω στρώσης** του υγρού **γ₁** είναι: **{h_A= Y₁ , h_B= 0}**

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: **T = T₂ + T₁**

8.7.9 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή VI - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, d, e, f ΟΧΙ η c**. Στη διατομή **2** ασκείται **σταθερή πίεση p_2** .
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h \mp \frac{p_2}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (160)$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b** και **c** και **ΟΧΙ η d** ☹️)

- Η p_2 είναι δυνατό να είναι υπερπίεση: $p_2 > p_{\text{ατμοσφαιρική}} (-)$
- Η p_2 είναι δυνατό να είναι υποπίεση: $p_2 < p_{\text{ατμοσφαιρική}} (+)$

- Εάν είναι $p_2 > p_{\text{ατμοσφαιρική}} (-)$ η **εκροή** θα σταματήσει όταν: $h^* = \frac{p_2}{\gamma} \quad (161) \quad \bullet^*$

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h \mp \frac{p_2}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (162)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(153) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{\left(h \mp \frac{p_2}{\gamma} \right)^{1/2}} \quad (163)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f)**

Προσοχή: Στην περίπτωση υπερπίεσης η εκροή τερματίζεται με βάση την (161) ☹*

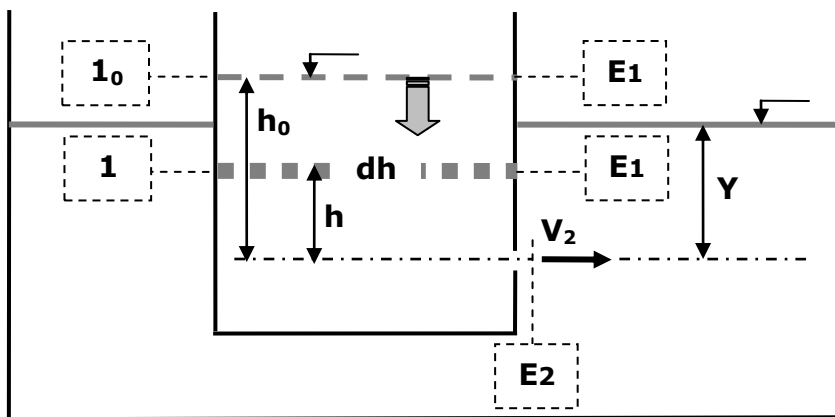
$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{\left(h \mp \frac{p_2}{\gamma} \right)^{1/2}} = \quad (164)$$

Για **οριακή εκκένωση** σε περίπτωση υπερπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h^*\}$

Για **πλήρη εκκένωση** σε περίπτωση υποπίεσης είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

Σημείωση: Στην απλούστερη παραλλαγή VI α, η σταθερή πίεση p_2 ασκείται από **εξωτερική** στη δεξαμενή **στρώση** υγρού με ύψος Y και **ίδιο ειδικό βάρος** με το υγρό στη δεξαμενή.

- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot (h - Y)^{1/2} \quad (165)$$

(διότι ισχύουν μόνο οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b** και **c** και **ΟΧΙ** η **d** ☹*)

- Η p_2 είναι προφανώς υπερπίεση: $p_2 > p_{\text{ατμοσφαιρική}}$

- Η εκροή θα σταματήσει όταν: $h = Y \quad (166) \quad \text{☹*}$

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot (h - Y)^{1/2} \quad (167)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$(153) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{(h - Y)^{1/21/2}} \quad (168)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

