

6.1 Δίνεται το δισδιάστατο πεδίο ταχυτήτων: $u = a \cdot x, v = -a \cdot y$, όπου $a =$ σταθερά

Ζητούνται:

1. Να αποδειχθεί ότι το πεδίο αυτό παριστάνει ροή ασυμπίεστου ρευστού.
2. Να χαρακτηριστεί το πεδίο ως αστρόβιλο ή στροβιλό.
3. Να προσδιοριστούν οι επιταχύνσεις και οι εξισώσεις των γραμμών ροής, οι οποίες να *παρασταθούν* και γραφικά.
4. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ και να υπολογιστεί η παροχή, η οποία περνά από ένα ευθύγραμμο τμήμα με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) .
5. Να προσδιοριστεί η δυναμική συνάρτηση $\Phi(x, y)$.

<βλ. 7.3.2 FM NV401_11 A>

- $\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{\partial v}{\partial y} = -a \rightarrow$ ικανοποιείται η (70) $\rightarrow$ η ροή είναι ασυμπίεστου ρευστού

- $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow$ ικανοποιείται η (28) $\rightarrow$ το πεδίο είναι αστρόβιλο

- $\frac{\partial u}{\partial t} = 0, u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \cdot x, v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, από (25α) $\rightarrow \alpha_x = a^2 \cdot x$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = a^2 \cdot y, \text{ από (25β) } \rightarrow \alpha_y = a^2 \cdot y$$

- (26) $\rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \rightarrow \ln x = -\ln y + c_1$

$$\text{θέτω: } c_1 = \ln c \rightarrow \ln x = \ln c - \ln y = \ln \frac{c}{y} \rightarrow x = \frac{c}{y}$$

- (83) $\rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = a \cdot x \rightarrow \Psi = a \cdot x \cdot y + c_1(x)$

$$\text{και } -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -a \cdot y \rightarrow c_1'(x) = 0 \rightarrow c_1(x) = C_1$$

$$(86) \rightarrow q_{1-2} = a \cdot (x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1)$$

- (76α) $\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \cdot x \rightarrow \Phi = \frac{a}{2} \cdot x^2 + c_1(y)$

$$\text{και } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -a \cdot y \rightarrow c_1'(y) = -a \cdot y \rightarrow c_1(y) = -\frac{a}{2} \cdot y^2$$

$$\rightarrow \Phi(x, y) = \frac{a}{2} \cdot (x^2 - y^2)$$

6.2 Διώρυγα ορθογωνικής διατομής, μεγάλου πλάτους, σχεδιάζεται με οριζόντιο πυθμένα (μηδενική κατά μήκος κλίση) και μεταφέρει νερό με παροχή q ανά μέτρο πλάτους της. Στη διώρυγα προβλέπεται άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΓ** λεπτής ακμής. Το τμήμα ΑΒ είναι κατακόρυφο με μήκος L_{AB} και το τμήμα ΒΓ έχει κλίση 30° ως προς την οριζόντια και μήκος L_{BG} .

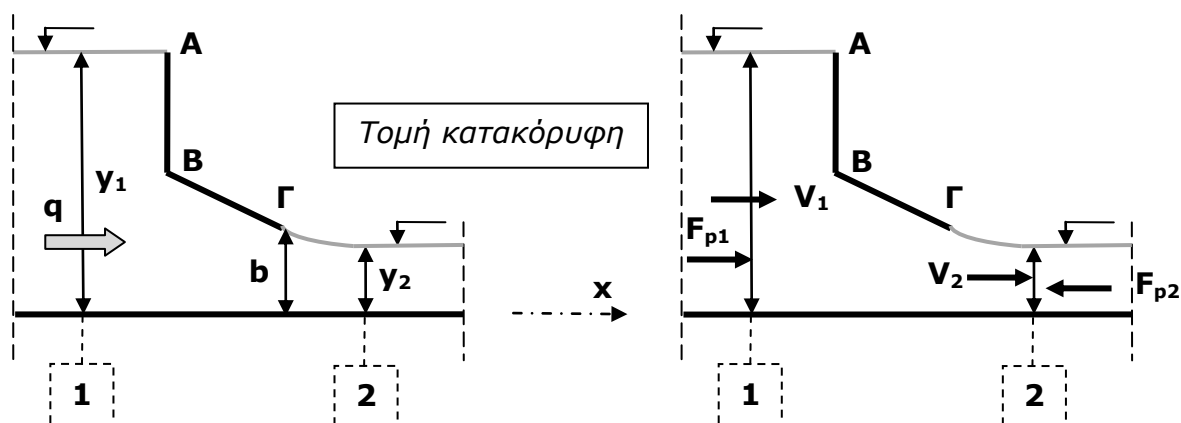
Το βάθος ομοιόμορφης ροής με ελεύθερη επιφάνεια στη διατομή (1) ολίγον ανάντη του θυροφράγματος είναι y_1 (βλ. σχήμα).

Αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστούν:

1. Το βάθος ροής y_2 στη διατομή (2) πλήρους συστολής ως συνάρτηση των y_1 , L_{AB} , L_{BG} και του συντελεστή πλήρους συστολής c .
2. Η μεταφερόμενη παροχή q .
3. Η οριζόντια δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα (ανά μέτρο πλάτους).

Αριθμητική εφαρμογή: $y_1 = 4,0$ m, $L_{AB} = 2,0$ m, $L_{BG} = 2,0$ m.

Ο συντελεστής c να ληφθεί από τον πίνακα Pajer



<βλ. 8.6.4 FM NV401_12 A>

$$b = y_1 - (L_{AB} + L_{BG} \cdot \sin 30^\circ) \rightarrow b = 1,0 \text{ m} \rightarrow b/y_1 = 0,25$$

Από τον πίνακα Pajer διότι μας το επιτρέπει – προτρέπει η εκφώνηση 🎵

και γραμμική παρεμβολή $\rightarrow c = 0,6041 \rightarrow y_2 = 0,6041$ m

Από (130) $\rightarrow \mu = 0,563075$

Από (126) $\rightarrow q = 4,998224 \approx 5,00$ m²/s

Προσοχή: Ο υπολογισμός των δυνάμεων βασίζεται στη <Μονοδιάστατη Ανάλυση> <βλ. 5.3.7 FM NV401_7 A> και όχι την <Υδροστατική> 🐼

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς**.
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**.
- Καταστρώνουμε **μόνο** τις απαραίτητες εξισώσεις 🐼

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot y_1 - V_2 \cdot y_2 = q_1 - q_2 = 0$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V}_1 \cdot \vec{q}_1) - (\vec{V}_2 \cdot \vec{q}_2) \right] = \sum_1^2 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot \left[(V_1 \cdot q_1) - (V_2 \cdot q_2) \right] = (\gamma \cdot y_1 \cdot y_1) - (\gamma \cdot y_2 \cdot y_2) + N_x$$

Άγνωστα μεγέθη: $y_1, V_1, y_2, V_2, q_2, N_x$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$q_1 = q_2 = q \rightarrow V_1 = \frac{q}{y_1}, V_2 = \frac{q}{y_2}$$

$$\rightarrow N_x = \frac{\gamma \cdot q^2 \cdot (y_1 - y_2)}{g \cdot y_1 \cdot y_2} - (\gamma \cdot y_1 \cdot y_1) + (\gamma \cdot y_2 \cdot y_2)$$

$$\text{όπου: } y_1 = \frac{y_1}{2} \text{ και } y_2 = \frac{y_2}{2}$$

$$\rightarrow N_x = \frac{\gamma \cdot q^2 \cdot (y_1 - y_2)}{g \cdot y_1 \cdot y_2} - \frac{\gamma}{2} (y_1^2 - y_2^2)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_1 = 1,250000 \text{ m/s}, V_2 = 8,276775 \text{ m/s}, y_1 = 2,000 \text{ m και } y_2 = 0,302 \text{ m}$$

$$N_x = -4,236097 \text{ t}$$

$$\rightarrow \mathbf{N'_x = + 4,236097 \text{ t} = + 41,556 \text{ kN}}$$

Αυτή είναι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στα στερεά όρια του όγκου αναφοράς, δηλαδή συμπεριλαμβάνεται **και** η δύναμη την οποία αναλαμβάνει (λόγω τριβών) ο πυθμένας ♦

Εάν τη δύναμη στον πυθμένα θεωρήσουμε αμελητέα (λόγω μικρού μήκους), τότε μόνο η $\mathbf{N'_x}$ είναι δυνατό να θεωρηθεί ως η οριζόντια δύναμη η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα.

