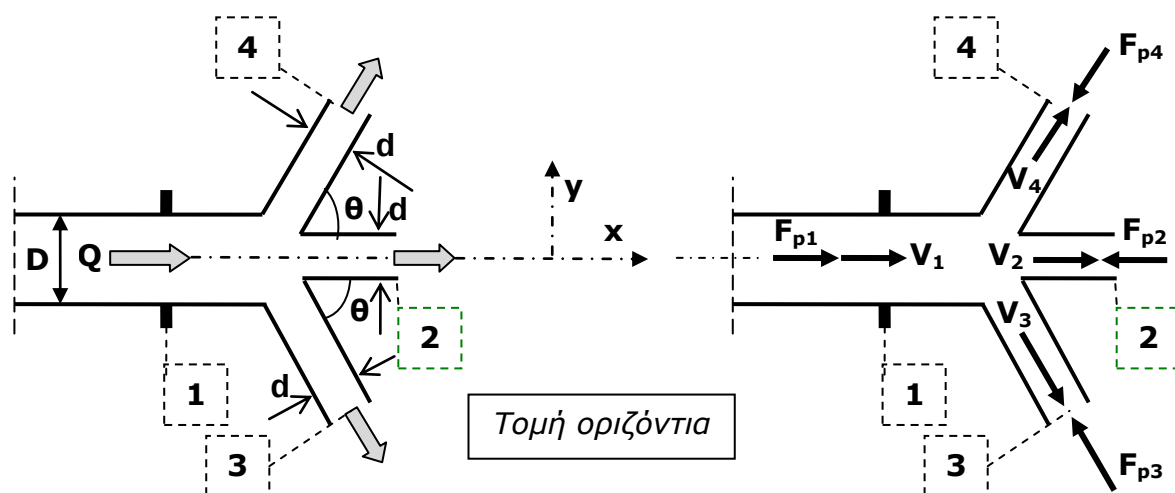


4.1 Στο πέρας οριζόντιου αγωγού κυκλικής διατομής διαμέτρου D συνδέεται οριζόντιο συμμετρικό ειδικό τεμάχιο. Η διερχόμενη παροχή νερού στον αγωγό είναι Q και εκρέει στην ατμόσφαιρα από τους τρεις αγωγούς κυκλικής διατομής διαμέτρου d του ειδικού τεμαχίου (βλ. σχήμα).

Αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστούν:

1. Η τιμή της πίεσης p_1 στη διατομή **1**.
2. Η γωνία θ ώστε η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο ειδικό τεμάχιο να είναι μηδενική.

Αριθμητική εφαρμογή: $Q = 2,0 \text{ m}^3/\text{s}$, $D = 1,0 \text{ m}$, $d = 0,4 \text{ m}$.



<βλ. 5.3.2 FM NV401_6 A>

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.2).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. 5.3.2).
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 - V_3 \cdot E_3 - V_4 \cdot E_4 = Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 = H_3 = H_4$$

$$\rightarrow z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \text{ και } z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{και } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V}_1 \cdot Q_1) - (\vec{V}_2 \cdot Q_2) - (\vec{V}_3 \cdot Q_3) - (\vec{V}_4 \cdot Q_4) \right] = \sum_1^4 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot \left[(V_1 \cdot Q_1) - (V_2 \cdot Q_2) - (V_3 \cdot Q_3) \cdot \cos \theta - (V_4 \cdot Q_4) \cdot \cos \theta \right] = p_1 \cdot E_1 - p_2 \cdot E_2 - p_3 \cdot E_3 \cdot \cos \theta - p_4 \cdot E_4 \cdot \cos \theta + N_x$$

$$\text{και } -\rho \cdot \left[(V_3 \cdot Q_3) \cdot \sin \theta - (V_4 \cdot Q_4) \cdot \sin \theta \right] = -p_3 \cdot E_3 \cdot \sin \theta - p_4 \cdot E_4 \cdot \sin \theta + N_y$$

