

8.7 Εκκένωση δοχείων – δεξαμενών μέσω μικρών οπών

8.7.1 Εισαγωγή

- Πεδίο επίλυσης πρακτικών προβλημάτων **μη μόνιμης ροής** με επιμέρους στάδια:
 - Υπολογισμός της **μεταβαλλόμενης ταχύτητας εκροής** (ή εισροής).
 - Υπολογισμός της **διαφορικής εξίσωσης μεταβολής της στάθμης** στο δοχείο.
 - Υπολογισμός του **χρόνου μεταβολής της στάθμης** με ολοκλήρωση της ως άνω διαφορικής εξίσωσης.
- Το πρόβλημα υπολογισμού της ταχύτητας έχει ήδη λυθεί μέσω του θεωρήματος Torricelli (βλ. 7.2.1) και στην απλή του μορφή περιγράφεται στο βιβλίο 
- Στη συνέχεια προτείνεται μια διαδικασία επίλυσης, οποία αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου **Μονοδιάστατης Ανάλυσης** σε **μη μόνιμη ροή**
Καλύπτεται ένα ευρύ πεδίο περιπτώσεων – παραλλαγών και **εάν** η διαδικασία **αξιοποιηθεί** με **δημιουργικό τρόπο**, οδηγεί στην **επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος**.
- Το πεδίο επίλυσης προβλημάτων είναι δυνατό να γενικευθεί συμπεριλαμβάνοντας και εκροές (ή εισροές) μέσω αγωγών μικρής διατομής.

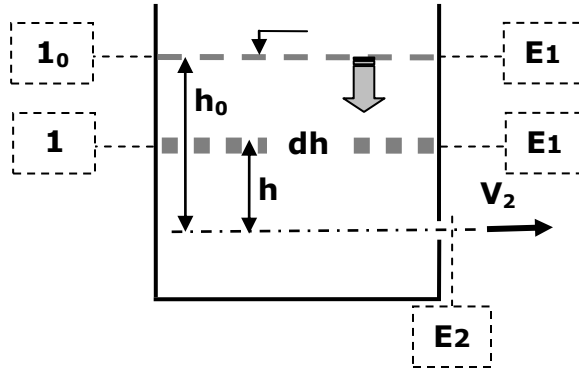
8.7.2 Η θεμελίωση της διαδικασίας

- Χρησιμοποιούμε τις **Γενικές Εξισώσεις Συνεχείας** (52α) και **Ενέργειας** (57α), τις οποίες **απλοποιούμε** με βάση πέντε (5) **Γενικές παραδοχές** και όσες από τις **Ειδικές προϋποθέσεις – δεσμεύσεις ισχύουν, έως κάποιο σημείο.**
- **Γενικές παραδοχές:**
 - **A:** Δεν υπάρχει μέσα στη δεξαμενή **υδραυλική μηχανή**.
 - **B:** Αμελούνται οι **απώλειες ενέργειας** μέσα στη δεξαμενή.
 - **C:** Οι **συντελεστές συνόρθωσης α** στην **εξίσωση ενέργειας** είναι **1**.
 - **D:** Η **διατομή της δεξαμενής** είναι **πολύ μεγαλύτερη** από τη **διατομή της οπής** (ή του αγωγού) **εκκένωσης** (ή πλήρωσης).
 - Η παραδοχή αυτή μέσω της εξίσωσης συνεχείας οδηγεί σε πολύ μικρή ταχύτητα καθόδου (ή ανόδου) της επιφάνειας του υγρού (στάθμη της δεξαμενής) και **επιτρέπει να αμελήσουμε** τον αντίστοιχο όρο $V^2/2.g$ στην **εξίσωση ενέργειας** ♪
 - Όταν δεν ισχύει, η επίλυση αλλάζει συνολικά (βλ. 8.7.?)!
 - **E:** Η **απόσταση της διατομής πλήρους συστολής** της φλέβας από το τοίχωμα της δεξαμενής θεωρείται **αμελητέα**.
 - Επί πλέον θεωρείται **καθορισμένη** η **μορφή** των **οπών**, ώστε να είναι δυνατός ο **προσδιορισμός** των συντελεστών πλήρους συστολής **c_i** καθεμιάς.