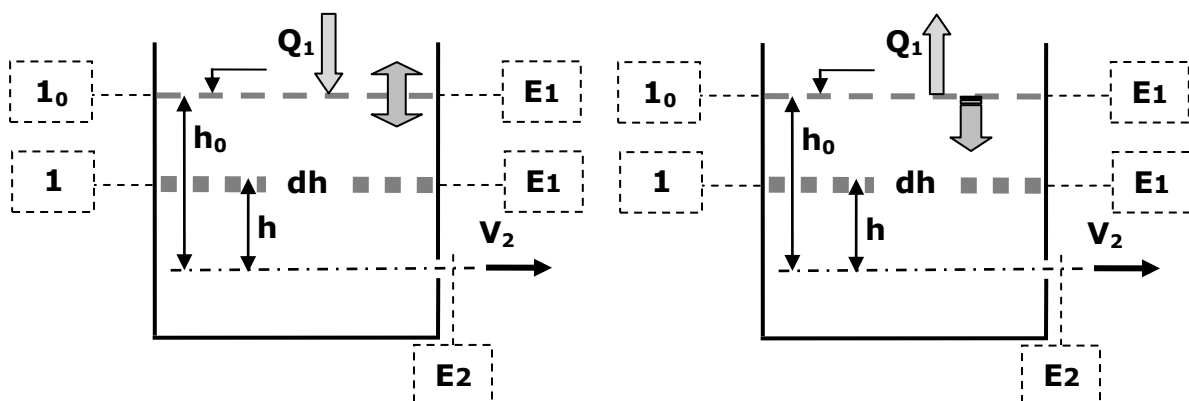
Προσοχή: Στην η εκροή τερματίζεται με βάση την (166) ☼

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{(h - Y)^{1/2}} = \quad (164)$$

Για **οριακή εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = Y\}$

8.7.10 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παράλλαγή VII - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, f, ΟΧΙ η e.**
- Στην **επιφάνεια** του **υγρού** (στάθμη δεξαμενής) **υπάρχει σταθερή εισροή Q_1** (ή εκροή) υγρού με **ίδιο ειδικό βάρος** με το υγρό στη δεξαμενή.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **a**, **b**, **c** και **d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \pm Q_1 \quad (165)$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση**: **f** αλλά **όχι** η **e** ☹)

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή το πρόσημο της **Q₁** είναι **(+)**

Στην περίπτωση **εκροής** παροχής από τη δεξαμενή το πρόσημο της **Q₁** είναι **(-)**

- Μορφώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow \frac{dh}{dt} = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \pm \frac{Q_1}{E_1} \quad (166)$$

Όπου η σταθερά είναι: $K_2 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή (**αναπλήρωσης**) η **φορά κίνησης** της **στάθμης εξαρτάται** από τη **σχέση** της **εισροής Q₁** και της **εκροής Q₂(h)** ☹
και υπάρχει μια **στάθμη ισορροπίας h[#]**, η οποία προκύπτει όταν **Q₁ = Q₂(h[#])**!

$$\rightarrow h^{\#} = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{Q_1}{c_2 \cdot E_2} \right)^2 \quad (167)$$

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ < Q₂(h₀)**, η **στάθμη** θα **κατέβει** και θα **ισορροπήσει** στο **h[#]**!

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ > Q₂(h₀)**, η **στάθμη** θα **ανέβει** και θα **ισορροπήσει** στο **h[#]**!

Εάν αρχικώς είναι **Q₁ = Q₂(h₀)**, δηλαδή $Q_1 = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2} \quad (168),$

η **στάθμη** θα **παραμείνει αμετάβλητη** στο **h₀ = h[#]** 🎶

- Ολοκληρώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση**: **f**)

Αλλά, λαμβάνοντας **υπόψη** τους ως άνω **περιορισμούς κατά περίπτωση**:

Στην περίπτωση **εισροής** παροχής στη δεξαμενή:

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_1} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) + \frac{Q_1}{E_1} \quad (169)$$

για $h: h_0 \rightarrow h^\#$, $t: 0 \rightarrow T^\#$

Για **οριακή ισορροπία** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h^\#\}$

Στην περίπτωση **εκροής** παροχής από τη δεξαμενή:

$$t = -K_2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} + \frac{Q_1}{E_1} = 2 \cdot K_2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) - \frac{Q_1}{E_1} \quad (170)$$