Άγνωστα μεγέθη: $V_2, Q_2, V_3, Q_3, V_4, Q_4, p_1, \theta$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2 = V_3 \text{ (διότι } z_2 = z_3 = 0 \text{ και } p_2 = p_3 = 0)$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2 = V_4 \text{ (διότι } z_2 = z_4 = 0 \text{ και } p_2 = p_4 = 0)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2 = V_3 = V_4 = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot \pi \cdot d^2}$$

$$\rightarrow Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{Q}{3} \text{ και } p_1 = \frac{\gamma \cdot (V_2^2 - V_1^2)}{2 \cdot g} = \frac{8 \cdot \gamma \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\frac{1}{9 \cdot d^4} - \frac{1}{D^4} \right]$$

$$\rightarrow N_x = - \left(\frac{4 \cdot \gamma \cdot Q^2}{\pi \cdot g} \right) \cdot \left(\frac{1}{D^2} - \frac{1 + 2 \cdot \cos \theta}{9 \cdot d^2} \right) - \left(p_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) = 0$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{D^4 + 9 \cdot d^4}{4 \cdot D^2 \cdot d^2} - \frac{1}{2} \text{ ανεξάρτητη της } Q! \text{ (και } N_y = 0)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_2 = V_3 = V_4 = 5,305165 \text{ m/s}$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0,666667 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p_1 = -1,103987 \text{ t/m}^2$$

$$\cos \theta = 1,422500 > |1| \rightarrow \text{άτοπο} \bullet^*$$

Περαιτέρω διερεύνηση:

- Θέτω: $X = \left(\frac{D}{d} \right)^2$

- Πρέπει: $\cos \theta \leq |1| \rightarrow -1 \leq \frac{X^2 + 9}{2 \cdot X} \leq 3$

- Με τα αριθμητικά δεδομένα της Άσκησης είναι $X = 6,25 \rightarrow \frac{X^2 + 9}{2 \cdot X} = 3,845$

4.2 Διώρυγα ορθογωνικής διατομής, μεγάλου πλάτους, σχεδιάζεται με οριζόντιο πυθμένα (μηδενική κατά μήκος κλίση) και μεταφέρει νερό με παροχή q ανά μέτρο πλάτους της. Τα βάθη ομοιόμορφης ροής με ελεύθερη επιφάνεια στις διατομές (1) και (2) είναι y_1 και y_2 αντιστοίχως (βλ. σχήμα).

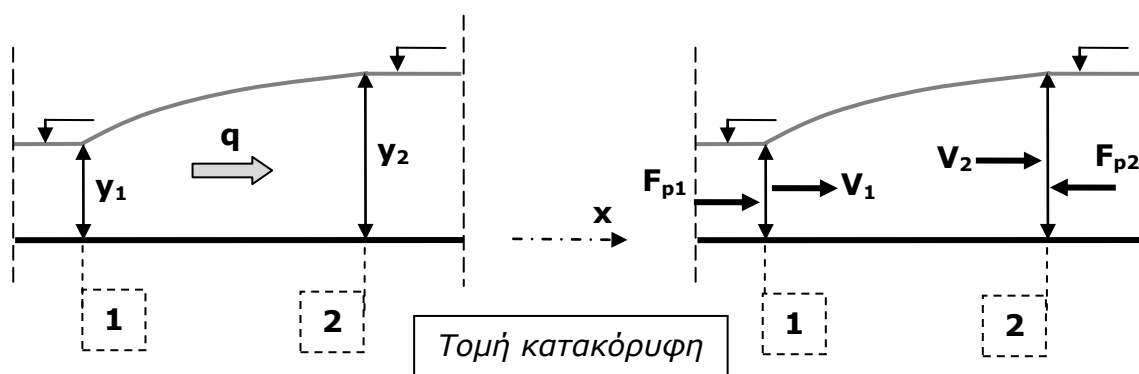
Μεταξύ των διατομών (1) και (2) οι απώλειες ενέργειας είναι σημαντικές και δεν είναι δυνατό να αμεληθούν.

Είναι όμως δυνατό να αμεληθούν οι οριζόντιες δυνάμεις οι οποίες ασκούνται από τον πυθμένα στη ροή, καθώς και να θεωρηθούν όλοι οι συντελεστές συνόρθωσης στις δύο διατομές ίσοι με τη μονάδα.

Να διατυπωθούν:

1. Η σχέση η οποία εκφράζει το βάθος y_2 ως συνάρτηση των y_1 και q .
2. Η σχέση η οποία εκφράζει το ύψος απωλειών ενέργειας μεταξύ των διατομών (1) και (2) ως συνάρτηση των y_1 και y_2 .

Αριθμητική εφαρμογή: $q = 4,0 \text{ m}^2/\text{s}$, $y_1 = 0,5 \text{ m}$.



