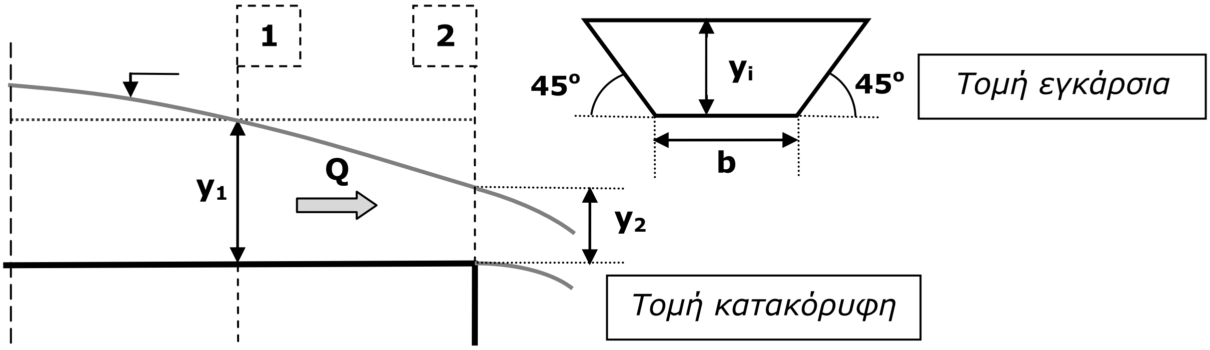
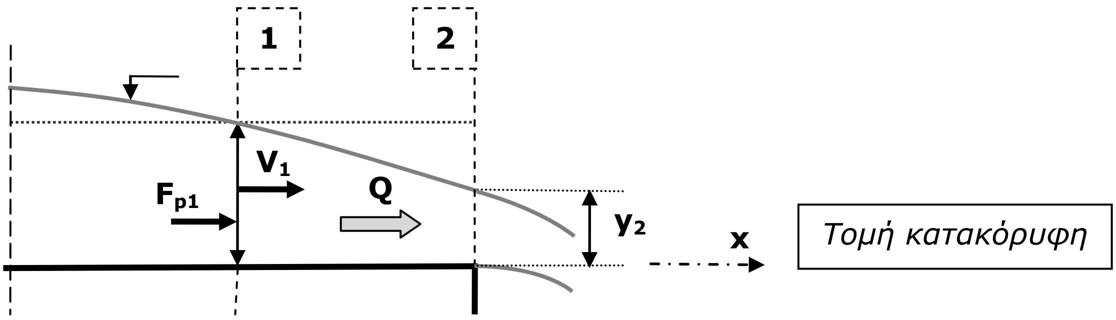
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ <u>5η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>
4ο ΕΞΑΜΗΝΟ Π.Μ.
ΕΤΟΣ : 2010 – 2011

5.1 Διώρυγα συμμετρικής τραπεζοειδούς διατομής με οριζόντιο πυθμένα, πλάτος στον πυθμένα **b** και κλίση πρανών **45°** μεταφέρει νερό με παροχή **Q** και καταλήγει σε ελεύθερη πτώση. Το βάθος ροής σε μικρή απόσταση ανάντη της ακμής είναι $\mathbf{y_1}$ και η κατανομή των πιέσεων είναι υδροστατική, ενώ το βάθος ροής ακριβώς στην ακμή είναι $\mathbf{y_2}$= **0,7.** $\mathbf{y_1}$ και η κατανομή των πιέσεων δεν είναι υδροστατική. Με βάση τον όγκο αναφοράς (βλ. σχήμα), αμελώντας τις δυνάμεις λόγω τριβών και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνεχείας και την εξίσωση ποσότητας κίνησης (με συντελεστές συνόρθωσης της ποσότητας κίνησης β= 1), εκφράστε:

1) Την ολική δύναμη εκ πιέσεων $\mathbf{F_{p2}}$, η οποία ασκείται στη διατομή της ακμής, συναρτήσει του $\mathbf{y_1}$, του πλάτους **b** της διατομής και της διερχόμενης παροχής **Q**.
2) Το ποσοστό της δύναμης, το οποίο αποτελεί η υπολογισθείσα δύναμη $\mathbf{F_{p2}}$ σε σχέση με τη δύναμη $\mathbf{F^*_{p2}}$, η οποία θα προέκυπτε από υδροστατική κατανομή των πιέσεων και στη διατομή ακριβώς στην ακμή για βάθος $\mathbf{y_2}$.