για $h: h_0 \rightarrow 0$, $t: 0 \rightarrow T$

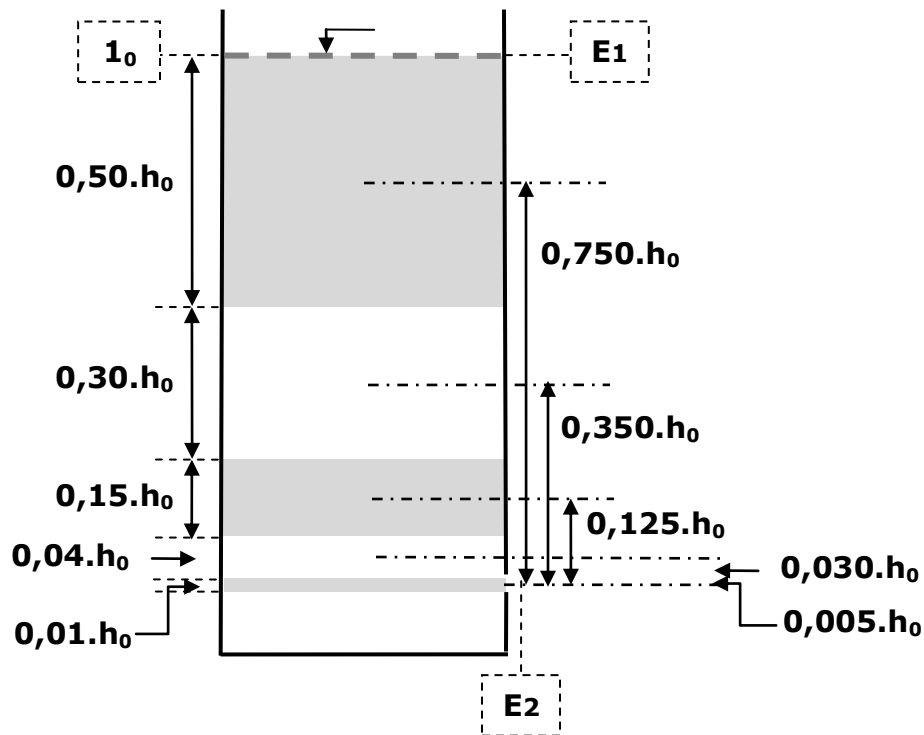
Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$

8.7.11 Αριθμητική ολοκλήρωση σύνθετων διαφορικών εξισώσεων

- Οι σύνθετες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της ως άνω διαδικασίας δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις δυνατό (ή ευχερές...) να ολοκληρωθούν με μαθηματική σχέση.
- Προτείνεται η διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσής τους με μέθοδο τύπου Simpson, κατά την οποία η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε εξίσωση πεπερασμένων διαφορών.
 - Προσδιορίζεται η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών, η οποία αντικαθιστά τη συνεχή διαφορική εξίσωση.
 - Το πεδίο εκροής – μεταβολής της στάθμης διαιρείται σε **άνισα διαστήματα – ευφυώς επιλεγόμενα** – αναλόγως με τη γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης.
 - Στα διαστήματα αυτά προσδιορίζεται το αντίστοιχο **εμβαδό** (ή όγκος) τους και το **κέντρο βάρους** τους και η **απόσταση του** από το **επίπεδο αναφοράς**.
 - Εφαρμόζεται η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών για κάθε διάστημα και υπολογίζεται ο **χρόνος μεταβολής της στάθμης στο διάστημα** αυτό.
 - Το **άθροισμα** των ως άνω **χρόνων προσεγγίζει ικανοποιητικώς** το χρόνο μεταβολής της στάθμης, ο οποίος θα προέκυπτε από τη **συνεχή** μαθηματική ολοκλήρωση.
- Για να γίνει **κατανοητή** ή **διαδικασία** και **τεκμηριωθεί** η **ακρίβεια** των αποτελεσμάτων **της**, θα την εφαρμόσουμε στη **βασική μορφή** (βλ. 8.7.3).

