

7. ΙΔΕΑΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

Παρουσιάζεται **πολύ συνοπτικώς** η θεωρία των Ιδεατών Ρευστών. Δίδεται μεγαλύτερη **έμφαση** στην περίπτωση **δισδιάστατης ροής**, όπου οι **εξισώσεις** δίδονται σε συστήματα καρτεσιανών και **πολικών συντεταγμένων**.

7.1 Βασικές σχέσεις

7.1.1 Εισαγωγή

- Τα ιδεατά ρευστά είναι ασυμπίεστα και χωρίς συνεκτικότητα (βλ. 1.1.1 και 3.4.4). Αποτελούν προϊόν μαθηματικής απλοποίησης, αλλά η εφαρμογή της θεωρίας τους είναι σε θέση να δώσει λύσεις σε πολλά πραγματικά προβλήματα με ικανοποιητική προσέγγιση (βλ. 4.3.1 και Κεφάλαιο **8**).

- Οι εξισώσεις οι οποίες διέπουν την κίνηση **ομογενών** ιδεατών ρευστών είναι:

- Η εξίσωση συνεχείας (42).
- Οι εξισώσεις Euler (47) και (47α) ~ (47γ)

- Σε **δισδιάστατη** ροή και **καρτεσιανές** συντεταγμένες οι εξισώσεις γράφονται:

- $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (70)$$

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \cdot h) \quad (71\alpha)$$

- $$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma \cdot h) \quad (71\beta)$$

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι:
$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (28)$$

- Σε **δισδιάστατη** ροή και **πολικές** συντεταγμένες οι εξισώσεις γράφονται:

- $$\frac{\partial (r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (72)$$

- $$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (p + \gamma \cdot h) \quad (73\alpha)$$

- $$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_s^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (p + \gamma \cdot h) \quad (73\beta)$$

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι: $\omega_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)$ (74)

7.1.2 Εξίσωση Bernoulli ειδικές περιπτώσεις

- Γενικευμένη εξίσωση Bernoulli με **ολοκλήρωση** των εξισώσεων **Euler** κατά μήκος **γραμμής ροής**.

- $\frac{1}{g} \cdot \int \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h = f(t)$ (75) – σε μη μόνιμη ροή

- $\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h = H_i$ (75a) – σε μόνιμη ροή

Όπου: H_i = σταθερά, διαφορετική σε κάθε γραμμή ροής i

- Γενικευμένη εξίσωση Bernoulli με **ολοκλήρωση** των εξισώσεων **Euler** σε αστρόβιλη ροή (βλ. **3.3**).

- Ισχύει η (75) – σε μη μόνιμη ροή

- Και η: $\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h = H$ (75β) – σε μόνιμη ροή

Όπου: H = σταθερά, ΙΔΙΑ σε ολό το πεδίο ροής

- **Επισήμανση ☺**

- Η γενικευμένη εξίσωση Bernoulli (75a) **μοιάζει προκλητικά** με την εξίσωση ενέργειας (57δ), (βλ. 5.2.4).
- Είναι όμως **πολύ διαφορετικές!**...
- Η (75a) εκφράζει τη **σταθερότητα** της **ενέργειας επί γραμμή ροής** και ισχύει για **ιδεατά ρευστά**.
- Η (57δ) εκφράζει τη **σταθερότητα** της **ενέργειας** (εάν αμεληθούν οι απώλειες) **μεταξύ διατομών** εισόδου / εξόδου σε **όγκο αναφοράς** ισχύει δε και για **πραγματικά ρευστά**.