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>: **Q**= **8,15** m^3/s, **b**= **2,0** m, $\mathbf{y_1}$= **1,0** m.





<βλ. <u>5.3.7</u> FM NV401_7 A>

- <u>Επιλέγουμε</u> κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. <u>5.3.7</u>).
- <u>Επιλέγουμε</u> χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. <u>5.3.7</u>).
- <u>Καταστρώνουμε</u> το σύνολο των εξισώσεων:

(52γ) → $V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 = 0, Q_1 = Q_2 = Q$

(53δ) → $-\rho \cdot \left[\left(\vec{V}_1 \cdot Q_1 \right) - \left(\vec{V}_2 \cdot Q_2 \right) \right] = \sum_1^2 \left(\vec{F}_{pi} \right) + \vec{F}_g + \vec{N}$

→ $-\rho \cdot \left[\left(V_1 \cdot Q_1 \right) - \left(V_2 \cdot Q_2 \right) \right] = \left(\gamma \cdot y_1 \cdot E_1 \right) - F_{p2} + N_x$

Προσοχή: $F_{p2} \neq \left(\gamma \cdot y_2 \cdot E_2\right)$

επειδή «*η κατανομή των πιέσεων δεν είναι υδροστατική*» 💣

<u>Άγνωστα μεγέθη</u>: $y_1, V_1, y_2, y_2, V_2, Q_2, F_{p2}$

- <u>Επιλύουμε</u> το σύστημα των εξισώσεων:

$$Q_1 = Q_2 = Q \rightarrow V_1 = \frac{Q}{E_1}, V_2 = \frac{Q}{E_2}$$

όπου: $E_1 = \left(b + y_1\right) \cdot y_1$ και $E_2 = 0,7 \cdot \left(b + 0,7 \cdot y_1\right) \cdot y_1$

$$F_{p2} = \left(\gamma \cdot y_1 \cdot E_1\right) + \frac{\gamma \cdot Q^2 \left(E_2 - E_1\right)}{g \cdot E_1 \cdot E_2}$$

Επειδή $N_x = 0$, διότι: «*αμελούνται οι δυνάμεις λόγω τριβών*» ♫

Είναι: $y_1 = \dfrac{\left(3 \cdot b + 2 \cdot y_1\right) \cdot y_1}{6 \cdot \left(b + y_1\right)}$ και $y_2 = \dfrac{0,7 \cdot \left(3 \cdot b + 1,4 \cdot y_1\right) \cdot y_1}{6 \cdot \left(b + 0,7 \cdot y_1\right)}$

$$\rightarrow F_{p2} = \frac{\gamma \cdot \left(3 \cdot b + 2 \cdot y_1\right) \cdot y_1^{\,2}}{6} + \frac{\gamma \cdot Q^2 \left(E_2 - E_1\right)}{g \cdot E_1 \cdot E_2}$$

$$\frac{F_{p2}}{\left(\gamma \cdot y_2 \cdot E_2\right)} = \frac{6 \cdot F_{p2}}{0,49 \cdot \left(3 \cdot b + 1,4 \cdot y_1\right)}$$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>:

E_1= 3,000 m^2 και E_2= 1,890 m^2

V_1= 2,716667 m /s και V_2= 4,312169 m /s

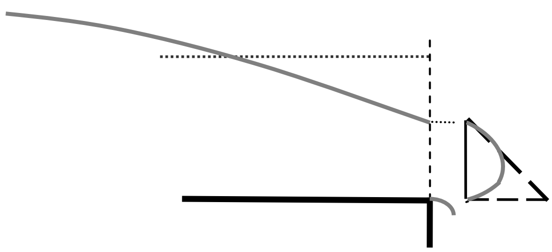
y_1 **=** 0,444444 m και y_2 **=** 0,319753 m

$\mathbf{F_{p2}}$**= 0,007**814 t = **0,077** kN και F^*_{p2}**=** 0,604333 t

$\mathbf{F_{p2}}$ / $\mathbf{F^*_{p2}}$**= 0,012**930 ≈ **1,29%**

<u>Αιτιολόγηση</u> (εκτός απαιτήσεων της Άσκησης):

- Η κατανομή των πιέσεων στην **ακμή**, όπου στον **πυθμένα** η **πίεση** είναι **μηδενική**, οδηγεί σε <u>μικρότερο εμβαδό</u> του διαγράμματος <u>από</u> το <u>τρίγωνο</u> – της υδροστατικής κατανομής.
- <u>Άρα και η δύναμη</u> $\mathbf{F_{p2}}$ είναι μικρότερη από την $\mathbf{F^*_{p2}}$, η οποία θα προέκυπτε από υδροστατική κατανομή των πιέσεων.

