

5. ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η μέθοδος εφαρμόζεται όταν στη ροή υπάρχει κυριαρχία μεταβολής των χαρακτηριστικών της μόνο κατά μία διάσταση. Επειδή τούτο συμβαίνει σε ευρύτατα πεδία πραγματικών - πρακτικών προβλημάτων, αναδεικνύεται ως η **σημαντικότερη μέθοδος** ανάλυσης. Βασίζεται στην έννοια του **σταθερού πεπερασμένου όγκου αναφοράς**. Αναπτύσσονται η θεμελίωση της μεθόδου, οι βασικές εξισώσεις και η εφαρμογή της σε όλες τις μορφές ροής: Υπό Πίεση, με Ελεύθερη Επιφάνεια, Φλέβα στην Ατμόσφαιρα. Εφαρμογές της μεθόδου παρουσιάζονται και σε επόμενα Κεφάλαια, καθώς και σε Μαθήματα επομένων εξαμήνων!

5.1 Εισαγωγή

5.1.1 Η μέθοδος

- Γενικώς η **κίνηση ρευστού** είναι **τρισδιάστατο** πρόβλημα.
 - ο Τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούν να έχουν συνιστώσες σε καθεμία από τις τρεις διευθύνσεις.
 - ο Σε αυτές τις συνθήκες οι γραμμές ροής αποτελούν ένα πολύπλοκο σύστημα από χωρικές καμπύλες.
- Η μέθοδος της μονοδιάστατης ανάλυσης είναι μία **αυθαίρετη απλοποίηση**.
 - ο Οι μεταβολές των χαρακτηριστικών της ροής θεωρούνται **ουσιώδεις μόνο κατά μήκος** της **κύριας κατεύθυνσης** της ροής.
 - ο Με μία λέξη: υποτίθεται ότι η **ροή** έχει τα **χαρακτηριστικά μιας γραμμής ροής**.
- Η **απλοποίηση** αυτή επιτρέπει την **προσαρμογή** σε **βολικές μορφές** δύο σημαντικών σχέσεων της υδροδυναμικής (βλ. 4.1.2):
 - ο Της εξίσωσης **ποσότητας κίνησης**
 - ο Της εξίσωσης **ενέργειας**
 - ο Οι δύο αυτές σχέσεις μαζί με την εξίσωση **συνεχείας** αποτελούν το **σύνολο** των **εξισώσεων** στη **μονοδιάστατη ανάλυση**.
- Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν **διαφορετικούς** τρόπους πρακτικής εφαρμογής και απλοποιήσεων ☹ σε καθεμία από τις μορφές ροής: Υπό Πίεση - Με Ελεύθερη Επιφάνεια – Φλέβα στην Ατμόσφαιρα (βλ. 5.2.1, 5.2.2 και 5.2.3).

5.1.2 Η θεμελίωση της μεθόδου

- **Μέθοδος Euler** περιγραφής της κίνησης ρευστού (βλ. 3.1.3) ↴
- **Μέθοδος του σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς** (βλ. 4.2.1) ↴
- **Πεπερασμένος όγκος αναφοράς** (βλ. 4.2.1) και **θεώρημα** μεταφοράς **Reynolds** ☒ ↴
- **Επιλογή κατάλληλου** πεπερασμένου **όγκου αναφοράς**

- Σε αυτή βασίζεται η επιτυχής εφαρμογή της μεθόδου σε κάθε διαφορετικό πρόβλημα ή πεδίο προβλημάτων. Για οδηγίες – διαδικασία (βλ. 5.2.5).
- Ο όγκος αναφοράς **U** περικλείεται από επιφάνεια **E**.
- Η επιφάνεια **E** αποτελείται από **δύο διαφορετικής φύσης περιοχές**:
 - Τα **στερεά όρια**
 - Τις **διατομές εισόδου / εξόδου**.
- Παρατηρούμε - καταγράφουμε τις **μεταβολές** των **ιδιοτήτων** του **ρευστού**, οι οποίες **εισέρχονται, εξέρχονται** ή / και **συγκεντρώνονται** στον **U**, **διαμέσου** της **E**.
- Οι **ιδιότητες** χρησιμοποιούν ως **όχημα** το **διάνυσμα** της **ταχύτητας**.
- Στα **στερεά όρια** η **κινηματική οριακή συνθήκη** επιβάλλει **μηδενική ταχύτητα** (βλ. 3.4.2). Επομένως **μεταφορά ιδιοτήτων** είναι δυνατή **μόνο** διαμέσου των **διατομών εισόδου / εξόδου**!

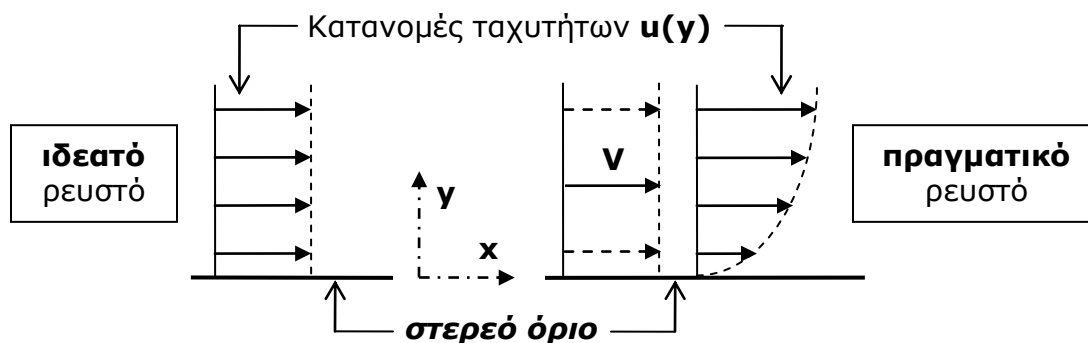
5.1.3 Τα εμπλεκόμενα φυσικά μεγέθη

- Η **παροχή** **Q_i** (εισερχόμενη ή εξερχόμενη) σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
- Το **εμβαδό** της διατομής **E_i** (εισόδου ή εξόδου).
- Η **μέση ταχύτητα** **V_i** σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).

