

6. ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Παρουσιάζονται απλά στοιχεία για την υδραυλική ομοιότητα και τα τρία είδη της. Δίδεται ιδιαίτερη έμφαση στους αδιάστατους αριθμούς Reynolds και Froude, τον ορισμό και αξιοποίηση τους για το χαρακτηρισμό της ροής από δυναμική άποψη.

6.1 Εισαγωγή

6.1.1 Γενικά

- Η μορφή των διαφορικών εξισώσεων κίνησης πραγματικών ρευστών καθιστά την αναλυτική επίλυσή τους δυσχερέστατη έως αδύνατη και επιβάλλει συχνά τη χρήση πειραματικών μεθόδων.
- Ο σχεδιασμός των πειραμάτων και η ερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων βασίζεται στις **αρχές της υδραυλικής ομοιότητας**.
- Συνήθως τα πειράματα διεξάγονται σε μοντέλο (m), το οποίο είναι γεωμετρικά όμοιο προς το πρωτότυπο (p) και έχει κατά κανόνα μικρότερες διαστάσεις.
 - Τα αντίστοιχα στοιχεία προτύπου / μοντέλου λέγονται ομόλογα.
 - Ο λόγος των ομολόγων μεγεθών συμβολίζεται με δείκτη **r** και λέγεται **κλίμακα ομοιότητας** του αντιστοίχου μεγέθους.
 - Π.χ. η κλίμακα ομοιότητας ταχυτήτων θα είναι: $V_r = \frac{V_m}{V_p}$

6.1.2 Είδη Ομοιότητας

- **Γεωμετρική** (σχήματος)
 - Οι **λόγοι** όλων των ομολόγων **διαστάσεων** είναι **ίσοι** μεταξύ τους.
 - Οι ομόλογες **γωνίες** είναι **ίσες** μεταξύ τους.
 - Ο σταθερός γεωμετρικός λόγος **L_r** καλείται **κλίμακα μηκών**, ή **γεωμετρική κλίμακα**, ή απλώς κλίμακα ομοιότητας.
- **Κινηματική**
 - Οι **τροχιές** ομολόγων **ρευστών σωματιδίων** είναι **γεωμετρικά όμοιες** και ο λόγος **T_r** των **χρόνων** στους οποίους διανύονται ομόλογα διαστήματα είναι **σταθερός**.
 - Άρα και ο λόγος **V_r** ομολόγων **ταχυτήτων** είναι **σταθερός**!
 - Ο σταθερός λόγος **T_r** καλείται **κλίμακα χρόνων** και ο σταθερός λόγος **V_r** καλείται **κλίμακα ταχυτήτων**.
- **Δυναμική**
 - **Προϋποθέτει Κινηματική** ομοιότητα και **επιπλέον** διατηρούνται **σταθεροί**:
 - Ο λόγος **M_r** των **μαζών** των ομολόγων στοιχείων και ο λόγος των **δυνάμεων** **F_r** οι οποίες δημιουργούν την κίνηση των στοιχείων αυτών.
 - Ο σταθερός λόγος **M_r** καλείται **κλίμακα μαζών** και ο σταθερός λόγος **F_r** καλείται **κλίμακα δυνάμεων**.

6.2 Βασικοί αδιάστατοι αριθμοί

6.2.1 Αριθμός Reynolds **R** (βλ. 1.1.2)

- Ο αριθμός Reynolds είναι ο λόγος των δυνάμεων **αδράνειας** προς τις δυνάμεις **συνεκτικότητας** και είναι αδιάστατος. Συμβολίζεται γενικώς ως **R_e** αλλά <εδώ> θα συμβολίζεται για λόγους απλότητας ως **R** προσέχοντας να μη γίνει σύγχυση με την υδραυλική ακτίνα, η οποία επίσης συμβολίζεται ως R.

