

5.5.4 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 5.1.5, 5.3.2, 5.4.4 , 5.4.5 και 5.5.3

Από τη δεξαμενή σταθερής στάθμης Α τροφοδοτείται με νερό ο οριζόντιος κλειστός αγωγός κυκλικής διατομής με ενιαία διάμετρο **D** και μήκος **L₂₂**, ο οποίος εκρέει στην ατμόσφαιρα στο σημείο 3. Στο ήμισυ του μήκους του (σημείο 1) παρεμβάλλεται αντλία (βλ. σχήμα). Οι απώλειες ενέργειας κατά μήκος του

αγωγού δίνονται από τη σχέση : $\Delta H_L = K \cdot \frac{L}{g \cdot D} \cdot V^2$

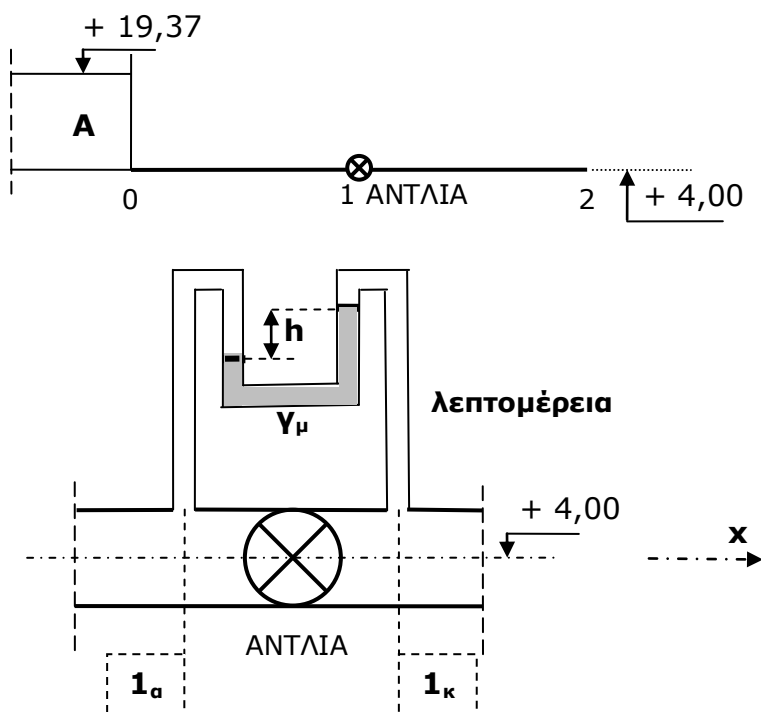
Στις διατομές (1_α) και (1_κ) ολίγον ανάντη και κατάντη της αντλίας, τοποθετείται διαφορικό μανόμετρο, το οποίο περιέχει υγρό ειδικού βάρους **γ_μ** και έχει ένδειξη **h** (βλ. λεπτομέρεια) .

Γίνεται η παραδοχή ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών (1_α) και (1_κ), διότι η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρή, και ότι οι κατανομές των ταχυτήτων και πιέσεων σε αυτές τις διατομές είναι ομοιόμορφες.

Ζητούνται να υπολογιστούν :

1. Όταν η αντλία δεν λειτουργεί, η διάμετρος **D** του αγωγού, ώστε να παροχετεύεται δεδομένη παροχή **Q**.
2. Όταν η αντλία λειτουργεί, το απαιτούμενο μανομετρικό ύψος της **H_μ**, ώστε η νέα παροχή **Q*** να είναι αυξημένη κατά 25%, η ένδειξη του διαφορικού μανομέτρου **h** και η οριζόντια δύναμη **N'_x** την οποία ασκεί το νερό στην αντλία.
3. Και στις δύο περιπτώσεις να χαραχθούν πλήρως (με τα υψόμετρά τους) η Γραμμή Ενέργειας και η Πιεζομετρική Γραμμή και να διερευνηθούν ενδεχόμενα προβλήματα από υποπίεσεις.

