M.Δ.Ε (ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ) ①

Laplace (Πρόβλημα + συνοριακές)

Π.χ.

$u_{xx}+u_{yy}=0$ $\quad x\in[0,a]$

$\quad y\in[0,b]$

$u(0,y)=0 \quad u(a,y)=0$

$u(x,0)=0 \quad u(x,b)=f(x)$

αλλιώς → επαλλαγή όμοιων λεξ.

ομογενές + ομογενής συνοριακές → απλός χωρ. μετ.

$u(x,y)=F(x)\cdot G(y)$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=-\frac{G''(y)}{G(y)}=-\lambda$$

με $F(0)=F(a)=0$

$Y(0)=0.$

Το σύστημα σ.δ.ε. δίνει

$$F_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$G_n(y)=B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u_n(x,y)=F_n(x)\cdot G_n(y)\xrightarrow{\text{fourier}}u(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\left[\sinh\frac{n\pi y}{a}\right]$$

$$u(x,b)=f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

fourier → $A_n\cdot\sinh\frac{n\pi y}{a}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$

οι συνοριακές συνθήκες (παίζουν)

$u_{xx}+u_{yy}=0$ → $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$

$r\in(0,R]$ $\quad u(R,\theta)=f(\theta)$

$\theta\in[-\pi,\pi]$ $\quad |u(r,\theta)|<+\infty$ when $r\to0^+$

$u(r,-\pi)=u(r,\pi)$

$u_\theta(r,-\pi)=u_\theta(r,\pi)$

Με απλό χωρισμό

$$u(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta)$$

$$H''(\theta) + \lambda H(\theta) = 0 \qquad \begin{matrix} H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{matrix}$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0 \qquad |R(r)| < +\infty \quad r \to 0^+.$$

$$H_n(\theta) = C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \qquad \lambda_n = n^2.$$

$$R(r) = \begin{matrix} 1 \text{ (αυθ.)} \quad n=0 & (c_3 + c_4 \ln r) \\ \left(\frac{r}{R}\right)^n \text{ αυθ το } \left(\frac{r}{R}\right)^n & (c_1 r^n + c_2 r^{-n}). \end{matrix}$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right]$$

$u(R,\theta) = f(\theta)$ άρα από Fourier.

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta.$$

Αν
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad u(r,-\pi) = u(r,\pi)$$

$$|u(r,\theta)| < +\infty \qquad r \to +\infty \qquad u_\theta(r,-\pi) = u_\theta(r,\pi)$$

$$r > R \qquad \theta \in [-\pi,\pi]$$

τότε το μόνο που αλλάζει είναι το $\left(\frac{r}{R}\right)^n \to \left(\frac{R}{r}\right)^n$.

Σε δακτύλιο αφαιρούμε τα u .....

Αν χάσω την περιοδικότητα αλλοιώνεται το H.

Εξίσωση Θερμότητας (ομογενής), +(ομογενείς σ.σ. + α.σ.) ③

$k^{-2}u_t = u_{xx} \quad x \in [0,P] \quad t \geq 0$

$u(0,t) = 0$ Απλός χωρισμός.

$u(P,t) = 0$ $\quad u(x,t) = F(x)\,G(t)$

$u(x,0) = f(x)$

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0 \qquad F(0) = 0 = F(P)$$

$$G'(t) + \lambda k^2 G(t) = 0$$

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{P}$$

$$G_n(t) = c_n \cdot e^{-n^2\pi^2 t \cdot k^2/P^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{P} \cdot e^{-n^2\pi^2 k^2 t/P^2}$$

$$c_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} \sin\frac{n\pi x}{P} f(x)\,dx.$$

$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$!

Αν οι σ.σ., α.σ., μη ομογενείς όροι χρόνο ανεξάρτητες.