- $dt = -K_2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138) \rightarrow \Delta t^* = K_2 \cdot \frac{\Delta y}{\tilde{y}^{1/2}} \quad (138\Delta)$

- Τα **άνισα – ευφυώς επιλεγθέντα** – διαστήματα απεικονίζονται στο σχήμα με στρεβλή κατακόρυφη κλίμακα:



- Για να απλοποιηθούν οι πράξεις, θα θεωρήσουμε: $K_2 = 1$ και $h_0 = 100$. Δεν βλάπτεται η γενικότητα της διερεύνησης, διότι αναζητούμε σχετικά σφάλματα.

τμήμα	Δy	$\tilde{y}$	Δt^*	$\Sigma \Delta t^*$	t	$(\Sigma t^* - t)/t \%$
1	50	75,0	5,773503	5,773503	5,857864	-1,44
2	30	35,0	5,070926	10,844428	11,055728	-1,91
3	15	12,5	4,242641	15,087069	15,527864	-2,83
4	4	3,0	2,309401	17,396470	18,000000	-3,35
5	1	0,5	1,414214	18,810684	20,000000	-5,95

- Παρατηρήσεις – Συμπεράσματα:
 - ο Το τελικό σφάλμα για πλήρη εκκένωση **εμφανίζεται** περίπου **6%**. Τούτο είναι **παραπλανητικό** για την ακρίβεια της μεθόδου! Επί της ουσίας στο τελευταίο **1%** του αρχικού **ύψους**, είμαστε πιθανότατα **εντός της οπής!** Οπότε η «ακριβής» σχέση (138) είναι εκ των πραγμάτων **λανθασμένη** ☹*
 - ο Για **εκκένωση 99%**, το **σφάλμα** είναι μικρότερο από **3,5%**!
 - ο Για **εκκένωση 50%**, (με ένα βήμα!) το **σφάλμα** είναι μικρότερο από **1,5%**!
 - ο Επομένως, εφόσον ενδιαφερόμαστε για **χρηστικές εφαρμογές** της θεωρίας ιδεατών ρευστών σε **πραγματικά ρευστά** και όχι **μαθηματικο-φιλοσοφικές** αναζητήσεις του 19^{ου} αιώνα, η προτεινόμενη μέθοδος δίνει **απλή** και **αξιόπιστη λύση** σε οιαδήποτε **σύνθετη – πολύπλοκη** διαφορική εξίσωση 🎵
 - ο Επί των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης θα επανέλθουμε στο μάθημα (κατεύθυνσης) του 7^{ου} εξαμήνου: <Ροή Ανοικτών Αγωγών και Ποταμών>.

8.7.12 Διερεύνηση της περίπτωσης όπου η διατομή της δεξαμενής **δεν** είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διατομή της οπής

- Η **Γενική παραδοχή D**: <Η **διατομή** της **δεξαμενής** είναι **πολύ μεγαλύτερη** από τη **διατομή** της **οπής εκκένωσης** > (βλ. 8.7.2), οδήγησε

σε σχέσεις με τη γενική μορφή της (135): $V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$

Εάν την εφαρμόσουμε στα όρια προκύπτει ότι:

- ο Στην **αρχή** της **εκροής** η **ταχύτητα** έχει τη **μέγιστη τιμή**:

$$V_2 \max = (2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2}$$

- ο Στο **τέλος** της **εκροής** η **ταχύτητα** έχει την **ελάχιστη τιμή**:

$V_2 \min = 0$, δηλαδή η τελευταία σταγόνα εκρέει με μηδενική ταχύτητα!

- Ας θεωρήσουμε την περίπτωση, όπου δεν ισχύει η και για λόγους απλούστευσης ας θεωρήσουμε ότι: <Η **διατομή** της **δεξαμενής** είναι **ίση** με τη **διατομή** της **οπής εκκένωσης** >.