Αριθμητική εφαρμογή: **Q= 200 lt /s, L₀₂= 550 m, K= 0,010, γ_μ= 13,35 t /m³**



1. Η αντλία **δεν** λειτουργεί

$$(52\gamma) \rightarrow Q = Q_{0-1} = Q_{1-2} \rightarrow V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

$$(59) \rightarrow (z_0 - z_3) = K \cdot \frac{L_{0-2} \cdot V^2}{g \cdot D} + \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow (z_0 - z_2) = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot K \cdot L_{0-2}}{D^5} + \frac{1}{D^4} \right) \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot g \cdot (z_0 - z_2)}{8 \cdot Q^2} = \frac{2 \cdot K \cdot L_{0-2}}{D^5} + \frac{1}{D^4} \quad (I)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

Εφαρμόζουμε (παραλλαγή) της αριθμητικής επίλυσης 2.4.4

$$(I) \rightarrow A \cdot D^5 - B \cdot D - C = 0, \text{ όπου: } A = \frac{\pi^2 \cdot g \cdot (z_0 - z_2)}{8 \cdot Q^2}, B = 1 \text{ και } C = 2 \cdot K \cdot L_{0-2}$$

Μετασχηματίζουμε:

$$D^5 + b \cdot D + c = 0, \text{ όπου: } b = -\frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot (z_0 - z_2)} \text{ και } c = -\frac{16 \cdot K \cdot L_{0-2} \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot (z_0 - z_2)}$$

a	b	c
1	-0,000215	-0,002365

$$(17) \rightarrow D_{v+1} = D_v - \frac{D_v^5 - 0,000215 \cdot D_v - 0,002365}{5 \cdot D_v^4 - 0,000215}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το **<-0,000215.D>** $\rightarrow D_1 = 0,298387$

D ₁	D ₂	D ₃
0,298387	0,300015	0,299997 ✓

$\rightarrow D = 0,300 \text{ m}, V = 2,829421 \text{ m/s}$

Εφαρμόζουμε **εναλλακτική** αριθμητική επίλυση (χρήσιμη στην Εφαρμοσμένη Υδραυλική)

$$(I) \rightarrow D_{v+1} = \left(\frac{8 \cdot Q^2 \cdot (2 \cdot K \cdot L_{0-2} + D_v)}{\pi^2 \cdot g \cdot (z_0 - z_2)} \right)^{1/5}$$

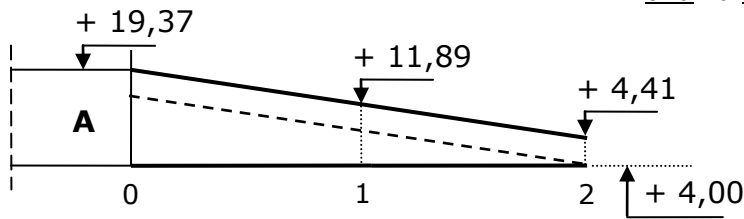
$$\rightarrow D_{v+1} = \left[0,00215 \cdot (11,00000 + D_v) \right]^{1/5}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το **<D₀>** $\rightarrow D_1 = 0,298387$

D ₁	D ₂	D ₃
0,298387	0,299989	0,299997 ✓

$\rightarrow D = 0,300 \text{ m}$

Σημείωση: Στο σχήμα έχουν σημειωθεί όλα τα υψόμετρα της **Γ.Ε.**



αγωγός	Q [m ³ /s]	D_i [m]	L_i [m]	ΔH_{Li} [m]	V_i²/2.g [m]
(0-1)	0,200	0,300	275	7,48	0,41
(1-2)		0,300	275	7,48	0,41

κόμβος	Γ.Ε. [m]	Π.Γ. [m]
0 _α	+ 19,37	+ 19,37
0 _κ	+ 19,37	+ 18,96
1 _α	+ 11,89	+ 11,48
1 _κ	+ 11,89	+ 11,48
2	+ 4,41	+ 4,00

Προφανώς δεν υπάρχουν σε κανένα σημείο υποπίεσεις.