- Ορίζεται ως ο λόγος της **παροχής** **Q_i** προς το **εμβαδό** της διατομής **E_i**

$$\rightarrow V_i = \frac{Q_i}{E_i} \quad (51) \rightarrow \text{Η μέση ταχύτητα είναι λογιστικό μέγεθος!}$$

- Εάν χαράξουμε **γραφικά** την **κατανομή** της **μέσης ταχύτητας** προκύπτει **εξ' ορισμού** η **εικόνα κατανομής** της **ταχύτητας ιδεατού ρευστού**! Ενώ, η κατανομή της ταχύτητας στη διατομή είναι - για **πραγματικό ρευστό** - **προφανώς διαφορετική** (βλ. 3.4.4).



- Ως εκ τούτου η χρήση της **μέσης ταχύτητας**, **αντί** της **πραγματικής κατανομής των ταχυτήτων** οδηγεί σε **λογιστικά προβλήματα**, τα οποία αντιμετωπίζονται με την εισαγωγή στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης και ενέργειας **συντελεστών** (λογιστικής) **συνόρθωσης** (βλ. 5.2.2 και 5.2.3).

- Ένα παράδειγμα από τη Μηχανική του Στερεού θα δώσει μια εικόνα για τη φύση των συντελεστών συνόρθωσης:
 - Το εμβαδό κύκλου με διάμετρο **d** είναι: $E_d = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ και η ροπή αδρανείας του, ως προς κεντροβαρικό άξονα, είναι: $J_d = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$
 - Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά **a** και εμβαδό ίσο με αυτό του κύκλου. Τότε η πλευρά είναι: $a = \frac{\sqrt{\pi} \cdot d}{2}$ και η ροπή αδρανείας του, ως προς κεντροβαρικό άξονα, είναι: $J_a = \frac{a^4}{12} = \frac{\pi^2 \cdot d^4}{192} \neq J_d$
 - Εάν σχηματίσουμε το λόγο των ροπών αδρανείας, θα προκύψει ένας συντελεστής: $c = \frac{J_a}{J_d} = \frac{\pi}{3} \approx 1,0472$, ο οποίος διορθώνει λογιστικά τη χρήση του ισοδύναμου τετραγώνου, αντί του (πραγματικού) κύκλου για τον υπολογισμό της ροπής αδρανείας.
- Η πίεση σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται **ομοιόμορφη Ροή** υπό **Πίεση**, η **κατανομή** των **πιέσεων** είναι **ομοιόμορφη** σε όλη την επιφάνεια και έχει νόημα να ορίζεται η αντιπροσωπευτική πίεση της διατομής **p_i**.
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται **ομοιόμορφη Ροή** με **Ελεύθερη Επιφάνεια**, η **κατανομή** των **πιέσεων** είναι **υδροστατική** καθ' ύψος της επιφάνειας και δεν έχει καν νόημα να ορίζεται πίεση της διατομής.
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται **ομοιόμορφη Ροή Φλέβας** στην **Ατμόσφαιρα**, η **κατανομή** των **πιέσεων** είναι **μηδενική** σε όλη την επιφάνεια και έχει νόημα να ορίζεται η αντιπροσωπευτική πίεση της διατομής **p_i = 0**.
- Η δύναμη εκ πιέσεων σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου).
Ο υπολογισμών των δυνάμεων διαφέρει στις διαφορετικές μορφές ροής: Υπό Πίεση - Με Ελεύθερη Επιφάνεια – Φλέβα στην Ατμόσφαιρα (βλ. 5.2.3).
- Η ενέργεια σε κάθε διατομή (εισόδου ή εξόδου), οι απώλειες ενέργειας μεταξύ διατομών και η εξωτερική προσθήκη / αφαίρεση ενέργειας.
 - Στην εξίσωση ενέργειας, όπως εφαρμόζεται στη μέθοδο, οι όροι εκφράζουν την **ενέργεια ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού**, ως εκ τούτου η ενέργεια εκφράζεται σε **διαστάσεις μήκους**.
Το αυτό ισχύει και για τις **απώλειες ενέργειας** καθώς και για την εξωτερική προσθήκη / αφαίρεση ενέργειας μέσω υδραυλικών μηχανών: αντλιών / στροβίλων, η οποία ορίζεται ως **μανομετρικό ύψος** (βλ. 5.2.4).
 - Παρότι η εξίσωση ενέργειας είναι ενιαία, έχει **διαφορετικούς** τρόπους πρακτικής εφαρμογής και απλοποιήσεων στις διαφορετικές μορφές ροής: Υπό Πίεση - Με Ελεύθερη Επιφάνεια – Φλέβα στην Ατμόσφαιρα (βλ. 5.2.4).
- Η πυκνότητα **ρ** και το ειδικό βάρος **γ** του ρέοντος ρευστού (ή ρευστών).

5.1.4 Διαστάσεις – μονάδες των εμπλεκόμενων φυσικών μεγεθών

- ο Εκφράζονται σε διάφορα συστήματα και διάφορες μονάδες. Είναι **απαραίτητη** η **ενοποίηση πριν** από κάθε **αριθμητική εφαρμογή**.
- ο Χρηστικός πίνακας:

μέγεθος	σύμβολο	διάσταση	μονάδες
Παροχή	Q	L^3 / T	$m^3 / s, lt / s$
Εμβαδό	E	L^2	m^2
Μέση Ταχύτητα	V	L / T	m / s
Πίεση	P	F / L^2	$t / m^2, kgr^* / m^2, N / m^2 (= Pa)$
Δύναμη εκ Πιέσεων	F_p	F	t, kgr^*, kN, N
Ενέργεια	H	L	m (βλ. 5.2.4)
Απώλειες Ενέργειας	ΔH		
Μανομετρικό Ύψος	h_μ		
Πυκνότητα	ρ	M / L^3	kgr / m^3
Ειδικό Βάρος	γ	F / L^3	$t / m^3, kgr^* / m^3, kN / m^3, N / m^3$

5.1.5 Συνήθη όργανα – διατάξεις μέτρησης φυσικών μεγεθών

• Παροχή:

- ο Γενικώς: **Ογκομέτρηση, μέτρηση βάρους** (βλ. Πειράματα)
- ο Ροή υπό Πίεση:
 - **Μετρητής Venturi** (βλ. 5.4.4).
 - **Ροτάμετρο** (βλ. Κεφάλαιο 9).
 - Συνδυασμός απλού πιεζόμετρου + σωλήνα Pitot (βλ. Κεφάλαιο 7).
- ο Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια:
 - **Θυρόφραγμα** (βλ. Κεφάλαιο 8).
 - **Υπερχειλιστής** (βλ. Κεφάλαιο 8).