Το **αποτέλεσμα** της **ανάλυσης** και η **φυσική συμπεριφορά** του υγρού είναι **εντελώς διαφορετικά**:

Ο **όγκος** του **υγρού** στη **δεξαμενή** **συμπεριφέρεται** ως **στερεό σώμα**!

$$\rightarrow V_2^*(h) = [2 \cdot g \cdot (h_0 - h)]^{1/2} \quad (171)$$

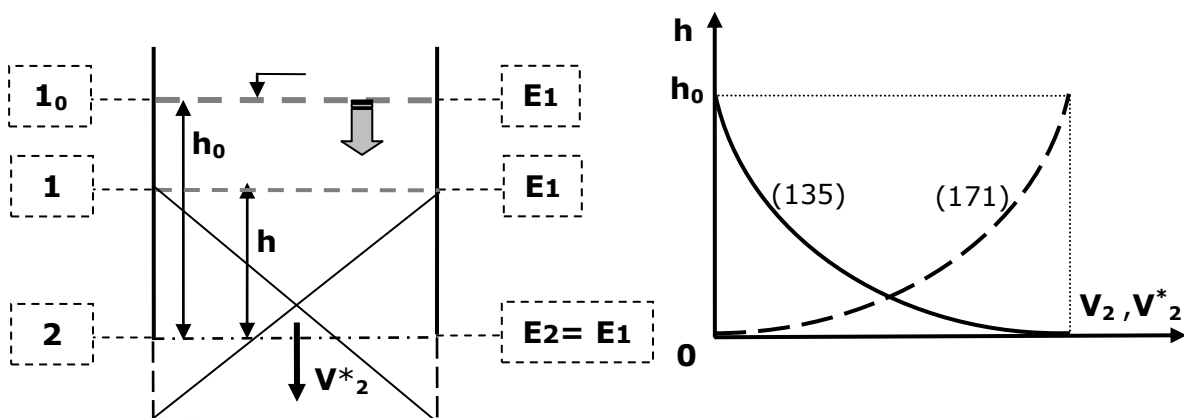
Εάν την εφαρμόσουμε στα όρια προκύπτει ότι:

- ο Στην **αρχή** της **εκροής** η **ταχύτητα** έχει την **ελάχιστη τιμή**:

$V_2^* \min = 0$, δηλαδή η πρώτη σταγόνα εκρέει με μηδενική ταχύτητα!

- ο Στο **τέλος** της **εκροής** η **ταχύτητα** έχει τη **μέγιστη τιμή**:

$$V_2^* \max = (2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2}$$



8.8 Εκκένωση δεξαμενών μέσω Υπερχειλιστών ή Θυροφραγμάτων

8.8.1 Γενικά

- Η μεθοδολογία του **8.7** είναι δυνατό να εφαρμοσθεί προσεγγιστικώς και στην περίπτωση εκκένωσης δεξαμενών μέσω Υπερχειλιστών λεπτής στέψης ή Θυροφραγμάτων λεπτής ακμής.
- **Γενικές παραδοχές:**
 - **A:** Δεν υπάρχει μέσα στη δεξαμενή **υδραυλική μηχανή**.
 - **B:** **Αμελούνται** οι **απώλειες ενέργειας** μέσα στη δεξαμενή.
 - **C:** Οι **συντελεστές συνόρθωσης α** στην **εξίσωση ενέργειας** είναι **1**.
 - **D:** Η **διατομή** της **δεξαμενής** είναι **πολύ μεγαλύτερη** από τη **διατομή** του **Υπερχειλιστή** ή του **Θυροφράγματος εκκένωσης**.
 - Η παραδοχή αυτή μέσω της εξίσωσης συνεχείας οδηγεί σε πολύ μικρή ταχύτητα καθόδου της επιφάνειας του υγρού (στάθμη της δεξαμενής) και **επιτρέπει** να **αμελήσουμε** τον αντίστοιχο όρο $V^2/2.g$ στην **εξίσωση ενέργειας** ♪
 - **E:** Η **απόσταση** της **διατομής πλήρους συστολής** της φλέβας από το τοίχωμα της δεξαμενής θεωρείται **αμελητέα**.
 - Επί πλέον θεωρείται **καθορισμένη** η **μορφή** του **Υπερχειλιστή** ή **Θυροφράγματος**, ώστε να είναι δυνατός ο **προσδιορισμός** των συντελεστών πλήρους συστολής **c** και παροχής **μ** κατά περίπτωση.
 - Ισχύουν **όλες** οι **Ειδικές προϋποθέσεις – δεσμεύσεις** (βλ. 8.7.2)