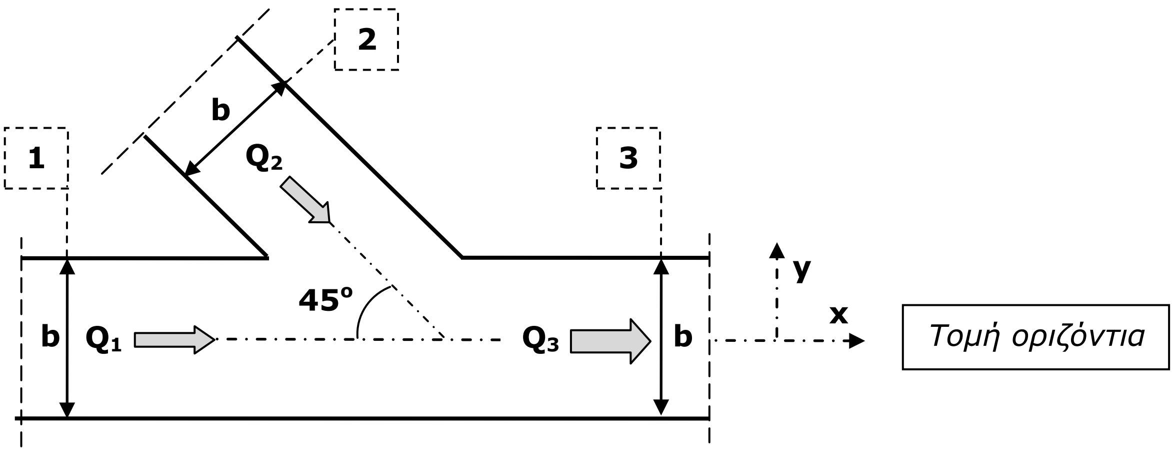


5.2 Διώρυγα ορθογωνικής διατομής με οριζόντιο πυθμένα, πλάτους **b** και βάθος ροής $\mathbf{y_1}$, μεταφέρει νερό με παροχή $\mathbf{Q_1}$. Στη διώρυγα συμβάλλει υπό γωνία **45°** διώρυγα ορθογωνικής διατομής με οριζόντιο πυθμένα, πλάτους **b** και βάθος ροής $\mathbf{y_2= y_1}$, η οποία μεταφέρει νερό με παροχή $\mathbf{Q_2= Q_1}$ (βλ. σχήμα).

Ζητείται το βάθος ροής $\mathbf{y_3}$ στη διώρυγα, αμέσως κατάντη της συμβολής.

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε τον όγκο αναφοράς (όπως φαίνεται στο σχήμα), αμελώντας τις δυνάμεις λόγω τριβών. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση συνεχείας και την εξίσωση ποσότητας κίνησης (με συντελεστές συνόρθωσης της ποσότητας κίνησης β= 1) και θεωρήστε ότι η προβολή στον άξονα x της δύναμης εκ πιέσεων στη διατομή (**2**) ισούται με τη συνολική δύναμη, η οποία ασκείται από τα στερεά όρια στον άξονα x: $\mathbf{F_{p2}.cos45^0= N_x}$

Αριθμητική εφαρμογή: $\mathbf{b}$= **3,0** m, $\mathbf{y_1= y_2=}$ **1,5** m, $\mathbf{Q_1= Q_2=}$ **3,0** m^3/s.