- **Κατάλληλος – μεταβλητός όγκος αναφοράς:**
 - **Διατομή εισόδου**, στην περίπτωση εκροής, είναι η **μεταβλητή επιφάνεια** του ενιαίου υγρού μέσα στη δεξαμενή, ή η (επίσης μεταβλητή) διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ της κατώτερης στρώσης ρευστού και της αμέσως υψηλότερης στρώσης υγρού.
 - **Διατομές εξόδου**, στην περίπτωση εκροής, είναι οι **διατομές πλήρους συστολής** της φλέβας σε **όλες** τις **οπές**.
 - Προφανώς, σε περίπτωση εισροής στη δεξαμενή, οι παραπάνω διατομές παραμένουν ως επιλογή, αλλά ο χαρακτηρισμός τους είναι αντίστροφος.
- **Επίπεδο αναφοράς – αρχή χρόνου εκκένωσης** (ή πλήρωσης):
 - Ως **επίπεδο αναφοράς** λαμβάνεται το **επίπεδο** της **χαμηλότερης διατομής εξόδου**, στην περίπτωση εκροής, ή της χαμηλότερης διατομής εισόδου, στην περίπτωση εισροής στη δεξαμενή.
 - Ως **αρχή του χρόνου** λαμβάνεται η **χρονική στιγμή έναρξης** της **εκκένωσης** (ή πλήρωσης).
- **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις:**
 - **a:** Υπάρχει **μόνο μία** οπή.
 - **b:** Υπάρχει **μόνο μία στρώση** υγρού σταθερής πυκνότητας.
 - **c:** Στην **επιφάνεια** του **υγρού** (στάθμη δεξαμενής) η **πίεση** είναι **ατμοσφαιρική**.
 - **d:** Στη **διατομή πλήρους συστολής** της **φλέβας** η **πίεση** είναι **ατμοσφαιρική**.
 - **e:** Στην **επιφάνεια** του **υγρού** (στάθμη δεξαμενής) **δεν** υπάρχει **εισροή**.
 - **f:** Η **δεξαμενή** έχει **σταθερή οριζόντια διατομή**

8.7.3 Εφαρμογή της διαδικασίας: **βασική μορφή - εκροή**

- Ισχύουν **όλες** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, f**.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c** και **d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: e** και **f**)

- Μορφώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_1 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138)$$

Όπου η σταθερά K_1 είναι: $K_1 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (139)$

- Ολοκληρώνουμε τη **διαφορική εξίσωση**:

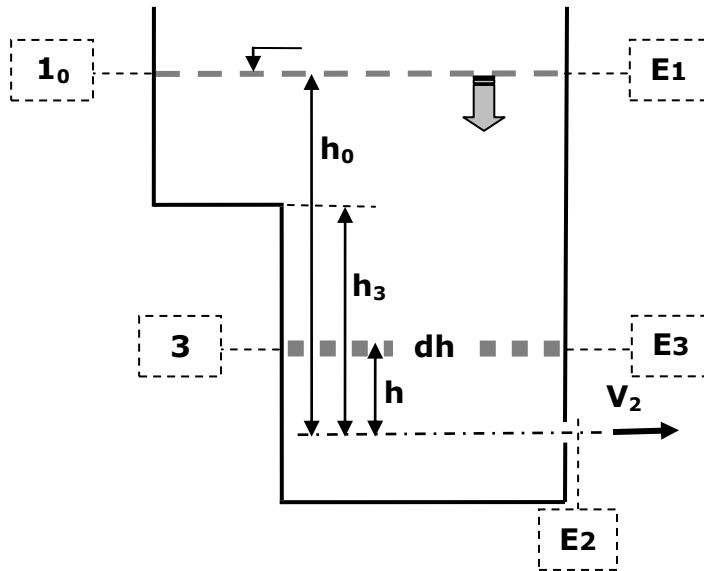
(σε οιαδήποτε όρια - στάθμες, διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K_1 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = K_1 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\} \rightarrow T = K_1 \cdot h_0^{1/2} \quad (141)$

8.7.4 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παραλλαγή Ι - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, ΟΧΙ η f.**
- Η διατομή της δεξαμενής **μεταβάλλεται απότομα** σε κάποιο ύψος.
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις:**

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c** και **d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137) \text{ για } h_0 \geq h > h_3$$

$$Q_2(h) = \pm Q_3 - E_3 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_3 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (137a) \text{ για } h_3 \geq h > 0$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: e** αλλά **όχι η f** ☹)