8.8.2 Υπερχειλιστής κατακόρυφος **συνεσταλμένος πλάτους B** (βλ. 8.4.3)

- (109) → $Q(h) = \frac{2}{3} \cdot (B - 0,2 \cdot h) \cdot \mu(h) \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot h^{3/2}$ (109a)
- Ταχύτητα προσαγωγής **V₀** στη δεξαμενή: $V_0 = 0$
- Συντελεστής παροχής **μ**: $\mu(h) = 0,605 + \frac{0,08 \cdot h}{w} + \frac{0,001}{h}$ (106a)
- (137) → $Q(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt}$ (137a)

8.9 Εφαρμογές υπολογισμού

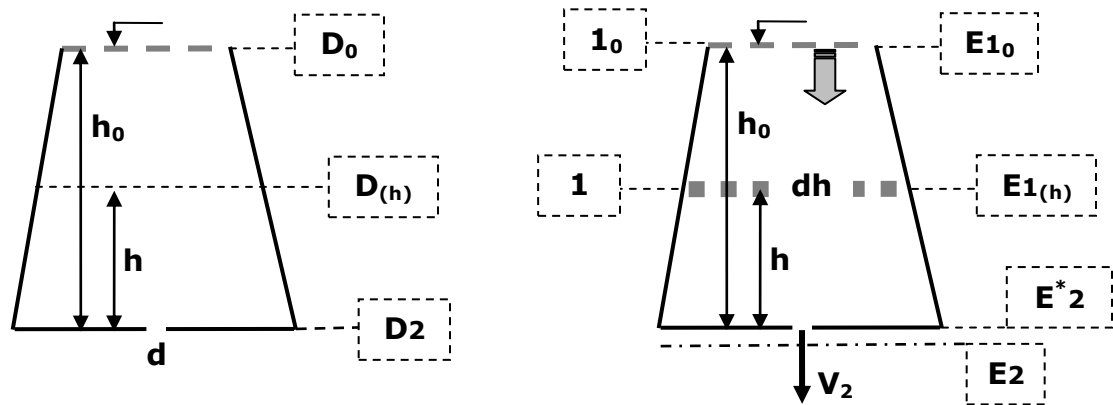
8.9.1 Η εφαρμογή αφορά στο 8.7.5

Στο κέντρο του πυθμένα λεπτότοιχης δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό υπάρχει μικρή απλή κυκλική οπή διαμέτρου d .

Η δεξαμενή έχει συμμετρικό κολουροκωνικό σχήμα με διάμετρο στον πυθμένα: D_2 και στο ανώτερο αρχικό επίπεδο, σε ύψος h_0 από τον πυθμένα, διάμετρο: D_0 (βλ. σχήμα).

Ζητείται ο απαιτούμενος χρόνος t , ώστε η στάθμη στη δεξαμενή να μειωθεί κατά το ήμισυ.

Αριθμητική εφαρμογή: $d = 8,0$ cm, $h_0 = 4,0$ m, $D_0 = 3,0$ m, $D_2 = 5,0$ m.