• Πίεση:

- ο Ροή υπό Πίεση:
 - **Απλό πιεζόμετρο** (βλ. 2.5.2).
 - **Διαφορικό μανόμετρο** (βλ. 2.5.2).

5.1.6 Ο όγκος αναφοράς

- Η **επιλογή** του **κατάλληλου** - για κάθε περίπτωση - **όγκου αναφοράς** προϋποθέτει προσέγγιση Μηχανικού και σχετική εμπειρία η οποία θα αποκτηθεί - σε κάποιο βαθμό - με τη σε βάθος μελέτη των εφαρμογών υπολογισμού και προφανώς με τη συστηματική επίλυση των αντιστοίχων Σειρών Ασκήσεων. Κάποιοι γενικοί κανόνες είναι οι παρακάτω:

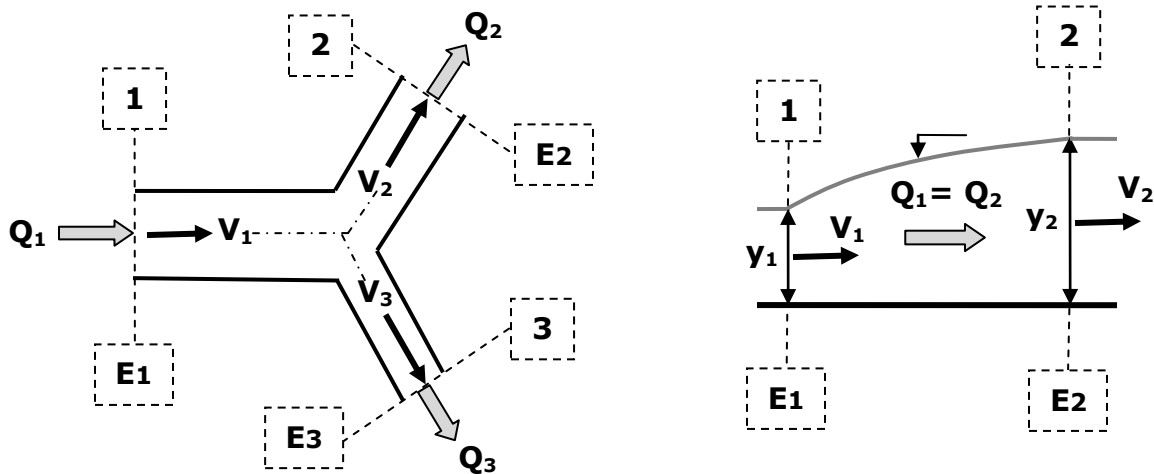
- Ο όγκος πρέπει να περιλαμβάνει ολόκληρη τη **περιοχή**, για την οποία θέλουμε να **αξιοποιήσουμε πληροφορίες**, ή / και να **εξάγουμε συμπεράσματα**.
- Ο όγκος **δεν** είναι **αναγκαστικά σταθερός** - συνήθως στη μη μόνιμη ροή - είναι μεταβλητός!
- Ο **συνολικός** όγκος είναι **πιθανό** να είναι **σύνθετος**, δηλαδή να αποτελείται από **επί μέρους τμήματα** – όγκους, ώστε να καλύπτονται οι παραπάνω προδιαγραφές για πληροφορίες και συμπεράσματα!
- Τα **στερεά όρια** του όγκου **δεν** είναι κατ' ανάγκη **στερεά**!.. ☹
Αρκεί να ικανοποιείται η **κινηματική οριακή συνθήκη** (βλ. 3.4.2).
Επομένως ως στερεά όρια νοούνται:
 - Τα **τοιχώματα** των αγωγών σε ροή υπό πίεση.
 - Ο **πυθμένος** των αγωγών, αλλά **και** η **ελεύθερη επιφάνεια** ή η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ μη μιγνυομένων ρευστών σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια.
 - Η **στερεή επιφάνεια** (πλάκες, πτερύγια), όπου προσπίπτει φλέβα, αλλά και η **διαχωριστική επιφάνεια** φλέβας / αέρα σε ροή φλέβας στην ατμόσφαιρα.
- Οι **διατομές εισόδου / εξόδου** στον όγκο αναφοράς:
 - Είναι διατομές **ομοιόμορφης** ή / και **παράλληλης ροής**.
 - **Δεν** αναφέρονται κατ' ανάγκη σε πραγματοποιούμενη είσοδο / έξοδο ρευστού. Αναφέρονται σε **είσοδο / έξοδο**, στον / από τον **όγκο αναφοράς**! (Μία πόρτα αιθούσης παραμένει πόρτα, ανεξαρτήτως εάν σε κάποιες χρονικές στιγμές δεν χρησιμοποιείται...)
 - Είναι δυνατό να **αλλάζουν ρόλο**: Η **ίδια διατομή** να αποτελεί **έξοδο** από **ένα τμήμα** κάποιου **συνολικού** όγκου αναφοράς και **είσοδο** σε **άλλο τμήμα** του! (Μία πόρτα εξόδου από αίθουσα είναι πόρτα εισόδου στο διάδρομο...)
 - Πρέπει να έχουν κάποια γνωστά δεδομένα (μορφή, διαστάσεις) και να **προσφέρουν όλες** τις **δεδομένες πληροφορίες** (παροχή, ταχύτητα, πίεση,.. μέσω οργάνων μέτρησης ή της *εκφώνησης* του προβλήματος...)
 - Πρέπει να επιτρέπουν την **εξαγωγή όλων** των **απαιτούμενων συμπερασμάτων**!