Πρόσθετη διερεύνηση (πέραν των απαιτήσεων της εκφώνησης):

Να υπολογιστούν οι **αριθμοί Froude** στις δύο διατομές και να χαρακτηρισθεί η ροή ως υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη.

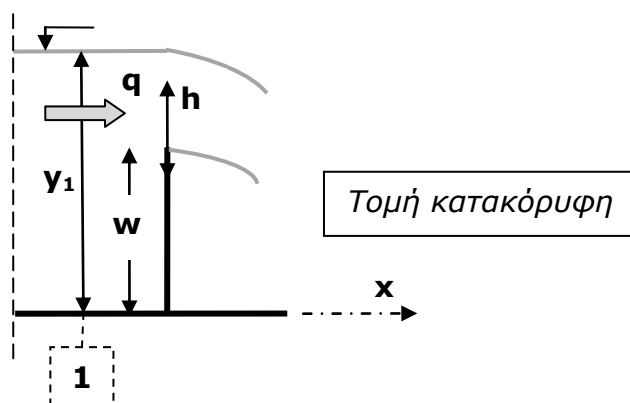
ο **1:** [$V_1 = 1,250 \text{ m/s}, y_1 = 4,000 \text{ m}$], (69) $\rightarrow F = 0,200 \rightarrow$ υποκρίσιμη

ο **2:** [$V_2 = 8,277 \text{ m/s}, y_2 = 0,604 \text{ m}$], (69) $\rightarrow F = 3,400 \rightarrow$ υπερκρίσιμη

6.3 Στη διώρυγα της προηγούμενης άσκησης 6.2 εξετάζεται η εναλλακτική λύση τοποθέτησης καθολικού υπερχειλιστή λεπτής στέψης με ύψος w .

Η παροχή q (ανά μέτρο πλάτους) έχει την ίδια τιμή και το βάθος ομοιόμορφης ροής στη διατομή (**1**) ολίγον ανάντη του θυροφράγματος παραμένει y_1 (βλ. σχήμα).

Ζητείται να υπολογιστεί το ύψος w με χρήση του εμπειρικού τύπου του Rehbock.



<βλ. 8.6.3 FM NV401_12 A>

$y_1 = 4,00$ m $\rightarrow h+w = 4,00$ m και $q = 5,00$ m²/s

ο (118) $\rightarrow A_3 = 1,421073$ - εφαρμόζω την (117)

ο Επιλέγω ως 1η τιμή εκκίνησης: $h_1 = 1,894763$

h_1	w_1	μ_1	h_2	w_2	$\Delta w_{(2-1)}\%$
1,894763	2,105237	0,677530	1,842174	2,157826	+2,50 ✓