<βλ. 5.3.7 και 5.3.8 FM NV401_7 A>

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.7).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. 5.3.7).
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 + V_2 \cdot E_2 - V_3 \cdot E_3 = Q_1 - Q_2 + Q_3 = 0$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[\left(\vec{V}_1 \cdot Q_1\right) + \left(\vec{V}_2 \cdot Q_2\right) - \left(\vec{V}_3 \cdot Q_3\right)\right] = \sum_1^3 \left(\vec{F}_{pi}\right) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} -\rho \cdot \left[\left(V_1 \cdot Q_1\right) + \left(V_2 \cdot Q_2 \cdot \cos 45^o\right) - \left(V_3 \cdot Q_3\right)\right] \\ = \left(\gamma \cdot y_1 \cdot E_1\right) - \left(\gamma \cdot y_3 \cdot E_3\right) + F_{p2} \cdot \cos 45^o + N_x \end{array}$$

Άγνωστα μεγέθη: $E_1, y_1, V_1, E_2, y_2, V_2, Q_3, E_3, y_3, V_3, y_3, N_x, N_y$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$Q_3 = 2 \cdot Q_1 \rightarrow V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{E_1}, V_3 = \frac{2 \cdot Q_1}{E_3}$$

όπου: $E_1 = E_2 = b \cdot y_1$ και $E_3 = b \cdot y_3$ και $y_1 = y_2 = \frac{y_1}{2}$, $y_3 = \frac{y_3}{2}$

$$- \frac{Q_1^{\,2}}{g \cdot b \cdot y_1} \cdot \left(1 + \cos 45^o\right) + \frac{4 \cdot Q_1^{\,2}}{g \cdot b \cdot y_3} = \frac{b \cdot y_1^{\,2}}{2} - \frac{b \cdot y_3^{\,2}}{2}$$

Διότι: «*η προβολή στον άξονα x της δύναμης εκ πιέσεων στη διατομή (**2**) ισούται με τη συνολική δύναμη, η οποία ασκείται από τα στερεά όρια στον άξονα x*» ♫

$$\rightarrow \ y_3^{\,3} - \left(\frac{2 \cdot Q_1^{\,2} \cdot \left(1 + \cos 45^o\right)}{g \cdot b^2 \cdot y_1} + y_1^{\,2} \right) \cdot y_3 + \frac{8 \cdot Q_1^{\,2}}{g \cdot b^2} = 0$$

$$\rightarrow \ y_3^{\,3} - 2,482023 \cdot y_3 + 0,407747 = 0$$

<u>Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4</u> **Προτείνεται** ως μέθοδος!

<u>Δεν απαιτείται μετασχηματισμός</u>: $y_3^{\,3} - 2,482023 \cdot y_3 + 0,815494 = 0$

a	b	c	d
1	**0**	**-2,482023**	**0,815494**

$$(17) \rightarrow \ y_{2\nu+1} = y_\nu - \frac{y_{2\nu}^{\,3} - 2,482023 \cdot y_{2\nu} + 0,815494}{3 \cdot y_{2\nu}^{\,2} - 2,482023}$$

Για τη 1η <u>τιμής εκκίνησης</u>: ***αμελούμε*** το <**+0,815494**> → $y_{31} = 1,575444$

y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{34}
1,575444	*1,411163*	*1,375907*	*1,374275*	*1,374271* ✓

→ $\mathbf{y_3}$= **1,374** m.

<u>Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3</u> **ΔΕΝ προτείνεται** ως μέθοδος!

A	B	C	D	p	q	Δ
1	**0**	**-2,482023**	**0,815494**	-0,827431	0,407747	-0,400051 < 0

cos φ	φ	y_{31}	y_{32}	y_{33}
-0,541832	122,808404	**1,374**271	0,345122	-1,719394

<u>Αιτιολόγηση της απόρριψης της ρίζας 0, 345122</u> (εκτός απαιτήσεων της Άσκησης):

- Υπολογίζουμε τους <u>αριθμούς Froude</u> $\mathbf{F_i}$ των διατομών (βλ. <u>6.2.1</u>)

  $\mathbf{F_1}$= $\mathbf{F_2}$= 0,174 → <u>ροή υποκρίσιμη</u>

  $\mathbf{y_{31}}$= **1,374** m → $\mathbf{F_3}$= 0,412 < 1 → <u>ροή υποκρίσιμη</u>

  y_{32}= 0,345 m → F_3= 3,149 > 1 → <u>ροή υπερκρίσιμη</u>

- Όπως θα δούμε στο μάθημα <Εφαρμοσμένη Υδραυλική> του 5ου εξαμήνου, είναι γενικώς <u>αδύνατη</u> η μετάβαση από <u>υποκρίσιμη</u> σε <u>υπερκρίσιμη</u> ροή!
  Ενώ το αντίστροφο είναι δυνατό (βλ. <u>Άσκηση **4.2** 2010- 11</u>)!
  Άρα η y_{32}= 0,345 m <u>απορρίπτεται</u>.