- Μορφώνουμε τη **σύνθετη διαφορική εξίσωση:**

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K_1 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (138), \text{ ισχύει για } h : h_0 \rightarrow h_3, t : 0 \rightarrow T_1$$

Όπου η σταθερά K_1 είναι: $K_1 = \left[\frac{E_1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right]$ (139)

(136) και (137a) $\rightarrow dt = -K_3 \cdot \frac{dh}{h^{1/2}}$ (138), ισχύει για $h : h_3 \rightarrow 0, t : T_1 \rightarrow T_3$

Όπου η σταθερά K_3 είναι: $K_3 = \left[\frac{E_3}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right]$ (139)

- Ολοκληρώνουμε τη σύνθετη διαφορική εξίσωση:

(με προσοχή στα όρια - στάθμες, διότι **δεν** ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K_1 \cdot \int_{h_A}^{h_B} \frac{dh}{h^{1/2}} = K_1 \cdot (h_A^{1/2} - h_B^{1/2}) \quad (140)$$

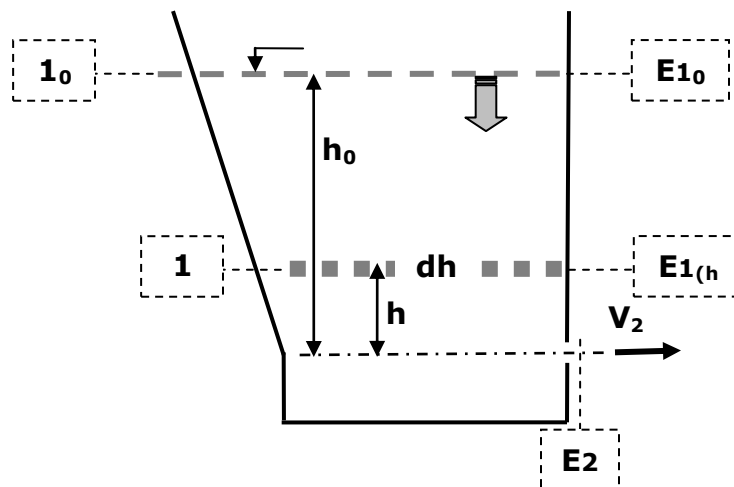
$$t = -K_3 \cdot \int_{h_C}^{h_D} \frac{dh}{h^{1/2}} = K_3 \cdot (h_C^{1/2} - h_D^{1/2}) \quad (140a)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = h_3\}$ και $\{h_C = h_3, h_D = 0\}$

$$\rightarrow T = T_1 + T_3$$

8.7.5 Εφαρμογή της διαδικασίας: **παράλλαξη II - εκροή**

- Ισχύουν **μόνο** οι **Ειδικές προϋποθέσεις - δεσμεύσεις: a, b, c, d, e, ΟΧΙ η f**.
- Η διατομή της δεξαμενής **μεταβάλλεται συνεχώς** (με γνωστή σχέση).
- Ο όγκος αναφοράς, το επίπεδο αναφοράς και τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- Εφαρμόζουμε τις παρακάτω **απλοποιημένες εξισώσεις**:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2(h) = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (135)$$

(διότι ισχύουν οι **ειδικές προϋποθέσεις: a, b, c και d**)

$$Q_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot V_2(h) = c_2 \cdot E_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} \quad (136)$$

$$Q_2(h) = \pm Q_1 - E_1 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_2(h) = -E_1(h) \cdot \frac{dh}{dt} \quad (141)$$

(διότι ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: e** αλλά **όχι η f** ☹)

- Μορφώνουμε την πολύπλοκη διαφορική εξίσωση:

$$(136) \text{ και } (137) \rightarrow dt = -K \cdot E_1(h) \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (142)$$

Όπου η σταθερά K είναι:
$$K = \left[\frac{1}{c_2 \cdot E_2} \cdot \frac{1}{(2 \cdot g)^{1/2}} \right] \quad (143)$$

- Ολοκληρώνουμε την πολύπλοκη διαφορική εξίσωση:

(με προσοχή στα όρια - στάθμες, διότι **δεν** ισχύει η **ειδική προϋπόθεση: f**)

$$t = -K \cdot \int_{h_A}^{h_B} E_1(h) \cdot \frac{dh}{h^{1/2}} \quad (140)$$

Για **πλήρη εκκένωση** είναι: $\{h_A = h_0, h_B = 0\}$