5.2 Εφαρμογή της μεθόδου – βασικές εξισώσεις

5.2.1 Γενικά

- Οι εξισώσεις παρουσιάζονται εις τη συνέχεια σε διάφορες μορφές απλοποίησης:
 - Γενική μορφή: **Μη μόνιμη** ροή **συμπιεστού** ρευστού.
 - Απλοποιημένη μορφή: **Μόνιμη** ροή **ασυμπίεστου** ρευστού.
 - Χρηστική μορφή: **Μόνιμη** ροή **ασυμπίεστου** ρευστού σε διατομές **ομοιόμορφης** ροής.
- Οι εφαρμογές υπολογισμού εις το παρόν Κεφάλαιο ακολουθούν αντίστροφη πορεία: *Από τα απλά στα σύνθετα...*

5.2.2 Εξίσωση Συνεχειας (βλ. 4.2.2)



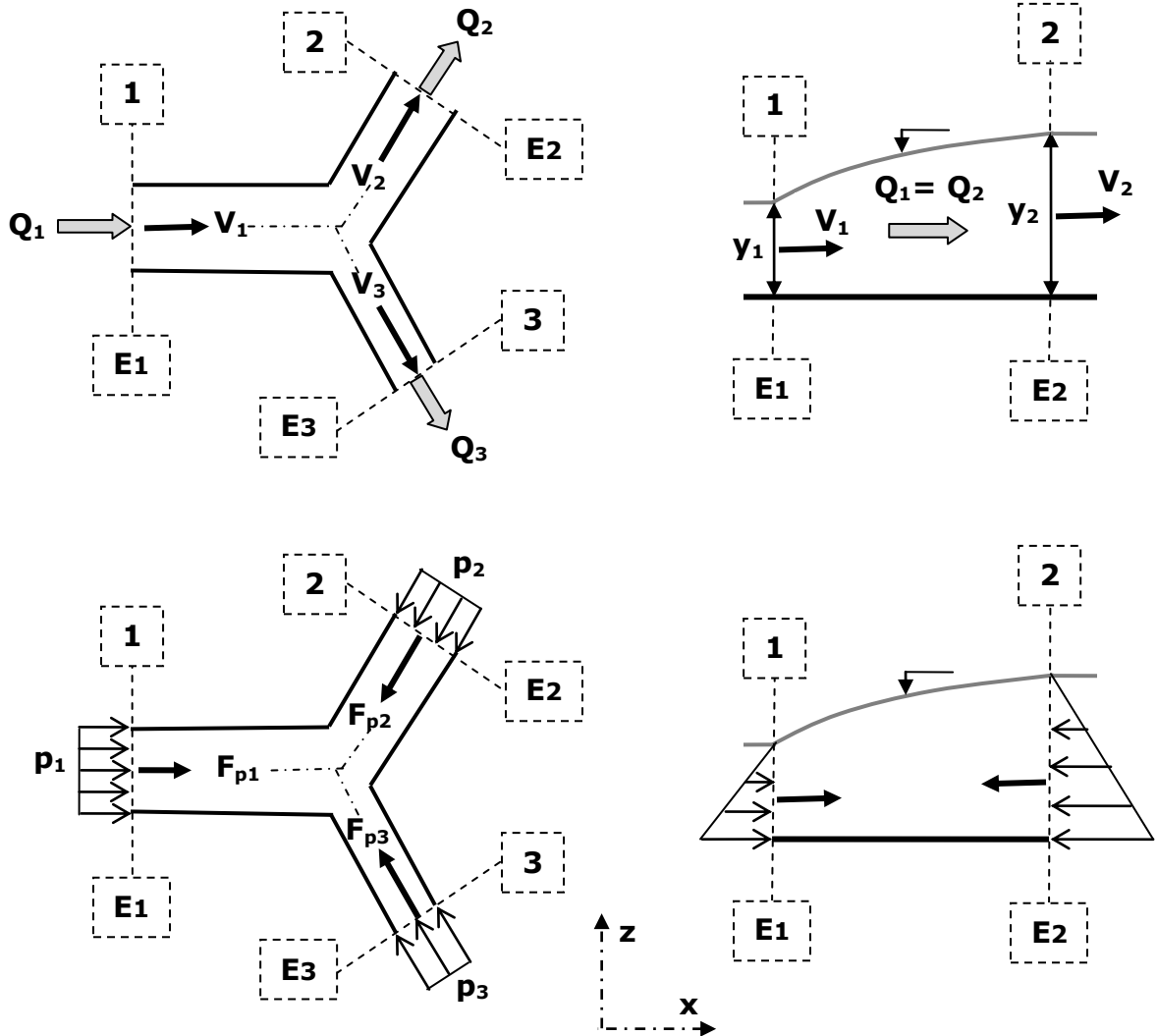
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U \rho \cdot dU - \int_E \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} = 0 \quad (52\alpha) \rightarrow \text{Γενική μορφή}$$

$$\int_E \vec{V} \cdot d\vec{E} = 0 \quad (52\beta) \rightarrow \text{Απλοποιημένη μορφή}$$

$$\sum_{i=1}^n V_i \cdot E_i = \sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad (52\gamma) \rightarrow \text{Χρηστική μορφή}$$

- Στη σχέση (52γ) τα πρόσημα μέσα στα αθροίσματα είναι:
 - **Θετικά (+)** για τις διατομές **εισόδου**.
 - **Αρνητικά (-)** για τις διατομές **εξόδου**.
- Η εξίσωση συνεχειας **ΔΕΝ** επηρεάζεται *αμέσως* από το **σύστημα αξόνων**.
- Η εξίσωση συνεχειας **ΔΕΝ** διαφέρει στις διαφορετικές **μορφές ροής**.
- Στην εξίσωση συνεχειας **ΔΕΝ** υπάρχουν - *νοούνται* **συντελεστές συνόρθωσης**.

5.2.3 Εξίσωση Ποσότητας Κίνησης (βλ. 4.2.3)



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U \rho \cdot \vec{V} \cdot dU - \int_E \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{E}) = \sum \vec{F} \quad (53a) \rightarrow \text{Γενική μορφή}$$

$$-\rho \cdot \int_E \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{E}) = \sum \vec{F} \quad (53\beta) \rightarrow \text{Απλοποιημένη μορφή}$$

$$-\rho \cdot \sum_1^n \beta_i \cdot \vec{V}_i \cdot Q_i = \vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_g \quad (53\gamma) \quad (\text{Ενδιάμεση μορφή})$$

$$-\rho \cdot \sum_1^n \beta_i \cdot \vec{V}_i \cdot Q_i = \sum_1^n (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N} \quad (53\delta) \rightarrow \text{Χρηστική διανυσματική μορφή}$$