- Γενική μορφή: $R = \frac{V \cdot L}{\nu}$ (64), όπου:

V: χαρακτηριστική ταχύτητα

L: χαρακτηριστικό μήκος

ν: κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού

- Σωλήνες σε Ροή υπό Πίεση: $R = \frac{V \cdot D}{\nu}$ (65) και $R = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu}$ (65a), όπου:

V: μέση ταχύτητα της διατομής

D: διάμετρος της διατομής

ν: κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού

Q: διερχόμενη παροχή του ρευστού στη διατομή

- Αγωγοί τυχούσας διατομής σε Ροή υπό Πίεση: $R = \frac{V \cdot \frac{E}{\Pi}}{\nu}$ (66), όπου:

V: μέση ταχύτητα της διατομής

E: εμβαδό της διατομής

Π: βρεχόμενη περίμετρος των στερεών ορίων της διατομής

ν: κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού

- Σε κάθε πεδίο προβλημάτων υπάρχει μια οριακή τιμή **R_{op}** του αριθμού Reynolds (ακριβέστερον: ένα εύρος τιμών περί την οριακή τιμή), η οποία σε κάθε διατομή, όπου πραγματοποιείται Ροή Υπό Πίεση χαρακτηρίζει τη ροή από δυναμική άποψη. (Προσοχή οι οριακές τιμές διαφέρουν στα διάφορα πεδία 🌀*).

- Π.χ. για σωλήνες σε ροή υπό πίεση το όριο μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής είναι: **R_{op} = 2.000**
- Για τιμές **μικρότερες** της **R_{op}** η ροή είναι **στρωτή** (βλ. Κεφάλαιο **10**).
- Για τιμές **μεγαλύτερες** της **R_{op}** η ροή είναι **τυρβώδης** (βλ. Κεφάλαιο **11**).

6.2.2 Αριθμός Froude **F** (βλ. 1.1.2)

- Ο αριθμός Froude είναι ο λόγος των δυνάμεων **αδράνειας** προς τις δυνάμεις **βαρύτητας** και είναι αδιάστατος.

- Γενική μορφή: $F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}}$ (67), όπου:

V: χαρακτηριστική ταχύτητα
L: χαρακτηριστικό μήκος
g: επιτάχυνση της βαρύτητας

- ο Ορθογωνικοί αγωγοί σε Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια: $F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot y}}$ (68) και

$$F = \frac{Q}{g^{1/2} \cdot b \cdot y^{3/2}} \quad (68a), \text{ όπου:}$$

V: μέση ταχύτητα της διατομής
y: βάθος ροής της διατομής
b: πλάτος της διατομής
g: επιτάχυνση της βαρύτητας
Q: διερχόμενη παροχή του ρευστού στη διατομή

- ο Αγωγοί τυχούσας διατομής σε Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια: $F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot \frac{E}{B}}}$ (69),

όπου:

V: μέση ταχύτητα της διατομής
E: εμβαδό της διατομής
B: πλάτος της διατομής στην ελεύθερη επιφάνεια (βλ. 5.2.6)
g: επιτάχυνση της βαρύτητας

- Υπάρχει **μία οριακή τιμή** του αριθμού Froude, η οποία σε κάθε διατομή, όπου πραγματοποιείται Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια χαρακτηρίζει τη ροή από δυναμική άποψη.
 - Εάν, **F < 1**: η **ροή** καλείται **υποκρίσιμη**
 - Εάν, **F > 1**: η **ροή** καλείται **υπερκρίσιμη**
 - Εάν, **F = 1**: η **ροή** καλείται **κρίσιμη** (χωρίς ο όρος να σηματοδοτεί *κάτι δραματικό*).
- Σημειώνεται ότι, σε Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια, οι εξισώσεις ποσότητας κίνησης και ενέργειας είναι **τριτοβάθμιες** με μεταβλητή το βάθος ροής **y**.
 - Έχουν είτε **δύο** πραγματικές – **θετικές** ρίζες! Δηλαδή δύο διαφορετικά ζεύγη λύσεων για κάθε εξίσωση.
 - Η **μία διπλή** πραγματική – **θετική**. Κοινή και για τις δύο εξισώσεις!
 - Η **μεγαλύτερη** από τις δύο ρίζες, σε κάθε ζεύγος, αντιστοιχεί σε **υποκρίσιμη** ροή.
 - Η **μικρότερη** από τις δύο ρίζες, σε κάθε ζεύγος, αντιστοιχεί σε **υπερκρίσιμη** ροή.
 - Η **διπλή** – κοινή ρίζα αντιστοιχεί σε **κρίσιμη** ροή και ονομάζεται κρίσιμο βάθος y_κ.