7.2 Αστρόβιλη (ή δυναμική) ροή

7.2.1 Εισαγωγή (βλ. 3.3.1)

- Εάν το πεδίο ταχυτήτων είναι **αστρόβιλο**, η **ταχύτητα** είναι δυνατό να εκφραστεί ως η **κλίση** μιας **βαθμωτής συνάρτησης Φ** , η οποία καλείται **δυναμική συνάρτηση**, ή δυναμικό του πεδίου ταχυτήτων:

- (30) και (31) $\rightarrow \text{rot} \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \text{grad} \Phi$ (76), όπου

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (76\alpha) \text{ σε } \mathbf{\text{καρτεσιανές}} \text{ συντεταγμένες}$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, v_\theta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (76\beta) \text{ σε (δισδιάστατες) } \mathbf{\text{πολικές}} \text{ συντεταγμένες}$$

- Οι επιφάνειες (ή γραμμές σε δισδιάστατη ροή) όπου είναι $\Phi = \text{σταθ}$ λέγονται **ισοδυναμικές επιφάνειες** (ή αντιστοίχως **γραμμές**) και είναι εξ ορισμού – λόγω της (76) **κάθετες** (ορθογώνιες) προς τη **διεύθυνση** της **ταχύτητας**.

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -g \cdot \text{grad} \left(\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (77) - \text{σε μη μόνιμη ροή, ή:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (77\alpha)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (77\beta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (77\gamma)$$

- Αστρόβιλο** πεδίο **ταχυτήτων** → **αστρόβιλο** πεδίο **τοπικών επιταχύνσεων**.
- Θεώρημα** του **Lagrange** ☞

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h = f(t) \quad (78) - \text{σε μη μόνιμη ροή}$$

$$\frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + h = H_i \quad (75\alpha) - \text{σε } \underline{\text{μόνιμη ροή}} \rightarrow \mathbf{\text{Θεώρημα}} \text{ του } \mathbf{\text{Torricelli}} \quad \text{☞}$$

ταχύτητα εκροής φλέβας από μικρή οπή δοχείου στάθμης h : $V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (79)$

7.2.2 Εξίσωση Laplace

- $\nabla^2 \Phi = 0 \quad (80)$
- Σε **δισδιάστατη** ροή και **καρτεσιανές** συντεταγμένες:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (81), \text{ όπου: } u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

- Σε **δισδιάστατη** ροή και **πολικές** συντεταγμένες:

$$r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (82), \text{ όπου: } v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (76\beta)$$

7.2.3 Ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) Ψ σε δισδιάστατο πεδίο ροής

- Ορίζεται ώστε:

$$\circ \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (83) \text{ σε } \mathbf{καρτεσιανές} \text{ συντεταγμένες}$$

$$\circ \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (84) \text{ σε } \mathbf{πολικές} \text{ συντεταγμένες}$$

Προϋπόθεση αποτελεί να **ισχύει** η **εξίσωση συνεχείας** (70) ή (72).

- Συνδυάζοντας τις (26) , (βλ. 3.1.3) και (83) προκύπτει η **εξίσωση των γραμμών ροής**:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot dx = d\Psi = 0 \rightarrow \Psi = \text{σταθ} \quad (85)$$

- Η **παροχή** ανά μέτρο πλάτους σε **ροϊκό σωλήνα** (βλ. 3.1.3) είναι:

$$q_{1-2} = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (86)$$

- Οι καμπύλες $\Phi = \text{σταθ}$, δηλαδή οι **ισοδυναμικές γραμμές** και οι καμπύλες $\Psi = \text{σταθ}$, δηλαδή οι **ροϊκές γραμμές**, **σχηματίζουν** ένα **πλέγμα γραμμών** οι οποίες **τέμνονται ορθογώνια** (δίκτυο καμπυλόγραμμων τετραγώνων).