2. Η αντλία **Λειτουργεί**

$$(52\gamma) \rightarrow Q^* = Q^*_{0-1} = Q^*_{1-2} \rightarrow V^* = \frac{4 \cdot Q^*}{\pi \cdot D^2} = \frac{5 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

$$(59) \rightarrow (z_0 - z_3) + H_\mu = K \cdot \frac{L_{0-2} \cdot V^{*2}}{g \cdot D} + \frac{V^{*2}}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow H_\mu = K \cdot \frac{L_{0-2} \cdot V^{*2}}{g \cdot D} + \frac{V^{*2}}{2 \cdot g} - (z_0 - z_3) = \frac{12,5 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot K \cdot L_{0-2}}{D^5} + \frac{1}{D^4} \right) - (z_0 - z_3)$$

- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων στον όγκο αναφοράς (1_α) - (1_κ):

$$(52\gamma) \rightarrow Q^* = Q^*_{0-1} = Q^*_{1-2} \rightarrow V^* = \frac{4 \cdot Q^*}{\pi \cdot D^2} = \frac{5 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

$$(59) \rightarrow (H_{1\alpha} - H_{1\kappa}) - H_\mu = 0$$

διότι: «... δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών (1_α) και (1_κ)» 🎵

$$\rightarrow H_\mu = \left(z_{1\alpha} + \frac{p_{1\alpha}}{\gamma} + \frac{V^{*2}}{2 \cdot g} \right) - \left(z_{1\kappa} + \frac{p_{1\kappa}}{\gamma} + \frac{V^{*2}}{2 \cdot g} \right) = \frac{p_{1\alpha} - p_{1\kappa}}{\gamma}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\bar{V}_{1\alpha} \cdot Q_{1\kappa}) - (\bar{V}_{1\beta} \cdot Q_{1\kappa}) \right] = \sum_1 (\bar{F}_{pi}) + \bar{F}_g + \bar{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot [(V_{1\alpha} \cdot Q_{1\alpha}) - (V_{1\kappa} \cdot Q_{1\kappa})] = p_{1\alpha} \cdot E_{1\alpha} - p_{1\kappa} \cdot E_{1\kappa} + N_x$$

$$\text{και (23)} \rightarrow \frac{p_{1\alpha} - p_{1\kappa}}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1 \right) \cdot h \text{ διότι: } \Delta z_{(1\alpha-1\kappa)} = 0$$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$h = \frac{H_\mu}{\frac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1} \text{ διότι: } z_{1\alpha} = z_{1\kappa} \text{ και } V_{1\alpha} = V_{1\kappa} = V^*$$

$$\text{και } N_x = -\gamma \cdot H_\mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

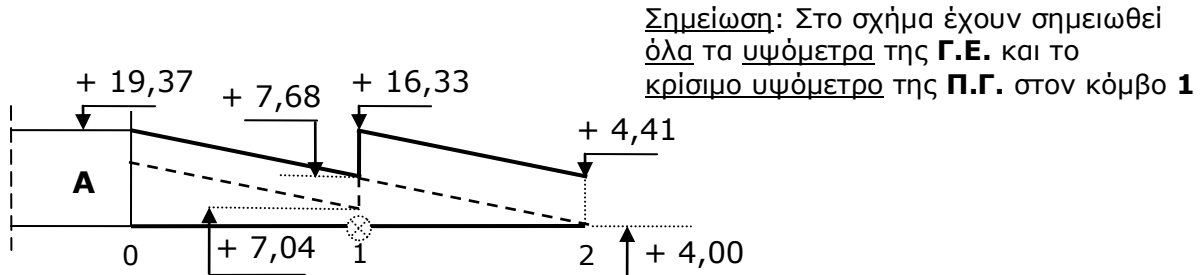
Αριθμητική εφαρμογή:

$$Q^* = 0,250 \text{ m}^3/\text{s}, V^* = 3,536777 \text{ m/s}$$

$$H_\mu = 8,644390 \text{ m}$$

$$h = 0,70 \text{ m}$$

$$N'_x = + 0,611036 \text{ t} = + 5,994 \text{ kN}$$



αγωγός	Q [m ³ /s]	D _i [m]	L _i [m]	ΔH _{Li} [m]	V _i ² /2.g [m]
(0-1)	0,250	0,300	275	11,69	0,64
(1-2)		0,300	275	11,69	0,64

κόμβος	Γ.Ε. [m]	Π.Γ. [m]
0 _α	+ 19,37	+ 19,37
0 _κ	+ 19,37	+ 18,73
1 _α	+ 7,68	+ 7,04
1 _κ	+ 16,33	+ 15,69
2	+ 4,64	+ 4,00

κόμβος **1_α**: Κίνδυνος **υποπίεσης**: Πίεση = 7,04 - 4,00 = **+ 3,04 m** > 0 ✓

5.5.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 5.1.5, 5.3.2 και 5.4.2

Ο μετρητής Venturi, είναι ένα οριζόντιο ειδικό τεμάχιο μεταβλητής διαμέτρου, το οποίο παρεμβάλλεται σε σωλήνα γνωστής διαμέτρου, όπου ρέει ρευστό γνωστού ειδικού βάρους γ με σκοπό τη μέτρηση της διερχόμενης παροχής Q .