- Υπολογίζουμε τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη:

- $$D(h) = D_2 - \frac{D_2 - D_0}{h_0} \cdot h$$
- $$E_1(h) = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} - \frac{\pi \cdot D_2 \cdot (D_2 - D_0)}{2 \cdot h_0} \cdot h + \frac{\pi \cdot (D_2 - D_0)^2}{4 \cdot h_0^2} \cdot h^2$$
- $$E_2^* = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4}, E_{10} = \frac{\pi \cdot D_0^2}{4}, E_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, c_2 = 0,611$$
- $$D(h_0/2) = D_0 + \frac{D_2 - D_0}{2} \rightarrow E_1(h_0/2) = \frac{\pi \cdot (D_2 - D_0)^2}{8}$$
- $$E_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, c_2 = 0,611$$

- Εφαρμόζουμε τις απλοποιημένες εξισώσεις:

$$(135) \rightarrow h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c και d**)

$$(136) \rightarrow Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$(141) \rightarrow Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1(h) \cdot \frac{dh}{dt}$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: e** αλλά **όχι η f** ☹)

• Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$\rightarrow dt = -K \cdot E_1(h) \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} = -K \cdot \left[D_2^2 - \frac{2 \cdot D_2 \cdot (D_2 - D_0)}{h_0^2} \cdot h + \frac{(D_2 - D_0)^2}{h_0^2} \cdot h^2 \right] \cdot \frac{dh}{h^{1/2}}$$

$$\rightarrow dt = -K \cdot \left\{ \left[D_2^2 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \right] + \left[\frac{2 \cdot D_2 \cdot (D_2 - D_0)}{h_0^2} \cdot h \cdot dh \right] - \left[\frac{(D_2 - D_0)^2}{h_0^2} \cdot h^{3/2} \cdot dh \right] \right\}$$

Όπου η σταθερά K: $K = \frac{1}{c_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot d^2}$

• Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση (χωριστά τους τρεις όρους):

$$t = -K \cdot \left\{ \left[D_2^2 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} \right] + \left[\frac{2 \cdot D_2 \cdot (D_2 - D_0)}{h_0^2} \cdot \int_{h_A}^{h_B} h \cdot dh \right] - \left[\frac{(D_2 - D_0)^2}{h_0^2} \cdot \int_{h_A}^{h_B} h^{3/2} \cdot dh \right] \right\}$$

$$T = K(t_I - t_{II} + t_{III})$$

$$t_I = \left[2 \cdot D_2^2 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \right]$$

$$t_{II} = \left[\frac{D_2 \cdot (D_2 - D_0)}{h_0^2} \cdot (h_A^2 - h_B^2) \right]$$

$$t_{III} = \left[\frac{0,4 \cdot (D_2 - D_0)^2}{h_0^2} \cdot (h_A^{5/2} - h_B^{5/2}) \right]$$

Για $\{h_A = h_0, h_B = h_0/2\}$ είναι $t(h_0 \rightarrow \frac{h_0}{2})$

Αριθμητική εφαρμογή:

K= 57,733690, **t_I**= 29,289322, **t_{II}**= 7,500000, **t_{III}**= 1,317157
 $\rightarrow T = 1.334,0223 \text{ s} \approx \mathbf{22 \text{ min} + 14 \text{ s}}$

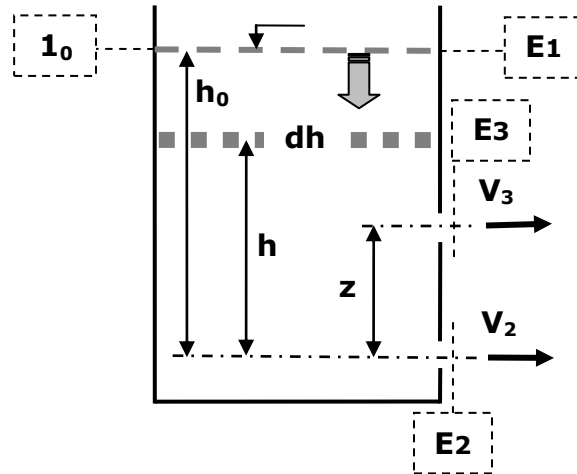
8.9.2 Η εφαρμογή αφορά στο 8.7.6

Στην κατακόρυφη παρειά *λεπτότοιχης* δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό υπάρχουν δύο μικρές *απλές* κυκλικές οπές διαμέτρου **d**, των οποίων οι άξονες απέχουν κατακόρυφα κατά ύψος **z**.