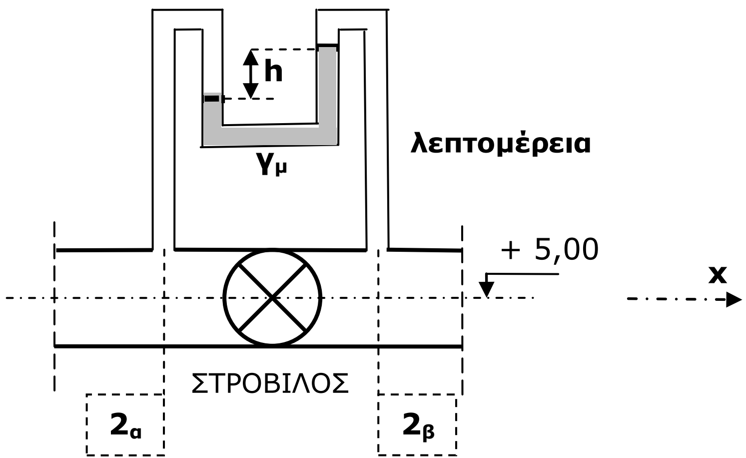
- <u>Σημειώστε</u> ότι, η **αριθμητική επίλυση** μας οδήγησε <u>*απευθείας*</u> στην τελικώς **αποδεκτή λύση ♫**

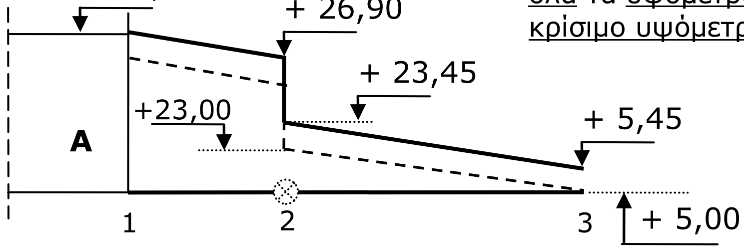
5.3 Από τη δεξαμενή σταθερής στάθμης Α τροφοδοτείται με νερό ο κλειστός αγωγός κυκλικής διατομής με ενιαία διάμετρο **D** και μήκος $\mathbf{L_{13}}$, ο οποίος εκρέει στην ατμόσφαιρα στο σημείο 3. Στο ένα τρίτο του μήκους του (σημείο 2) παρεμβάλλεται στρόβιλος (βλ. σχήμα). Οι απώλειες ενέργειας κατά μήκος του αγωγού δίνονται από τη σχέση : $\Delta H_L = 0,01 \cdot \dfrac{L}{g \cdot D} \cdot V^2$

Στις διατομές (2_α) και (2_β) ολίγον ανάντη και κατάντη του στροβίλου, τοποθετείται διαφορικό μανόμετρο, το οποίο περιέχει υγρό ειδικού βάρους $\boldsymbol{\gamma_\mu}$ και έχει ένδειξη **h** (βλ. λεπτομέρεια) .
Γίνεται η παραδοχή ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών (2_α) και (2_β), διότι η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρή, και ότι οι κατανομές των ταχυτήτων και πιέσεων σε αυτές τις διατομές είναι ομοιόμορφες.

Ζητούνται να υπολογισθούν :
1) Το μανομετρικό ύψος $\mathbf{H_\mu}$ του στροβίλου.
2) Η παροχή **Q** στον αγωγό.
3) Να χαραχθούν πλήρως (με τα υψόμετρά τους) η Γραμμή ενέργειας και η Πιεζομετρική Γραμμή και να διερευνηθούν ενδεχόμενα προβλήματα από υποπιέσεις.
4) Να υπολογισθεί η οριζόντια δύναμη, η οποία ασκείται από το νερό στο στρόβιλο.