- Ο ανάντη **κώνος σύγκλισης** έχει σχετικώς μικρό μήκος, διότι ο κίνδυνος αποκολλήσεων δεν είναι τόσο σημαντικός (βλ. Κεφάλαιο **8**).
- Ο κατάντη **κώνος διάχυσης** έχει σχετικώς μεγάλο μήκος, διότι ο κίνδυνος αποκολλήσεων είναι σημαντικός (βλ. Κεφάλαιο **8**).
- Ο **λαιμός** έχει σταθερή διάμετρο και σχετικώς μικρό μήκος.

Στην ανάντη διατομή **1** διαμέτρου **D** και στη διατομή **2** στο λαιμό διαμέτρου **d**, τοποθετούνται είτε δύο απλά πιεζόμετρα με ενδείξεις **h₁** και **h₂** → μετρητής ανοιχτού τύπου, είτε ένα διαφορικό μανόμετρο, το οποίο περιέχει υγρό ειδικού βάρους γ_μ και έχει ένδειξη **h** → μετρητής κλειστού τύπου.
(βλ. σχήμα, όπου έχει σχεδιασθεί μόνο το ήμισυ της κατά μήκος τομής του οργάνου).

Λόγω του μικρού μήκους και του (υποτιθέμενου) καλού σχεδιασμού, αμελούμε τις απώλειες ενέργειας, δηλαδή θεωρούμε ότι η **Γραμμή Ενέργειας** είναι οριζόντια.

Ο μετρητής μας δίνει μία παραστατική εικόνα μετατροπής της συνολικής ενέργειας στις επιμέρους συνιστώσες:

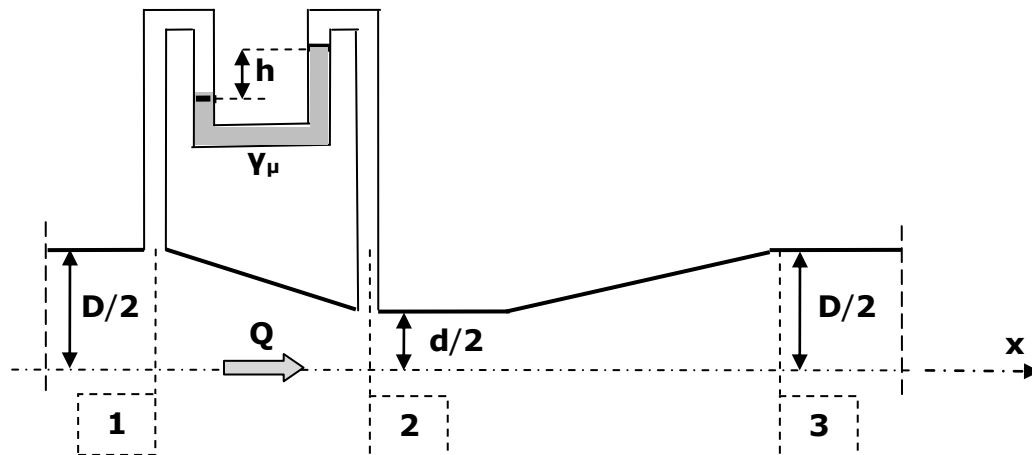
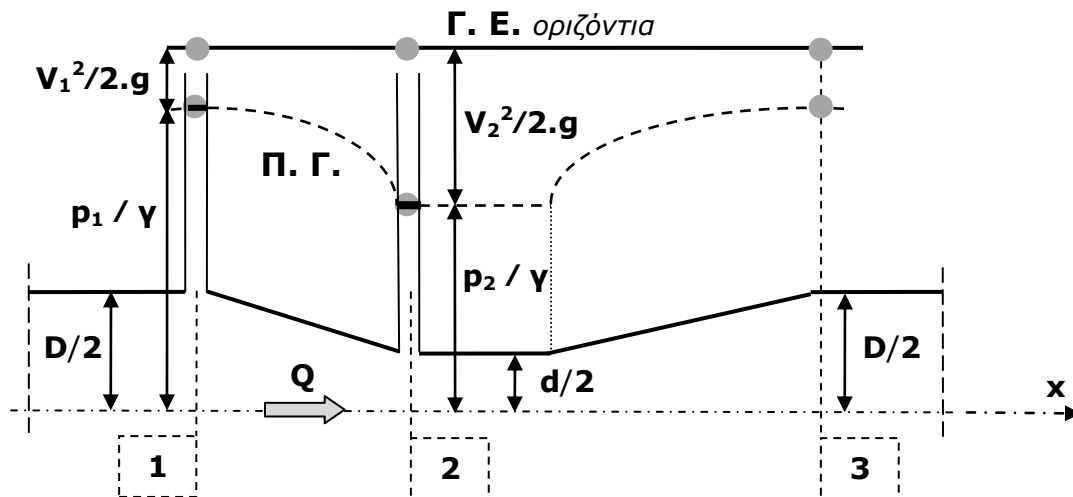
- Μεταξύ των διατομών **1** και **2** αυξάνει η κινητική ενέργεια εις βάρος της δυναμικής (εκ πιέσεων), η **Πιεζομετρική Γραμμή χαμηλώνει**.
- Μεταξύ των διατομών **2** και **3** συμβαίνει το αντίστροφο.