- Στο αριστερό σκέλος των σχέσεων (53γ) και (53δ) εμφανίζονται οι αδρανειακές δυνάμεις και τα πρόσημα μέσα στο άθροισμα είναι:
 - ο **Θετικά (+)** για τις διατομές εισόδου.
 - ο **Αρνητικά (-)** για τις διατομές εξόδου.
- Στο δεξιό σκέλος της σχέσης (53γ) εμφανίζονται οι εξής δυνάμεις:
 - ο $\bar{F}_p$: Δυνάμεις από κάθετες πιέσεις από το περιβάλλον = στερεά όρια + ρευστό (το οποίο είναι εκτός του όγκου αναφοράς).
 - ο $\bar{F}_\tau$: Δυνάμεις από διατμητικές τάσεις από το περιβάλλον = στερεά όρια + ρευστό (το οποίο είναι εκτός του όγκου αναφοράς).
 - ο $\bar{F}_g$: Καθολικές δυνάμεις από το πεδίο βαρύτητας = βάρος του ρευστού (το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο αναφοράς).
- Στο δεξιό σκέλος της σχέσης (53δ) εμφανίζονται οι εξής δυνάμεις:
 - ο $\sum_1^n \bar{F}_{pi}$: Συνολικές δυνάμεις μόνο από κάθετες πιέσεις από το ρευστό, το οποίο είναι εκτός του όγκου αναφοράς.
 - Οι δυνάμεις αυτές **κατευθύνονται** προς το **εσωτερικό** του όγκου αναφοράς, ανεξαρτήτως εάν πρόκειται για διατομές εισόδου ή εξόδου.
 - Οι δυνάμεις από διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές ή θεωρούνται αμελητέες.
 - ο $\bar{N}$: Συνολικές δυνάμεις από κάθετες πιέσεις και διατμητικές τάσεις από τα στερεά όρια.
 - ο $\bar{F}_g$: Καθολικές δυνάμεις από το πεδίο βαρύτητας = βάρος του ρευστού (το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο αναφοράς).
- **Όλες οι δυνάμεις** (συμπεριλαμβανομένης της **N**), όπως είναι διατυπωμένες οι εξισώσεις έχουμε θεωρήσει ότι **ασκούνται** στο **ρευστό**, το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο αναφοράς.
Συνήθως θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη **N'**, την οποία **ασκεί** το **ρευστό** στα **στερεά όρια**!.. Ο καλύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τις **εξισώσεις ως έχουν** και στο τέλος να **αντιστρέψουμε** το **πρόσημο** της **N** (την οποία υπολογίσαμε), ώστε να προκύψει η ενδεχομένως ζητούμενη N'.
 - ο Η εξίσωση ποσότητας κίνησης **επηρεάζεται** από το **σύστημα αξόνων**. Όταν γίνει η προβολή της (53δ) σε κατάλληλο (πλην όμως αυθαίρετο...) σύστημα αξόνων:
 - ο Για τις προβολές των δυνάμεων του αριστερού σκέλους της σχέσης, υπάρχει ένας επιπλέον - **ανεξάρτητος** καθορισμός **προσήμου**, ο οποίος σχετίζεται με το σύστημα αξόνων και **συνδυάζεται** με τον **αρχικό** καθορισμό (λόγω εισόδου / εξόδου)! ☹

- ο Για τις προβολές των δυνάμεων του δεξιού σκέλους της σχέσης ισχύουν οι γνωστοί κανόνες καθορισμού προσήμου.
- Η **εφαρμογή** της εξίσωση ποσότητας κίνησης **διαφέρει** στις διαφορετικές **μορφές ροής**, διότι **εκφράζονται διαφορετικά** οι **δυνάμεις** εκ **πιέσεων** ☹
 - ο Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** υπό **Πίεση**, η δύναμη εκ πιέσεων F_{pi} προκύπτει ως γινόμενο της αντιπροσωπευτικής πίεσης p_i και του εμβαδού της διατομής $E_i \rightarrow F_{pi} = p_i \cdot E_i$ (54)
 - ο Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** με **Ελεύθερη Επιφάνεια**, η **κατανομή** των **πιέσεων** είναι **υδροστατική** και η δύναμη εκ πιέσεων F_{pi} προκύπτει (βλ. 2.2.2)

από τη σχέση $F_{pi} = \gamma \cdot \tilde{y}_i \cdot E_i$ (55), όπου:

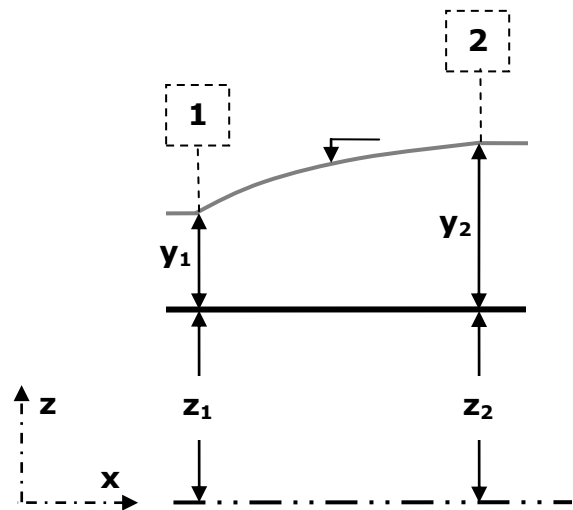
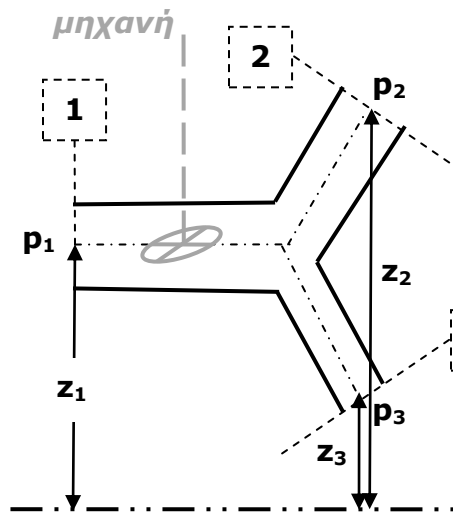
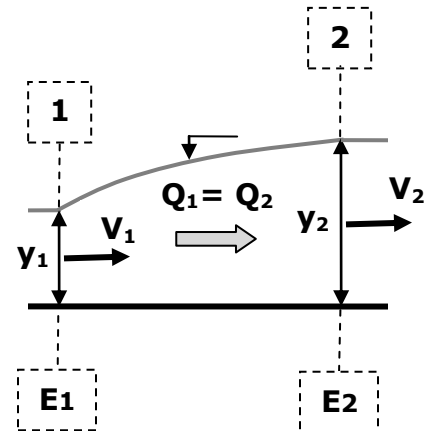
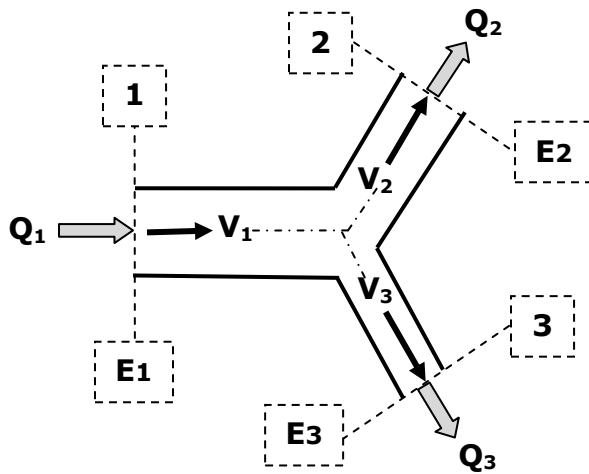
 - E_i είναι το **εμβαδό** της υδάτινης διατομής.
 - $\tilde{y}_i$ είναι η κατακόρυφη **απόσταση** του **κέντρου βάρους** της υδάτινης **διατομής** από την **ελεύθερη επιφάνεια**.
 - ο Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή Φλέβας** στην **Ατμόσφαιρα**, η δύναμη εκ πιέσεων F_{pi} είναι **μηδενική**.- Στην εξίσωση ποσότητας κίνησης, σε κάθε διατομή, **υπάρχουν διαφορετικοί**