πχ1. $u_t = k^{-2}u_{xx}$

$u(0,t) = T_1 \qquad T_1 \neq T_2 \in \mathbb{R}$

$u(P,t) = T_2$

$u(x,0) = f(x)$

$$u(x,t) = v(x,t) + S(x). \rightarrow S''(x) + v_{xx} = k^2 v_t$$

άρα $\left.\begin{array}{l} S''(x) = 0 \\ S(0) = T_1 \\ S(P) = T_2 \end{array}\right| \Rightarrow S(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{P}(x)$

και $\left\{\begin{array}{l} v_{xx} = k^2 v_t \\ v(0,t) = 0 \qquad v(x,0) = f(x) - S(x) \\ v(P,t) = 0 \end{array}\right\}$ απλός χωρ.

Πχ.2 $u_{xx} = u^{-2}u_t - p(x)$ $\quad u(0,t)=T_1$, $u(B,t)=T_2$, $u(x,0)=f(x)$

όμοια
$$\boxed{\begin{aligned} &S''(x) = -p(x) \\ &S(0)=T_1 \\ &S(P)=T_2 \end{aligned}}$$

και
$$\boxed{\begin{aligned} &v_{xx} = u^{-2} v_t \\ &v(0,t) = 0 = v(B,t) \\ &v(x,0) = f(x) - S(x) \end{aligned}}$$
Απλός χωρ.

Γενίκευση σειρών Fourier, χωρισμού μεταβλητών.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot \phi_n(x) \qquad c_n = \|\phi_n\|^{-2} \int_0^P f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$
$$\|\phi_n\|^{-2} = \frac{1}{\left\{\left(\int_0^P \phi_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)\cdot\phi_n(x).$$

Η Γενίκευση του χωρ. μετ. χρησιμεύει όταν έστω και ένα από τη ομογ. όρους ή σ.σ. ή α.σ. είναι χρονοεξαρτώμενη.

Πχ1 Έστω $u_{xx} = u^{-2} u_t - q(x,t)$.
με $\Sigma_1[u]=0$
$\Sigma_2[u]=0$
$u(x,0)=f(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)\,\phi_n(x) \qquad \phi_n : \to \phi'' + \lambda\phi = 0$$
ομογ. σ.σ. $\begin{cases} \Sigma_1[X]=0 \\ \Sigma_2[X]=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} X(0)=0 \\ X(P)=0 \end{cases}$

με πράξεις

$$u^2 q(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[E_n'(t) + u^2 \lambda_n E_n(t) \right] \phi_n(x)$$

$$E_n'(t) + u^2\lambda_n E_n(t) = \underbrace{\|\phi_n\|^{-2} \cdot \int_0^P \phi_n \cdot u^2 q(x,t)\,dx}_{Q_n(t)}$$

με $u(x,0) = f(x) \to$ μον. λύση.

Πχ2 $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = a(t)$

$u(l,t) = b(t)$.

$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{ομογεν.}} + \underbrace{w(x,t)}_{\text{μη ομ.}}$

Αφού θέλουμε $v(x,t)$ ομ. σ.σ.

$$\left.\begin{array}{l} w(0,t) = a(t) \\ w(l,t) = b(t) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Αυθ}]{} w(x,t) = \frac{x}{l}\left(-a(t) + b(t)\right) + a(t).$$

Άρα

$$\boxed{\begin{array}{l} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) \\ v(x,0) = f(x) - w(x,0) = f(x) - \frac{x}{l}\left(b(0) - a(0)\right) + a(0). \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0. \qquad f(x,t) = -a'(t) - \frac{x}{l}\left(b'(t) - a'(t)\right) \end{array}}$$

Γ. Χ. Μ.

~~w(x,t)~~

Κυματική εξίσωση. (Πεπερασμένη) (Άπειρα δύο D'Alembert)

$u_{xx} = c^2 u_{tt}$

$u(0,t) = 0$

$u(P,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$.

Απλός χωρ. $\rightarrow$ $X'' - \lambda X = 0$

$W'' - c^2 \lambda W = 0$

$X(x) \cdot W(t) = u(x,t)$

$X(0) = 0$

$X(P) = 0$.