<βλ. 5.3.7 FM NV401_6 A>

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.7).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. 5.3.7).
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot y_1 - V_2 \cdot y_2 = 0, q_1 = q_2 = q$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\rightarrow z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V}_1 \cdot \vec{q}_1) - (\vec{V}_2 \cdot \vec{q}_2) \right] = \sum_1^2 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot \left[(V_1 \cdot q_1) - (V_2 \cdot q_2) \right] = (\gamma \cdot y_1 \cdot y_1) - (\gamma \cdot y_2 \cdot y_2) + N_x$$

Άγνωστα μεγέθη: $y_1, V_1, y_2, V_2, Q_2, \Delta H_{\alpha(1-2)}$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$q_1 = q_2 = q \rightarrow V_1 = \frac{q}{y_1}, V_2 = \frac{q}{y_2} \text{ και}$$

$$N_x = \frac{\gamma \cdot q^2 \cdot (y_1 - y_2)}{g \cdot y_1 \cdot y_2} - \frac{\gamma}{2} (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

Διότι: «Είναι δυνατό να αμεληθούν οι οριζόντιες δυνάμεις οι οποίες ασκούνται από τον πυθμένα στη ροή» 

$$\text{και } y_1 = \frac{y_1}{2}, y_2 = \frac{y_2}{2}$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 - \frac{8 \cdot q^2}{g \cdot y_1 \cdot y_2} = 0$$

$$\text{Διαιρώ με } y_1^3 \text{ και θέτω } X = \frac{y_2}{y_1}, K = \frac{q}{y_1 \cdot \sqrt{g \cdot y_1}} \rightarrow X^2 + X - 8 \cdot K^2 = 0$$

$$\rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + 8 \cdot K^2} - 1 \right] \text{ (η άλλη ρίζα απορρίπτεται)}$$

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{8 \cdot q^2}{g \cdot y_1^3} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Ο όρος $K = \frac{q}{y_1 \cdot \sqrt{g \cdot y_1}}$ είναι ο **αριθμός Froude F_1** της διατομής **1** (βλ. 6.2.1)!

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta H_{\alpha(1-2)} \text{ (διότι } z_1 = z_2 = 0)$$

$$\rightarrow \Delta H_{\alpha(1-2)} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 \cdot y_1 \cdot y_2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$y_2 = \mathbf{2,316409 \text{ m}}$$

$$V_1 = 8,000 \text{ m/s}, V_2 = 1,726 \text{ m/s}$$

$$\Delta H_{\alpha 1-2} = \mathbf{2,293587 \text{ m}}$$

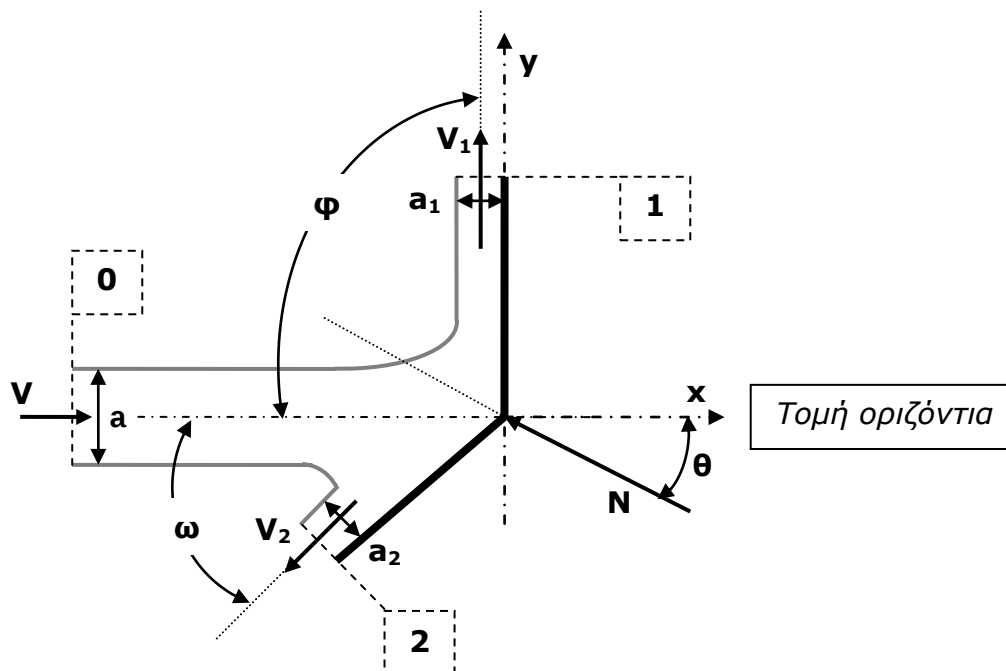
4.3 Δισδιάστατο πτερύγιο σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται εκτοξευόμενη δισδιάστατη φλέβα νερού πάχους $\mathbf{a}$, με ταχύτητα $\mathbf{V}$, υπό γωνίες $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{\omega}$ (βλ. σχήμα).