Η δεξαμενή έχει τετραγωνική οριζόντια διατομή με πλευρά **a** και αρχική στάθμη σε ύψος **h₀** από τον άξονα της χαμηλότερης οπής (βλ. σχήμα).

Ζητείται ο απαιτούμενος χρόνος **t**, ώστε η στάθμη στη δεξαμενή να μεταβληθεί από την αρχική στο επίπεδο του άξονα της υψηλότερης οπής.

Αριθμητική εφαρμογή: **d = 5,0 cm**, **z = 1,0 m**, **a = 2,0 m**, **h₀ = 3,0 m**.



- Εφαρμόζουμε τις **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$(135) \rightarrow h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$(145) \rightarrow h + \frac{p_1}{\gamma} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_3(h) = [2 \cdot g \cdot (h - z)]^{1/2}$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **a**, **b**, **c** και **d** για **καθεμιά οπή χωριστά!**)

$$(136) \rightarrow Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$(146) \rightarrow Q_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot V_3(h) = c_3 \cdot E_3 \cdot [2 \cdot g \cdot (h - z)]^{1/2}$$

$$Q_3(h) + Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_3(h) + Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \text{ για } h_0 \geq h > z$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις**: **e** και **f** και **για τις δύο οπές**)

- Μορφώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$dt = - \left(\frac{K}{c_2 \cdot E_2 \cdot h^{1/2} + c_3 \cdot E_3 \cdot (h - z)^{1/2}} \right) \cdot dh, \text{ ισχύει για } h : h_0 \rightarrow z, t : 0 \rightarrow T$$

Όπου η σταθερά είναι: $K = \frac{a^2}{(2 \cdot g)^{1/2}}$ και $c_2 \cdot E_2 = c_3 \cdot E_3 = 0,611 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

$$t = \frac{4 \cdot K}{0,611 \cdot \pi \cdot d^2} \cdot \int_{h_c}^{h_D} \frac{dh}{h^{1/2} + (h - z)^{1/2}} = K^* \cdot \int_{h_c}^{h_D} \frac{dh}{h^{1/2} + (h - z)^{1/2}}$$

$$\text{Όπου: } K^* = \frac{4 \cdot a^2}{0,611 \cdot \pi \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot d^2}$$

Για την εκκένωση της εκφόνησης είναι: $\{h_c = h_0, h_D = z\}$

Για μαθηματική ολοκλήρωση βλ. <Τεύχος Λυμένων Ασκήσεων – Τ. Παπαθανασιάδη>
Άσκηση 8.16 – σελίδα **8-15**

Θα εφαρμόσουμε <εδώ> τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης (βλ. 8.7.11)

Αριθμητική εφαρμογή: $c = 0,611 \rightarrow K = 752,730285$, $z = 1,0$ m και $h_0 = 3,0$ m.

$$\Delta t^* = K^* \cdot \frac{\Delta y}{\tilde{y}_3^{1/2} + \tilde{y}_2^{1/2}}$$

τμήμα	Δy [m]	$\tilde{y}_3$ [m]	$\tilde{y}_2$ [m]	Δt^* [s]	$\Sigma \Delta t^*$ [s]
1	1,00	1,500	2,500	268,268526	268,268526
2	0,60	0,700	1,700	210,996526	479,265052
3	0,30	0,250	1,250	139,563870	618,828922
4	0,08	0,006	1,006	55,734309	674,563231
5	0,02	0,010	1,010	13,624231	688,187462

$\rightarrow T = 688,187462 \text{ s} \approx \mathbf{11 \text{ min} + 28 \text{ s}}$

Η διαφορά με τη μαθηματική ολοκλήρωση είναι μόλις 1,183 s, ή **0,27%** ♪