7.3 Καμπυλόγραμμη κίνηση – Στρόβιλοι

7.3.1 Ελεύθερος στρόβιλος

Σε **μόνιμη αστρόβιλη** ροή σε καμπύλη με τοπική ακτίνα καμπυλότητας r είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{V}{r} \quad (87)$$

$$V = \frac{K}{r}, K = \text{σταθ} \quad (88), \text{ όπου } \mathbf{K: ισχύς ή ένταση} \text{ του στροβίλου}$$

- Η ταχύτητα μειώνεται με την απόσταση από το κέντρο του στροβίλου και δεν ορίζεται στο κέντρο του στροβίλου, όπου $r = 0 \rightarrow V = \infty$
- Η **ροή** στον **ελεύθερο στρόβιλο** είναι **αστρόβιλη** $\odot^*$ (βλ. 3.3.1).

- ο Η **κυκλοφορία** (βλ. 3.3.2) σε κάθε **κλειστή γραμμή**, η οποία **δεν** περικλείει το **κέντρο** του στροβίλου είναι **μηδενική**, ενώ σε κάθε **κλειστή γραμμή**, η οποία **περικλείει** το **κέντρο** του στροβίλου είναι: $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot K$ (89).

7.3.2 Εξαναγκασμένος στρόβιλος

Σε **μόνιμη** ροή σε καμπύλη με τοπική ακτίνα καμπυλότητας r , όπου η κίνηση γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω είναι:

$$V = \omega \cdot r \quad (90)$$

- ο Η ταχύτητα αυξάνεται με την απόσταση από το κέντρο του στροβίλου, ενώ στο κέντρο του στροβίλου, όπου $r = 0 \rightarrow V = 0$.
- ο Η **ροή** στον **εξαναγκασμένο στρόβιλο** είναι **στροβιλή** (βλ. 3.3.1)

7.3.3 Στρόβιλος Rankine

Αποτελεί σύνθεση των δύο παραπάνω σε **πραγματικά ρευστά**.

Σε **μικρή απόσταση** από το **κέντρο** του στροβίλου το ρευστό ακολουθεί τη **συμπεριφορά** του **εξαναγκασμένου** στροβίλου, ενώ σε **μεγαλύτερη απόσταση** αυτή του **ελεύθερου** στροβίλου.

7.3 Πίεση ανακοπής σε μόνιμη ροή

7.3.1 Πίεση ανακοπής σε γραμμή ροής

- Εάν η συνέχεια μιας γραμμής ροής σε μόνιμη ροή διακοπεί λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος, και η (75α) εφαρμοσθεί σε δύο κοντινά σημεία: **1** ολίγον ανάτη της ασυνέχειας και **2** ακριβώς στην ασυνέχεια προκύπτει:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (91)$$

- Η πίεση p_2 ονομάζεται **πίεση ανακοπής** και είναι **αυξημένη** κατά τον όρο της **κινητικής ενέργειας**.

7.3.2 Σωλήνας Pitot-Prandtl

- Είναι μια διάταξη, η οποία σε **πραγματικά ρευστά** εκμεταλλεύεται το παραπάνω φαινόμενο.
- Αποτελείται από οριζόντιο σωληνίσκο συνδεδεμένο με κατακόρυφο απλό πιεζόμετρο (βλ. 2.5.2), όμως λόγω της (91) στο πιεζόμετρο μετράται **όχι** το p_2 / γ , **αλλά** το $p_2 / \gamma + u^2 / 2 \cdot g$ σε κάθε οριζόντια θέση.
- Με μετακίνηση του σωληνίσκου σε διάφορες θέσεις μιας διατομής είναι δυνατό να μετρηθούν οι τοπικές ταχύτητες $u(z, y)$, δηλαδή να προσδιορισθεί το διάγραμμα ταχυτήτων στη διατομή για διάφορες παροχές!
- Εάν ο σωληνίσκος τοποθετηθεί στον άξονα κυκλικής διατομής είναι δυνατό να μετρηθεί η **μέγιστη ταχύτητα** u_{max} . Εάν στην ίδια διατομή τοποθετηθεί και απλό πιεζόμετρο τότε ο συνδυασμός των δύο αποτελεί **εργαλείο μέτρησης**