συντελεστές συνόρθωσης: $\beta = \frac{\int_E u^2 \cdot dE}{V^2 \cdot E}$ (56)

όπου: **u** είναι ή **τιμή** της **ταχύτητας** σε **κάθε σημείο** της επιφάνειας **E** (πραγματική κατανομή ταχύτητας) και **V** ή **μέση ταχύτητα** στην επιφάνεια **E**.

- ο Όσο περισσότερο **διαφέρει** η **πραγματική κατανομή** της ταχύτητας από την **ομοιόμορφη** κατανομή της μέσης ταχύτητας (βλ. 5.1.3), τόσο **μεγαλύτερος** (από τη μονάδα) είναι ο **συντελεστής συνόρθωσης**!
 - Στην περίπτωση **τυρβώδους ροής** (βλ. Κεφάλαιο 11), η **διαφορά** της **κατανομής** ταχυτήτων είναι **μικρή**, ο συντελεστής συνόρθωσης έχει **τιμή** περίπου **$\beta = 1,05$** και **συνήθως παραλείπεται** στον υπολογισμό, δηλαδή λαμβάνεται ίσος με τη **μονάδα**!
 - Αντιθέτως στην περίπτωση **στρωτής ροής** (βλ. Κεφάλαιο 10) η **διαφορά** της κατανομής ταχυτήτων και η **τιμή** του συντελεστή είναι **μεγαλύτερες**.
 - Στην περίπτωση όπου στο πεδίο ροής παρεμβάλλεται **στερεό σώμα** (βλ. Κεφάλαιο 9), προκαλείται σε διατομές **κατάντη** του **σώματος σημαντική διαταραχή** της **κατανομής** ταχυτήτων, ο συντελεστής λαμβάνει **τιμές πολύ μεγαλύτερες** της μονάδας και **δεν** είναι δυνατό να **παραλειφθεί** στον υπολογισμό. ☹

5.2.4 Εξίσωση Ενέργειας (βλ. 4.1.2)



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U \rho \cdot \left(g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I \right) \cdot dU - \int_E \rho \cdot \left(g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I + \frac{p}{\rho} \right) \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{E})$$

$$= \pm \frac{\delta Q^*}{dt} \mp \frac{\delta W_T}{dt} \mp \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

(57α) → Γενική μορφή (προσοχή με Q^* συμβολίζεται εδώ η ενέργεια)

$$- \rho \cdot \int_E \left(g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I + \frac{p}{\rho} \right) \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{E})$$

$$= \pm \frac{\delta Q^*}{dt} \mp \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

(57β) → Απλοποιημένη μορφή

$$\left(h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \right) = \left(h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \right) + \left(\pm \frac{1}{\gamma \cdot Q} \frac{\delta W_\mu}{dt} + \left[\frac{I_2 - I_1}{g} - \frac{1}{\gamma \cdot Q} \frac{\delta Q^*}{dt} \right] \right) \quad (57\gamma) \text{ (Ενδιάμεση μορφή)}$$

$$H_1 = H_2 \mp H_\mu + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$H_i = h_i + \frac{p_i}{\gamma} + \alpha_i \frac{V_i^2}{2 \cdot g} \quad (57\delta) \rightarrow \text{Χρηστική μορφή}$$

- Στις σχέσεις (57γ) και (57δ) οι όροι εκφράζουν **ενέργεια ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού** και έχουν διαστάσεις μήκους (βλ. 5.1.4).
 - H_i : Μέσο ύψος μηχανικής ενέργειας (σε κάθε διατομή)
 - h_i : Ύψος δυναμικής ενέργειας λόγω θέσης (σε κάθε διατομή)
 - $\frac{p_i}{\gamma}$: Ύψος πίεσης (σε κάθε διατομή)
 - $\alpha_i \frac{V_i^2}{2 \cdot g}$: Ύψος κινητικής ενέργειας (σε κάθε διατομή)
 - $\Delta H_{\alpha(1-2)}$: Απώλειες μηχανικής ενέργειας (μεταξύ δύο διατομών)
 - H_μ : Μηχανικό έργο – Μανομετρικό ύψος υδραυλικής μηχανής (βλ. 5.4.3).
 - **Προσλαμβάνεται** στο σύστημα (-) από **αντλία**.
 - **Αποδίδεται** από το σύστημα (-) από **στρόβιλο**.
- Η σχέση (57δ) γράφεται για όλους τους συνδυασμούς ζευγών του *πλήθους n* διατομών εισόδου / εξόδου:
 - Προκύπτουν **n** εξισώσεις!
 - Όμως, στην επίλυση του συστήματος είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε μόνο **n-1** (οιεσδήποτε) εξισώσεις $\bullet^*$, (διότι είναι *συνδεδεμένες* - μία προκύπτει από τις υπόλοιπες).
- Η **εφαρμογή** της εξίσωσης ενέργειας **διαφέρει** στις διαφορετικές **μορφές ροής**, διότι **διαφέρουν** οι **κατανομές των πιέσεων** $\times$
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** υπό **Πίεση**:
 - Το ύψος δυναμικής ενέργειας εκφράζεται από την απόσταση z_i του άξονα της διατομής από το επίπεδο αναφοράς.
 - Το ύψος πίεσης εκφράζεται από το λόγο της αντιπροσωπευτικής πίεσης p_i προς την πυκνότητα.
 - Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή** με **Ελεύθερη Επιφάνεια**:

- Το ύψος δυναμικής ενέργειας εκφράζεται από την απόσταση z_i του **πυθμένα** της **διατομής** από το επίπεδο αναφοράς.
- Το ύψος πίεσης εκφράζεται από το **βάθος ροής**.
- Σε διατομές όπου πραγματοποιείται ομοιόμορφη **Ροή Φλέβας** στην **Ατμόσφαιρα**:
 - Το ύψος δυναμικής ενέργειας εκφράζεται από την απόσταση z_i του **άξονα** της **διατομής** από το επίπεδο αναφοράς.
 - Το ύψος πίεσης είναι **μηδενικό**.
- Στην εξίσωση ενέργειας, σε κάθε διατομή, **υπάρχουν διαφορετικοί**

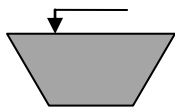
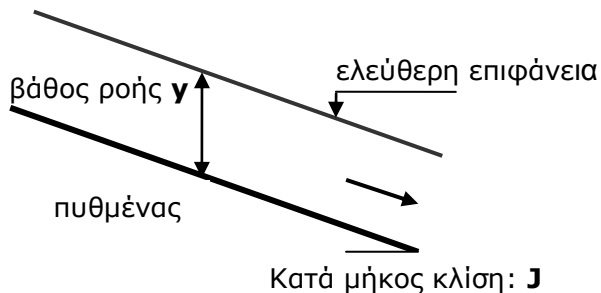
συντελεστές συνόρθωσης: $\alpha = \frac{\int_E u^3 \cdot dE}{V^3 \cdot E} \quad (58)$

όπου: **u** είναι ή **τιμή** της **ταχύτητας** σε **κάθε σημείο** της επιφάνειας **E** (πραγματική κατανομή ταχύτητας) και **V** ή **μέση ταχύτητα** στην επιφάνεια **E**.

- Για τις **τιμές, παράλειψη** ή όχι του συντελεστή συνόρθωσης της εξίσωσης ενέργειας ισχύουν οι **ίδιες παρατηρήσεις** – επισημάνσεις με τον αντίστοιχο συντελεστή για την εξίσωση ποσότητας κίνησης (βλ. 5.2.3).
- 5.2.5 Διαδικασία υπολογισμού
 - Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.1.6).
 - Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**.
 - Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων (βλ. 5.2.2, 5.2.3 και 5.2.4).
 - Εφαρμόζουμε τις επισημάνσεις § για τη διαφορετική μορφή έκφρασης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης και ενέργειας στις διαφορετικές μορφές της ροής σε κάθε διατομή εισόδου / εξόδου.
 - Σε κάθε διατομή καταγράφουμε τα άγνωστα μεγέθη (βλ. 5.1.3), τα οποία θα πρέπει να υπολογισθούν, **ανεξαρτήτως** εάν η τιμή τους **ζητείται ρητώς** στην **εκφώνηση** ή όχι.
 - Επιλέγουμε με ιδιαίτερη προσοχή τα πρόσημα των δυνάμεων στη διανυσματική μορφή της εξίσωσης ποσότητας κίνησης και στην προβολή τους στο σύστημα αξόνων.
 - Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων.
 - Καταλήγοντας (κατά το δυνατό) σε **τελικές σχέσεις** και **έλεγχο** συμβατότητας των **διαστάσεων** των υπολογισθέντων **μεγεθών**.
 - Ολοκληρώνουμε με την αριθμητική εφαρμογή, με ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση **ενοποιημένων μονάδων** $\bullet^*$ (βλ. 5.1.4).

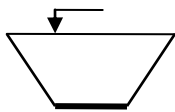
5.2.6 Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών σε Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια

- Παρατίθενται εδώ επιλεγμένα αποσπάσματα από το τεύχος **NTUA D AH NV502 A**, του 5^{ου} εξαμήνου, τα οποία είναι χρήσιμα στην επίλυση προβλημάτων του 4^{ου} εξαμήνου.
- Επικεντρώνουμε <εδώ> το ενδιαφέρον μας στα γεωμετρικά μεγέθη:
 - **y**: Βάθος ροής
 - **z**: Κλίση πρανών
 - **E**: Εμβαδό υδάτινης επιφάνειας
 - **b**: Πλάτος πυθμένα
 - **B**: Πλάτος υδάτινης επιφάνειας
 - **$\tilde{y}$** : Κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους της υδάτινης διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια



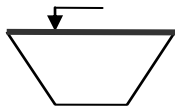
E

Εμβαδόν υδάτινης διατομής



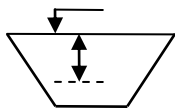
b

Πλάτος πυθμένα



B

Πλάτος υδάτινης επιφάνειας



$\tilde{y}$

Απόσταση κέντρου βάρους
υδάτινης διατομής από την επιφάνεια

- Σημειώνεται ότι, η εφαρμογή των εξισώσεων ποσότητας κίνησης και ενέργειας οδηγεί συχνά σε τριτοβάθμιες εξισώσεις ως προς τα βάθη ροής y.
 - Η επίλυση γίνεται με τις γνωστές μεθόδους (βλ. 2.4.3 και 2.4.4), είναι δε ιδιαίτερως ευχερής η αξιοποίηση της αριθμητικής μεθόδου.
 - Οι εξισώσεις αυτές έχουν **δύο πραγματικές – θετικές** ρίζες (ή μία διπλή), ως εκ τούτου απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή / απόρριψη τους!