μ_2	h_3	w_3	$\Delta w_{(3-2)}\%$
0,673840	1,848892	2,151108	-0,31 ✓

$\rightarrow w = 2,151$ m

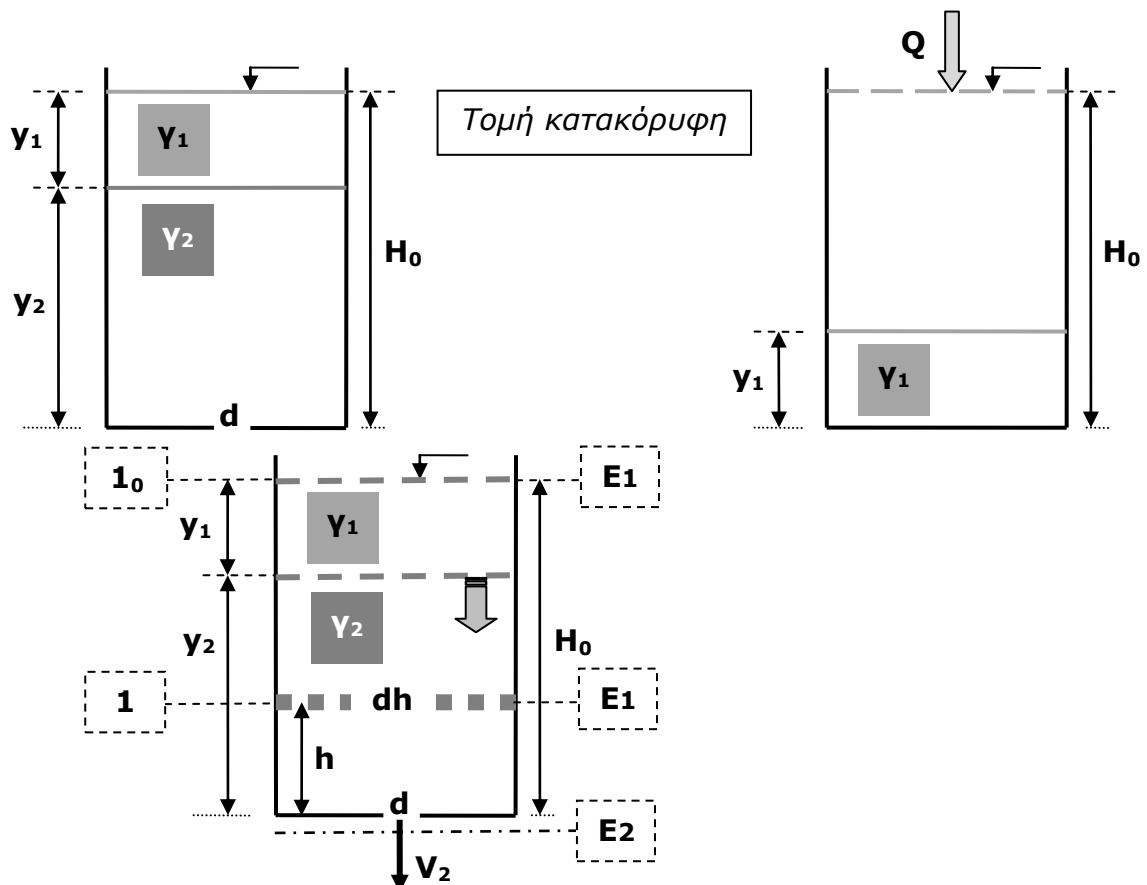
6.4 Κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο D και αρχικό συνολικό βάθος H_0 περιέχει δύο στρώσεις υγρών: Πετρέλαιο με ειδικό βάρος γ_1 και βάθος y_1 και νερό με ειδικό βάρος γ_2 και βάθος y_2 . Τα αρχικά βάθη των δύο υγρών y_1 και y_2 είναι άγνωστα.

Προκειμένου να διαπιστωθεί πόσο νερό περιέχει η δεξαμενή, ανοίγεται στον πυθμένα του δοχείου μικρή οπή, διαμέτρου d και μετράται ο χρόνος T εκροής του νερού από την οπή μέχρι τη στιγμή όπου αρχίζει να εκρέει πετρέλαιο.

1. Ζητείται να υπολογιστεί το ύψος y_2 της στρώσης νερού ως συνάρτηση των D , H_0 , γ_1 , γ_2 , d και του χρόνου T εκροής του νερού.

2. Εάν μετά το πέρας της εκροής του νερού κλείσει η οπή, να υπολογιστεί ποιά πρέπει να είναι η παροχή τροφοδοσίας πετρελαίου Q , ώστε το δοχείο να γεμίσει με πετρέλαιο μέχρι το ύψος H_0 σε ίσο χρόνο T .

Αριθμητική εφαρμογή: $D = 1,20$ m, $H_0 = 0,90$ m, $\gamma_1 = 0,82$ t/m³, $\gamma_2 = 1,00$ t/m³, $d = 12,0$ cm και $T = 58,0$ s.



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot y_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} \quad \text{για } h > y_2$$

Είναι και: $y_2 = H_0 - y_1$

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\gamma_1 \cdot y_1}{\gamma_2} \right)^{1/2}$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt}$$

(διότι αρχικώς **δεν** υπάρχει εισροή **Q**)

- Μορφώνουμε την πολύπλοκη διαφορική εξίσωση:
- Αριθμητική εφαρμογή: $y_1 = 0,65$ m και $Q = 0,013$ m³/s