Με δεδομένο ότι η αντίδραση της στήριξης $\mathbf{N}$ του πτερυγίου έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας $(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega})$, ζητείται να υπολογιστούν:

1. Τα πάχη των φλεβών $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$, συναρτήσει των $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{\omega}$.
2. Η αντίδραση της στήριξης $\mathbf{N}$ (ανά μέτρο πλάτους καθέτως στο οριζόντιο επίπεδο).

Παρατήρηση: Αμελείστε τις απώλειες ενέργειας και θεωρείστε όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα.

Αριθμητική εφαρμογή: $\mathbf{a} = 6 \text{ cm}$, $\mathbf{V} = 5 \text{ m / s}$, $\boldsymbol{\varphi} = 90^\circ$, $\boldsymbol{\omega} = 40^\circ$.



<βλ. 5.3.10 FM NV401_7 A>

- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.10).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. 5.3.10).
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V \cdot a - V_1 \cdot a_1 - V_2 \cdot a_2 = q_0 - q_1 - q_2 = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_0 = H_1 = H_2$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{και } z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V} \cdot \mathbf{q}_0) - (\vec{V}_1 \cdot \mathbf{q}_1) - (\vec{V}_2 \cdot \mathbf{q}_2) \right] = \sum_1^3 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot [V \cdot q_0 - V_1 \cdot q_1 \cdot \cos \phi + V_2 \cdot q_2 \cdot \cos \omega] = \sum_1^3 (F_{\text{pix}}) + N \cdot \cos \theta$$

$$\text{και } -\rho \cdot [-V_1 \cdot q_1 \cdot \sin \phi + V_2 \cdot q_2 \cdot \sin \omega] = \sum_1^3 (F_{\text{piy}}) + N \cdot \sin \theta$$

Άγνωστα μεγέθη: $q_0, a_1, V_1, q_1, a_2, V_2, q_2, N, \theta$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_1 = V_2 \text{ (διότι } z_1 = z_2 = 0 \text{ και } p_1 = p_2 = 0)$$

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \rightarrow V = V_1 = V_2 \rightarrow a = a_1 + a_2 \text{ (διότι } z_0 = 0 \text{ και } p_0 = 0)$$

$$q_0 = V \cdot a, q_1 = V \cdot a_1, q_2 = V \cdot a_2$$

Εκφώνηση: «*Η συνολική αντίδραση **N** της στήριξης του πτερυγίου έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας ($\phi + \omega$)*»

$$\rightarrow \theta = 90^\circ - \frac{\phi + \omega}{2}$$

$$-\rho \cdot V^2 \cdot [a - a_1 \cdot \cos \phi + a_2 \cdot \cos \omega] = -N \cdot \cos \theta$$

$$-\rho \cdot V^2 \cdot [-a_1 \cdot \sin \phi + a_2 \cdot \sin \omega] = N \cdot \sin \theta$$

$$\rightarrow \frac{[a_1 \cdot \sin \phi - (a - a_1) \cdot \sin \omega]}{[a - a_1 \cdot \cos \phi + (a - a_1) \cdot \cos \omega]} = \tan \theta$$

$$\rightarrow N = \frac{\gamma \cdot [a_1 \cdot \sin \phi - (a - a_1) \cdot \sin \omega] \cdot V^2}{g \cdot \sin \theta}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_1 = V_2 = V = 5,0 \text{ m/s}$$

$$a_1 = 4,398923 \text{ cm και } a_2 = 1,601077 \text{ cm}$$

$$q_0 = 0,300000 \text{ m}^2/\text{s}, q_1 = 0,219946 \text{ m}^2/\text{s} \text{ και } q_2 = 0,080054 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$N = + 0,203200 \text{ t/m} = 1,993 \text{ kN/m}$$