Η πιθανώς εμφανιζόμενη υποπίεση καθορίζει την οριακή – **μέγιστη** παροχή **Q***, την οποία είναι δυνατό να μετρήσει το όργανο.

Στην περίπτωση όπου ρέει νερό και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστούν και στις δύο περιπτώσεις οργάνων μέτρησης της πίεσης:

1. Η παροχή **Q**.
2. Η μέγιστη παροχή **Q***, την οποία είναι δυνατό να μετρήσει το όργανο με δεδομένη την πίεση στη διατομή **1**.

Αριθμητική εφαρμογή: **D= 300 mm**, **d= 200 mm**, **h₁= 105 cm**, **h₂= 50 cm**,
h= 14 cm, $\gamma_\mu = 13,35 \text{ t/m}^3$.



Ανοιχτός τύπος - Πιεζόμετρα

$$(52\gamma) \rightarrow Q = Q_{(1)} = Q_{(2)} \rightarrow V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D}, V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow h_1 + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D^4} = h_2 + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4}$$

$$\rightarrow Q = \pi \cdot (D \cdot d)^2 \cdot \left(\frac{g}{8 \cdot (D^4 - d^4)} \right)^{1/2} \cdot (h_1 - h_2)^{1/2}$$

Το όριο λειτουργίας του οργάνου προκύπτει από την απαιτήση **μη αναρρόφησης**

αέρα στο πιεζόμετρο της διατομής **2**: $h_2 = \frac{p_2}{\gamma} = \frac{d}{2}$ ♪

$$\rightarrow Q^* = \pi \cdot (D \cdot d)^2 \cdot \left(\frac{g}{8 \cdot (D^4 - d^4)} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{d}{2} \right)^{1/2}$$

Αριθμητική εφαρμογή: **Q = 115,204 lt /s**

Κλειστός τύπος – Διαφορικό μανόμετρο

$$(52\gamma) \rightarrow Q = Q_{(1)} = Q_{(2)} \rightarrow V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D}, V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow h_1 + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D^4} = h_2 + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4}$$

$$\rightarrow Q = \pi \cdot (D \cdot d)^2 \cdot \left(\frac{g}{8 \cdot (D^4 - d^4)} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1 \right)^{1/2} \cdot h^{1/2}$$

Το όριο λειτουργίας του οργάνου προκύπτει από την απαίτηση μη εισροής του υγρού του μανομέτρου στη διατομή **2**.

Αριθμητική εφαρμογή: **Q = 204,260 lt /s**

5.5.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 5.3.2 και 5.4.6

Ο σίφωνας, είναι σωλήνας σταθερής (σχετικώς μικρής) διαμέτρου και μικρού μήκους, ο οποίος χρησιμοποιείται για την παροχέτευση υγρού από μία δεξαμενή σε άλλη ή εκκρίνει ελεύθερα ατμόσφαιρα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ανεστραμμένος σίφωνας, του οποίου η υψηλότερη διατομή βρίσκεται υψηλότερα από τη στάθμη της ανάντη δεξαμενής.