$X(x) = \sin \frac{n\pi x}{P}$

$W(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{P} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{P} t$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi x}{P} \left[a_n \cos \frac{n\pi c}{P} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{P} t\right]$$

Άρα

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^{P} f(x) \sin \frac{n\pi x}{P} dx$$

$$b_n = \frac{1}{cn\pi} \int_{-P}^{P} g(x) \sin \frac{n\pi x}{P} dx$$

Αν ο μη ομογενής όρος είναι μορφής $P(x)\sin\omega t$.

$$+ \quad \Sigma_1[u] = \sigma_{11} u(0,t) + \sigma_{12} u_x(0,t) = 0$$
$$\Sigma_2[u] = \sigma_{21} u(P,t) + \sigma_{22} u_x(P,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

Χωρίζεται

$$u_{xx} = c^{-2} u_{tt} \qquad\qquad u_{xx} = c^{-2} u_{tt} - P(x)\sin\omega t$$
$$\Sigma_1[u] = 0 \quad + \quad \Sigma_1[u] = 0$$
$$\Sigma_2[u] = 0 \qquad\qquad \Sigma_2[u] = 0$$
$$u_0 \qquad\qquad u_M = Y(x)\sin\omega t + Z(x)\cos\omega t$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos \kappa_n c t + b_n \sin \kappa_n c t]\,\phi_n(x)$$

$$Y'' + \frac{\omega^2}{c^2} Y = -P$$
$$Z'' + \frac{\omega^2}{c^2} Z = 0 \xrightarrow{\text{Απο}} Z = 0$$

$$u = Y(x)\sin\omega t + \sum [a_n \cos\kappa_n c t + b_n \sin \kappa_n c t]\,\phi_n(x)$$

Από ΑΣ

$$a_n = \|\phi_n\|^{-2} \int_0^P f(x)\cdot\phi_n(x)\,dx$$
$$b_n = \frac{\|\phi_n\|^{-2}}{\kappa_n c} \int_0^P (g(x) - \omega Y(x))\,dx$$

Γενική μη ομ. εξίσωση

$$u_{xx} = c^{-2} u_{tt} - q(x,t)$$
$$\Sigma_1[u] = 0$$
$$\Sigma_2[u] = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

Αν $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)\,\phi_n(x)$

$\phi_n \to X'' + \lambda X = 0$

$\Sigma_1 = \Sigma_2[X] = 0$.

$$c^2 q(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[E_n''(t) + c^2 \kappa_n^2 E_n(t)]}_{Q_n(t)}\,\phi_n(x)$$

$$Q_n(t) = \|\phi_n(x)\|^{-2} \int_0^P c^2 q(x,t)\cdot\phi_n(x)\,dx.$$

$$E_n(t) = \frac{c}{\kappa_n} \int_0^t \sin \kappa_n c(t-z)\, Q_n(z)\,dz$$

Εξ. δοκού

$u_{xxxx} = u_{tt}.$

$u(0,t) = 0$
$u_{xx}(0,t) = 0$
$u(1,t) = 0$
$u_{xx}(1,t) = 0$ } Αμφιερειστή.
$u(x,0) = f(x)$
$u_t(x,0) = g(x)$

$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

Έστω

$T(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$X'''' - \omega^2 X = 0$

$X = c_1\cos\sqrt{\omega}x + c_2\sin\sqrt{\omega}x$
$c_3\cosh\sqrt{\omega}x + c_4\sinh\sqrt{\omega}x$

σ.σ. $c_1 = c_3 = 0.$ $c_4 = 0$

$\omega_n = n^2\pi^2$

$X_n(x) = \sin n\pi x$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\pi x \left[a_n \sin n^2\pi^2 t + b_n \cos n^2\pi^2 t\right]$$

ΑΣΦ

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 g(x)\sin n\pi x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$$

Μιγαδική ανάλυση