της **παροχής** $\mathcal{J}$ (βλ. 5.1.5):
$$u_{\max} = \left[\frac{2 \cdot g \cdot (h_{\text{Pitot}} - h_{\text{Πιεζομετρου}})}{\gamma} \right]^{1/2} \quad (92)$$

- Σε **στρωτή ροή** (βλ. Κεφάλαιο **10**) η **σχέση** της ταχύτητας στον άξονα του σωλήνα $u_{\max}$ με τη μέση ταχύτητα V είναι **γνωστή**!
- Σε **τυρβώδη ροή** (βλ. Κεφάλαιο **11**) η **διαφορά** της ταχύτητας στον άξονα του σωλήνα $u_{\max}$ με τη μέση ταχύτητα V είναι **μικρή**! $\rightarrow u_{\max} \approx V$.
- Και στις δύο ως άνω περιπτώσεις ροής το **απλό πιεζόμετρο** υλοποιεί την **Πιεζομετρική Γραμμή** $\mathcal{J}$, ενώ στην περίπτωση **τυρβώδους ροής** ο σωληνίσκος **Pitot - Prandtl** υλοποιεί (κατά προσέγγιση) τη **Γραμμή Ενέργειας** $\mathcal{J}$ (βλ. 5.4.2).

7.3 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

7.3.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Τα ιδεατά ρευστά...
	Είναι ασυμπίεστα και χωρίς συνεκτικότητα
	Αποτελούν προϊόν μαθηματικής απλοποίησης
	Η εφαρμογή της θεωρίας τους είναι σε θέση να δώσει λύσεις σε πολλά πραγματικά προβλήματα με ικανοποιητική προσέγγιση
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η γενικευμένη εξίσωση Bernoulli είναι δυνατό να απλοποιηθεί σημαντικώς, μεταξύ άλλων στην περίπτωση:
	Πραγματικών ρευστών σε ομοιόμορφη ροή
	Πραγματικών ρευστών σε μόνιμη αστρόβιλη ροή
✓	Ιδεατών ρευστών σε μη μόνιμη αστρόβιλη ροή
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι εξ ορισμού κάθετες προς:
	Τις ισοθλιπτικές επιφάνειες
	Τον κατακόρυφο άξονα z
✓	Τη διεύθυνση της ταχύτητας
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η ανάλυση ιδεατών ρευστών του ελεύθερου στροβίλου είναι δυνατό να εφαρμοσθεί:
✓	Μόνο σε ιδεατά ρευστά
	Γενικώς και σε πραγματικά ρευστά
	Σε πραγματικά ρευστά μόνο εάν η ροή είναι ομοιόμορφη
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η ανάλυση ιδεατών ρευστών του στροβίλου Rankine είναι δυνατό να εφαρμοσθεί:
	Μόνο σε ιδεατά ρευστά
✓	Γενικώς και σε πραγματικά ρευστά
	Σε πραγματικά ρευστά μόνο εάν η ροή είναι στρωτή
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η διάταξη: Απλό Πιεζόμετρο + σωληνίσκος Pitot – Prandtl στην ίδια διατομή αγωγού αποτελεί όργανο μέτρησης της παροχής...
	Μόνο στην περίπτωση στρωτής ροής
	Στην περίπτωση στρωτής ροής και προσεγγιστικά στην περίπτωση τυρβώδους ροής
	Μόνο στην περίπτωση τυρβώδους ροής
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

7.3.2

Δίδεται η συνάρτηση: $\Phi = x \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, όπου: **a** και **ω** σταθερές και **t** χρόνος.