Κατά τούτο διαφέρει από τον αυχένα (βλ. 5.4.6)!

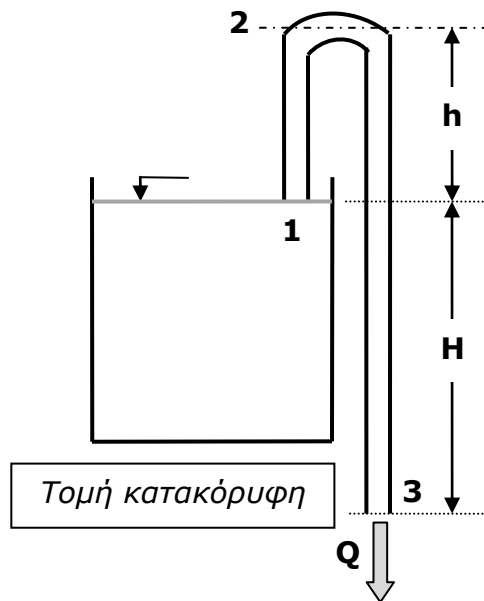
Το ανάντη άκρο **1** (είσοδος) ενός σίφωνα διαμέτρου **D** τοποθετείται στο επίπεδο της ελεύθερης σταθερής στάθμης δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό.

Το ανώτατο σημείο **2** του άξονα του σίφωνα και το κατόντη άκρο του **3** (έξοδος στην ατμόσφαιρα) απέχουν αντιστοίχως κατακόρυφες αποστάσεις **h** και **H** από την ως άνω στάθμη της δεξαμενής (βλ.σχήμα).

Η απόλυτη πίεση (τάση) υδρατμών στις συνθήκες του προβλήματος είναι **p_{υδρατμων}**

Αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστεί η οριακή απόσταση **H***, ώστε η **παροχέτευση** μέσω του σίφωνα να διεξάγεται **χωρίς προβλήματα** και η αντίστοιχη παροχή **Q***.

Αριθμητική εφαρμογή: **D = 100 mm, h = 2,5 m, p_{υδρατμων} = 0,01 atm.**



$$(52\gamma) \rightarrow Q = Q_{1\kappa} = Q_2 = Q_3 \rightarrow V_{1\kappa} = V_2 = V_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D}, V_{1\alpha} = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_3 \text{ και } H_2 = H_3$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_{1\alpha}^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow Q = \pi \cdot D^2 \cdot \left(\frac{g \cdot H}{8} \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = -(H + h)$$

$$p_{2\text{απολυτο}} = p_2 + p_{\text{ατμοσφαιρική}} \text{ και } \underline{\text{πρέπει:}} \quad p_{2\text{απολυτο}} \geq p_{\text{υδρατμων}} \quad (\text{βλ. Κεφάλαιο } \mathbf{8}).$$

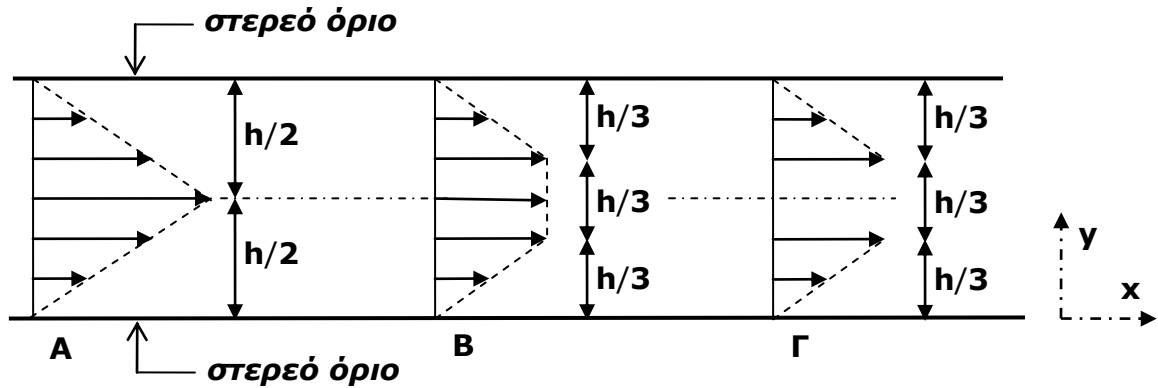
$$\rightarrow \frac{1\text{atm} - p_{\text{υδρατμων}}}{\gamma} \geq H + h$$