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>: **D**= **0,3** m, $\mathbf{L_{13}}$= **900** m, **h**= **0,3** m, $\boldsymbol{\gamma_\mu}$= **12,5** t /m^3





<u>Σημείωση</u>: Στο σχήμα έχουν σημειωθεί <u>όλα</u> τα <u>υψόμετρα</u> της **Γ.Ε.** και το <u>κρίσιμο υψόμετρο</u> της **Π.Γ.** στον κόμβο **2**

<βλ. <u>5.1.5</u>, <u>5.3.2</u>, <u>5.4.4</u> , <u>5.4.5</u> και <u>5.5.3</u> FM NV401 A>

(52γ) → $Q = Q_{1-2} = Q_{2-3} \rightarrow V = \dfrac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$

(59) → $\left(z_A - z_3\right) - H_\mu = K \cdot \dfrac{L_{1-3} \cdot V^2}{g \cdot D} + \dfrac{V^2}{2 \cdot g}$, όπου K= 0,01

→ $\left(z_A - z_3\right) - H_\mu = \dfrac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} \cdot \left(2 \cdot K \cdot L_{1-3} + 1\right)$ → $Q = \pi \cdot \left(\dfrac{g \cdot \left(z_A - z_3 - H_\mu\right) \cdot D_1^{\,5}}{8 \cdot \left(2 \cdot K \cdot L_{1-3} + D\right)}\right)^{1/2}$

- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων στον όγκο αναφοράς (2_α) - (2_β):

(52γ) → $V_{2\alpha} \cdot E_{2\alpha} - V_{2\beta} \cdot E_{2\beta} = Q_{2\alpha} - Q_{2\beta} = 0 \rightarrow V_{2\alpha} = V_{2\beta} = V = \dfrac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$

(59) → $\left(H_{2\alpha} - H_{2\beta}\right) - H_\mu = 0$

διότι: «*... δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών (2_α) και (2_β)*» ♫

→ $H_\mu = \left(z_{2\alpha} + \dfrac{p_{2\alpha}}{\gamma} + \dfrac{V_{2\alpha}^{\;2}}{2 \cdot g}\right) - \left(z_{2\beta} + \dfrac{p_{2\beta}}{\gamma} + \dfrac{V_{2\beta}^{\;2}}{2 \cdot g}\right)$

(53δ) → $-\rho \cdot \left[\left(\vec{V}_{2\alpha} \cdot Q_{2\alpha}\right) - \left(\vec{V}_{2\beta} \cdot Q_{2\beta}\right)\right] = \sum_1^2 \left(\vec{F}_{pi}\right) + \vec{F}_g + \vec{N}$

→ $-\rho \cdot \left[\left(V_{2\alpha} \cdot Q_{2\alpha}\right) - \left(V_{2\beta} \cdot Q_{2\beta}\right)\right] = p_{2\alpha} \cdot E_{2\alpha} - p_{2\beta} \cdot E_{2\beta} + N_x$

και (23) → $\dfrac{p_{2\alpha} - p_{2\beta}}{\gamma} = \left(\dfrac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1\right) \cdot h$ διότι: $\Delta z_{(2\alpha - 2\beta)} = 0$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$H_\mu = \dfrac{p_{2\alpha} - p_{2\beta}}{\gamma} = \left(\dfrac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1\right) \cdot h$ διότι: $z_{2\alpha} = z_{2\beta}$ και $V_{2\alpha} = V_{2\beta}$

→ $Q = \pi \cdot \left(\dfrac{g \cdot \left[z_A - z_3 - \left(\dfrac{\gamma_\mu}{\gamma} - 1\right) \cdot h\right] \cdot D_1^{\,5}}{8 \cdot \left(2 \cdot K \cdot L_{1-3} + D\right)}\right)^{1/2}$

και $N_x = -\left(\gamma_\mu - \gamma\right) \cdot h \cdot \dfrac{\pi \cdot D^2}{4}$

Αριθμητική εφαρμογή:

H_μ= 3,450 m

Q= 0,210033 m^3 /s

V= 2,971363 m /s

N'_x= + 0,243866 t = **+ 2,219** kN

αγωγός	**Q** [m³/ s]	**D_i** [m]	**L_i** [m]	**$ΔH_{Li}$** [m]	**$V_i^2/2.g$** [m]
(1-2)	**0,210**	**0,300**	**300**	9,00	0,45
(2-3)		**0,300**	**600**	18,00	0,45

κόμβος	**Γ.Ε.** [m]	**Π.Γ.** [m]
$1_α$	+ 35,90	+ 35,90
$1_κ$	+ 35,90	+ 35,45
$2_α$	+ 26,90	+ 26,45
$2_κ$	+ 23,45	+ 23,00
3	+ 5,45	+ 5,00

κόμβος **$2_κ$**: *Κίνδυνος* **υποπιέσεων**: <u>Πίεση</u>= 23,00 – 5,00= **+ 18,00** m >0 ✓