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση παριστά δυναμικό πεδίου ταχυτήτων και η ροή είναι ομοιόμορφη.
2. Να ορισθούν οι γραμμές ροής και η διαφορά πίεσης (**p₁ – p₂**) σε δύο σημεία **1** και **2**, ως συνάρτηση των συντεταγμένων τους **x₁** και **x₂**.

$$\bullet \quad (76a) \rightarrow u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ και } v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \text{ικανοποιείται η (81)} \rightarrow \underline{\text{παριστά δυναμικό πεδίου ταχυτήτων}}$$

$$\bullet \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \text{ και } v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

→ ικανοποιείται η (25ε) → η ροή είναι ομοιόμορφη

$$\bullet \quad (83) \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = a \cdot \sin(\omega \cdot t) \rightarrow \Psi = a \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot y + c_1 \cdot x$$

$$\text{και } -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d(c_1 \cdot x)}{dx} = 0 \rightarrow c_1(x) = C_1 \text{ (ανεξάρτητο του } x \text{)}$$

$$\rightarrow \Psi = a \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot y + C_1$$

$$\underline{\text{σε κάθε γραμμή ροής}} \text{ (85)} \rightarrow d\Psi = 0 \rightarrow \Psi = C_2 \rightarrow y = \frac{C_2 - C_1}{a \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

- Εφόσον η Φ παριστά πεδίο δυναμικού η ροή είναι αστρόβιλη

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega \cdot x \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t), V = u \rightarrow \frac{V^2}{2} = a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \text{ και } g \cdot h = C_3 \text{ (σταθερά)}$$

$$(78) \rightarrow f(t) = \omega \cdot x \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) + a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + \frac{p}{\rho} + C_3$$

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot (x_2 - x_1) \cdot \omega \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

7.3.3 Στην εφαρμογή γίνεται χρήση πολικών συντεταγμένων

Πηγή σε δισδιάστατη (επίπεδη) ροή ονομάζεται ένα **σημείο**, απ' όπου το ρευστό **απορρέει** (φεύγει) με παροχή **q ομοιομόρφως** και **ακτινικά** προς **κάθε κατεύθυνση**.

Καταβόθρα σε δισδιάστατη (επίπεδη) ροή ονομάζεται ένα **σημείο**, απ' όπου το ρευστό **συρρέει** (έρχεται) με παροχή **q ομοιομόρφως** και **ακτινικά** από **κάθε κατεύθυνση**.

Και στις δύο περιπτώσεις, εάν η **ροή** είναι **μόνιμη**, δηλαδή η παροχή **q σταθερή** να ορισθούν:

1. Οι εξισώσεις των γραμμών ροής και των ισοδυναμικών γραμμών.
2. Η εξίσωση της πίεσης.

Η παρακάτω ανάλυση γίνεται σε πηγή και ισχύει σε καταβόθρα με αντίθετα πρόσημα.

- Η ροή είναι μόνο ακτινική $\rightarrow V_\theta = 0, \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0, (72) \rightarrow \frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} = 0 \rightarrow q = -r \cdot V_r$

$$(76\beta) \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{q}{r} \rightarrow \Phi = -\ln r$$

$\rightarrow$ ισοδυναμικές γραμμές: ομόκεντροι κύκλοι

$$r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -q \text{ και } r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = +q \text{ και } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \rightarrow \text{ικανοποιείται η (82)}$$

- (84) και (76β) $\rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$ και $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -q$

$\rightarrow$ ροϊκές γραμμές: ακτινικές ευθείες

- Εφόσον η Φ παριστά πεδίο δυναμικού η ροή είναι αστρόβιλη (και μόνιμη)

$$\text{Πάνω σε μία γραμμή ροής, (75β) } \rightarrow H = \frac{p(r)}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = \frac{p(r)}{\gamma} + \frac{q^2}{g \cdot r^2}$$

$$\text{Για: } r \rightarrow \infty \Rightarrow p(\infty) = \gamma \cdot H \Rightarrow H = \frac{p(\infty)}{\gamma}$$

$$\text{Για: } r \rightarrow 0 \Rightarrow p(0) \rightarrow -\infty$$

$$\text{Για: } p(r) = 0 \Rightarrow r^* = q \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot g \cdot H} \right)^{1/2}$$