Αριθμητική εφαρμογή: **H* = 7,212 m** και **Q* = 93,425 lt /s**

5.5.7 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 5.1.3, 5.2.3 και 5.2.4

Στις παρακάτω περιπτώσεις **δισδιάστατων** συμμετρικών κατανομών ταχυτήτων $u(y)$ - ροή πραγματικών ρευστών μεταξύ δύο πλακών, οι οποίες απέχουν κατά h - να υπολογιστούν οι συντελεστές συνόρθωσης:

- β (εξίσωσης ποσότητας κίνησης)
- α (εξίσωσης ενέργειας).



Διαδικασία:

- Επιλέγουμε σύστημα αξόνων, για **δισδιάστατη ροή**: $[x, y]$.
- Μορφώνουμε τη σχέση μεταξύ της τοπικής ταχύτητας $u(y)$ και της μέγιστης ταχύτητας $u(y)_{\max}$ σε κάθε περιοχή της διατομής:

$$\mathbf{A:} \quad u(y) = \frac{2 \cdot y}{h} \cdot u(y)_{\max} \leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{h}{2}$$

$$\mathbf{B:} \quad u(y) = \frac{3 \cdot y}{h} \cdot u(y)_{\max} \leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{h}{3} \text{ και } u(y) = u(y)_{\max} \leftrightarrow \frac{h}{3} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

$$\mathbf{\Gamma:} \quad u(y) = \frac{3 \cdot y}{h} \cdot u(y)_{\max} \leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{h}{3} \text{ και } u(y) = 0 \leftrightarrow \frac{h}{3} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

- Μέσω της (52γ) – εξίσωση συνέχειας, συσχετίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα $u(y)_{\max}$ με τη μέση ταχύτητα V :

$$\mathbf{A:} \quad V = \frac{1}{2} \cdot u(y)_{\max}$$

$$\mathbf{B:} \quad V = \frac{2}{3} \cdot u(y)_{\max}$$

$$\mathbf{\Gamma:} \quad V = \frac{1}{3} \cdot u(y)_{\max}$$

- Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (56) και (58):

$$\mathbf{A:} \quad \beta = \frac{2 \cdot \int_0^{h/2} u(y)^2 \cdot dy}{V^2 \cdot h} = \frac{32 \cdot \int_0^{h/2} y^2 \cdot dy}{h^3} = 1,333$$

$$\mathbf{A:} \quad \alpha = \frac{2 \cdot \int_0^{h/2} u(y)^3 \cdot dy}{V^3 \cdot h} = \frac{128 \cdot \int_0^{h/2} y^3 \cdot dy}{h^4} = 2,000$$

$$\mathbf{B:} \quad \beta = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{h/3} u(y)^2 \cdot dy + \int_{h/3}^{h/2} u(y)^2 \cdot dy \right)}{V^2 \cdot h} = \frac{81 \cdot \int_0^{h/3} y^2 \cdot dy}{2 \cdot h^3} + \frac{9 \cdot \int_{h/3}^{h/2} dy}{2 \cdot h} = 1,250$$

$$\mathbf{B:} \quad \alpha = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{h/3} u(y)^3 \cdot dy + \int_{h/3}^{h/2} u(y)^3 \cdot dy \right)}{V^3 \cdot h} = \frac{729 \cdot \int_0^{h/3} y^3 \cdot dy}{4 \cdot h^4} + \frac{27 \cdot \int_{h/3}^{h/2} dy}{4 \cdot h} = 1,875$$

$$\mathbf{\Gamma:} \quad \beta = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{h/3} u(y)^2 \cdot dy \right)}{V^2 \cdot h} = \frac{162 \cdot \int_0^{h/3} y^2 \cdot dy}{h^3} = 2,000$$

$$\mathbf{\Gamma:} \quad \alpha = \frac{2 \cdot \left(\int_0^{h/3} u(y)^3 \cdot dy \right)}{V^3 \cdot h} = \frac{1458 \cdot \int_0^{h/3} y^3 \cdot dy}{h^4} = 4,500$$