6.3 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

6.3.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Από δυναμική άποψη μια ροή είναι δυνατό να χαρακτηριστεί ως:
	Στρωτή και υποκρίσιμη
	Τυρβώδης και υπερκρίσιμη
	Τυρβώδης και κρίσιμη
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε στρωτή ροή υπό πίεση σε σωλήνα ο αριθμός Reynolds:
	Είναι δυνατό να είναι $5 \cdot 10^4$
	Εξαρτάται από το μήκος του L σωλήνα
✓	Είναι δυνατό να είναι 500
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ροή υπό πίεση σε σωλήνα η τιμή του αριθμού Reynolds:
	Καθορίζει εάν η ροή είναι υπερκρίσιμη
	Καθορίζει εάν η ροή είναι στρωτή και υποκρίσιμη
✓	Καθορίζει εάν η ροή είναι τυρβώδης
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ροή υπό πίεση σε αγωγό μη κυκλικής διατομής ο οριακός αριθμός Reynolds R_{op} έχει καθορισμένη τιμή:
	200
	2.000
	20.000
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Ο αριθμός Froude σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια:
	Είναι ο λόγος των δυνάμεων βαρύτητας προς τις δυνάμεις αδρανείας
✓	Είναι ο λόγος των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις βαρύτητας
	Είναι ο λόγος των δυνάμεων συνεκτικότητας προς τις δυνάμεις βαρύτητας
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια η τιμή του αριθμού Froude:
✓	Καθορίζει εάν η ροή είναι υποκρίσιμη
	Καθορίζει εάν η ροή είναι στρωτή και κρίσιμη
	Καθορίζει εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

6.3.2 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή υπό Πίεση

Στις εφαρμογές 5.3.2, 5.3.4 και 5.5.2 να υπολογιστούν οι **αριθμοί Reynolds** σε όλες τις διατομές των σωλήνων και να χαρακτηρισθεί η ροή ως στρωτή ή τυρβώδης. Η τιμή της κινηματικής συνεκτικότητας ν να ληφθεί γενικώς : **$1,10 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$** .

- 5.3.2

- ο **1**: [$Q_1 = 150 \text{ lt/s}$, $D_1 = 0,4 \text{ m}$], (65a) $\rightarrow R = 4,34 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **2**: [$V_2 = 3,820 \text{ m/s}$, $D_2 = 0,2 \text{ m}$], (65) $\rightarrow R = 6,94 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **3**: [$V_4 = 3,820 \text{ m/s}$, $D_3 = 0,1 \text{ m}$], (65) $\rightarrow R = 3,47 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης

- 5.3.4

- ο **1**: [$Q_1 = 150 \text{ lt/s}$, $D_1 = 0,4 \text{ m}$], (65a) $\rightarrow R = 4,34 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **2**: [$V_2 = 3,342 \text{ m/s}$, $D_2 = 0,2 \text{ m}$], (65) $\rightarrow R = 6,07 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **3**: [$V_4 = 5,729 \text{ m/s}$, $D_3 = 0,1 \text{ m}$], (65) $\rightarrow R = 5,21 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης

- 5.5.2

- ο **0**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 350 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 4,60 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **1_a**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 350 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 4,60 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **1_κ**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 300 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 5,37 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **2_a**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 300 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 5,37 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **2_κ**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 350 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 4,60 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης
- ο **3**: [$Q = 0,139 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_0 = 350 \text{ mm}$], (65a) $\rightarrow R = 4,60 \cdot 10^5 \rightarrow$ τυρβώδης

Παρατηρούμε ότι σε όλο το δείγμα ο αριθμός Reynolds είναι **μακράν μεγαλύτερος** από την οριακή τιμή των 2.000!

Τούτο δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, στα πραγματικά προβλήματα ενδιαφέροντος Πολιτικού Μηχανικού, στρωτή ροή εμφανίζεται σε λιγότερο από 3% των περιπτώσεων.

6.3.3 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια

Στις εφαρμογές 5.3.7 και 5.3.8 να υπολογιστούν οι **αριθμοί Froude** σε όλες τις διατομές των αγωγών και να χαρακτηρισθεί η ροή ως υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη.

- 5.3.7

- ο 1: [$V_1 = 1,041 \text{ m/s}$, $y_1 = 0,525 \text{ m}$], (69) → $F = 0,296 \rightarrow$ υποκρίσιμη
- ο 2: [$V_2 = 3,324 \text{ m/s}$, $y_1 = 0,525 \text{ m}$], (69) → $F = 0,912 \rightarrow$ υποκρίσιμη

- 5.3.8

- ο 1: [$Q = 4,0 \text{ m}^3/\text{s}$, $y_1 = 1,13 \text{ m}$], (68a) → $F = 0,362 \rightarrow$ υποκρίσιμη
- ο 2: [$Q = 4,0 \text{ m}^3/\text{s}$, $y_{21} = 1,00 \text{ m}$], (68a) → $F = 0,639 \rightarrow$ υποκρίσιμη
- ο 2: [$Q = 4,0 \text{ m}^3/\text{s}$, $y_{22} = 0,56 \text{ m}$], (68a) → $F = 1,504 \rightarrow$ υπερκρίσιμη

Δηλαδή,.. ο **περιορισμός** στην εκφώνηση της Εφαρμογής (ως προς την τιμή του βάθους ροής στη διατομή 2), ο οποίος μας οδήγησε στην **απόρριψη** της ρίζας y_{22} , ήταν (εν κρυπτώ) η **φυσική απαγόρευση** της μετάβασης από υποκρίσιμη ροή στη διατομή 1 σε υπερκρίσιμη ροή στη διατομή 2!

Θα το αναλύσουμε και τεκμηριώσουμε στο μάθημα της Εφαρμοσμένης Υδραυλικής στο 5ο εξάμηνο!...

Στη συνέχεια της Εφαρμογής υπολογίστηκε: «Το ελάχιστο πλάτος b_{2min} , για το οποίο είναι δυνατό να παροχετευθεί η Q και το αντίστοιχο βάθος ομοιόμορφης ροής y_2^* ».

$$2^*: [Q = 4,0 \text{ m}^3/\text{s}, y_2^* = 0,803 \text{ m}], (68a) \rightarrow F = 1,000 \rightarrow \text{κρίσιμη}$$

Θαύμα;.. η **απαίτηση** στην εκφώνηση της Εφαρμογής (ως προς την τιμή του ελαχίστου πλάτους στη διατομή 2), οδήγησε επί της ουσίας στον υπολογισμό του κρίσιμου βάθους y_k και ήταν (εν κρυπτώ) η **οριακή περίπτωση** δυνατότητας μετάβασης από υποκρίσιμη ροή στη διατομή 1 σε κρίσιμη ροή στη διατομή 2! Θα το αναλύσουμε και τεκμηριώσουμε στο μάθημα της Εφαρμοσμένης Υδραυλικής στο 5ο εξάμηνο!...

Σε αντίθεση με τα της στρωτή / τυρβώδους ροής, στα πραγματικά προβλήματα ενδιαφέροντος Πολιτικού Μηχανικού, υπερκρίσιμη και κρίσιμη ροή εμφανίζονται σε σημαντικό ποσοστό των περιπτώσεων.