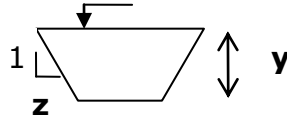
Γεωμετρικά στοιχεία **βασικών** (συμμετρικών) **διατομών** – Πίνακας **T1**

Τραπεζοειδής διατομή

$$E = (b + (z \cdot y)) \cdot y$$

$$B = b + 2 \cdot z \cdot y$$

$$\tilde{y} = \frac{(3 \cdot b + 2 \cdot z \cdot y) \cdot y}{6 \cdot (b + z \cdot y)}$$

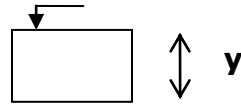


Ορθογωνική διατομή

$$E = b \cdot y$$

$$B = b$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{2}$$

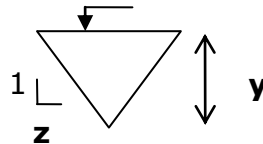


Τριγωνική διατομή

$$E = z \cdot y^2$$

$$B = 2 \cdot z \cdot y$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{3}$$

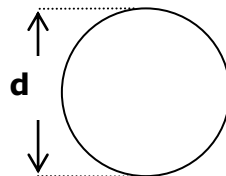


Κυκλική διατομή (πλήρης)

$$E = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$B = 0$$

$$\tilde{y} = \frac{d}{2}$$

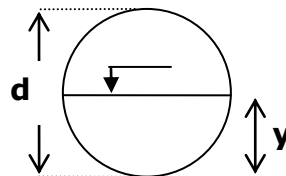


Κυκλική διατομή (ημικύκλιο: $y = d/2$)

$$E = \frac{\pi \cdot d^2}{8} = \frac{\pi \cdot y^2}{2}$$

$$B = d = 2 \cdot y$$

$$\tilde{y} = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot y}{3 \cdot \pi}$$



5.3 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

5.3.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Η μέθοδος της μονοδιάστατης ανάλυσης...
	Είναι μια <i>αυθαίρετη</i> απλοποίηση
	Είναι μια πολύ σημαντική μέθοδος ανάλυσης
	Βασίζεται στην έννοια του σταθερού πεπερασμένου όγκου αναφοράς
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Στη μέθοδο της μονοδιάστατης ανάλυσης η χρήση της μέσης ταχύτητας σε όλες τις διατομές συνεπάγεται:
	Ότι η επιρροή της πραγματικής κατανομής ταχυτήτων σε καθεμία διατομή είναι αμελητέα
	Την εισαγωγή συντελεστών διόρθωσης στην εξίσωση συνέχειας
✓	Την εισαγωγή συντελεστών διόρθωσης στην εξίσωση ενέργειας
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι συντελεστές συνόρθωσης...
	Έχουν την ίδια τιμή στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης και ενέργειας
	Για συγκεκριμένο ρευστό, με την ίδια παροχή και ίδιες διαστάσεις μιας διατομής εισόδου, έχουν μεγαλύτερη τιμή σε τυρβώδη ροή απ' ό,τι σε στρωτή ροή
	Γενικώς, η τιμή τους είναι περίπου ίση με τη μονάδα και αμελούνται στους υπολογισμούς
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Στη μέθοδο της μονοδιάστατης ανάλυσης...
	Το σύνολο των εξισώσεων διαφέρει στις διαφορετικές μορφές ροής
✓	Η πρακτική εφαρμογή του συνόλου των εξισώσεων διαφέρει στις διαφορετικές μορφές ροής
	Αμελείται ο χαρακτηρισμός της ροής ως μόνιμης ή μη μόνιμης
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

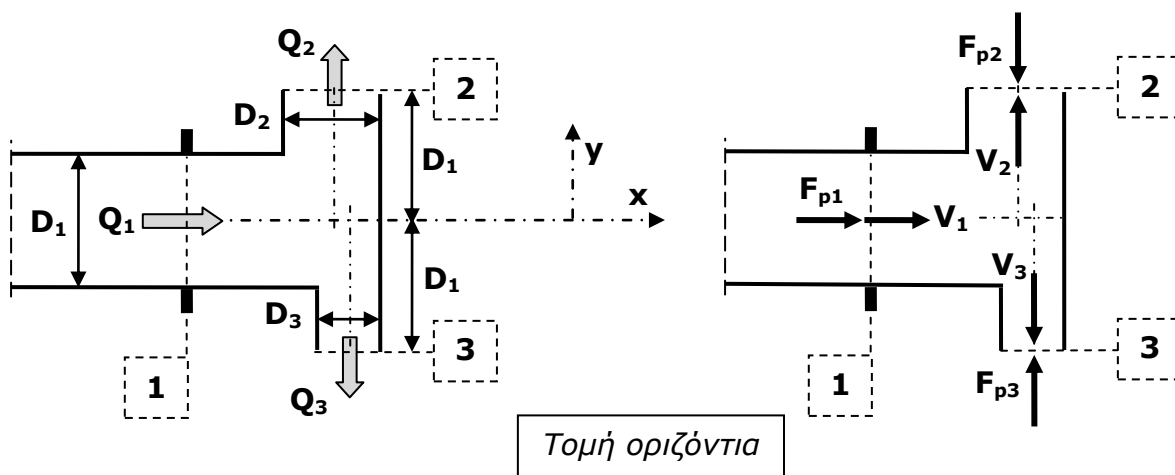
	Στην εξίσωση ενέργειας:
	Γενικώς, οι απώλειες ενέργειας αμελούνται
✓	Οι απώλειες ενέργειας είναι δυνατό να θεωρηθούν αμελητέες
	Δεν είναι δυνατό να συνδέσουμε δύο διατομές εξόδου
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

5.3.2 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή υπό Πίεση και Έξοδο Φλέβας στην Ατμόσφαιρα

Στο πέρας οριζόντιου αγωγού κυκλικής διατομής διαμέτρου D_1 συνδέεται οριζόντιο ειδικό τεμάχιο. Η διερχόμενη παροχή νερού στον αγωγό είναι Q_1 και εκρέει στην ατμόσφαιρα από τους δύο αγωγούς κυκλικής διατομής με διαμέτρους D_2 και D_3 του ειδικού τεμαχίου (βλ. σχήμα).

Αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστεί η συνολική δύναμη, (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα), η οποία πρέπει να αναληφθεί στη σύνδεση σωλήνα και ειδικού τεμαχίου.

Αριθμητική εφαρμογή: $Q_1 = 150 \text{ lt/s}$, $D_1 = 0,4 \text{ m}$, $D_2 = 0,2 \text{ m}$, $D_3 = 0,1 \text{ m}$.



- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς**:
 - ο Στερεά όρια ειδικού τεμαχίου.
 - ο Διατομή εισόδου η διατομή σύνδεσης.
 - Εάν θεωρήσουμε διατομή ανάντη θα περιλάβουμε δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται απευθείας στον αγωγό ☹*
 - Εάν θεωρήσουμε διατομή κατόντη θα αμελήσουμε δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στο ειδικό τεμάχιο και μεταφέρονται στη σύνδεση ☹*
 - ο Διατομές εξόδου οι διατομές εκροής στην ατμόσφαιρα.
 - Εάν θεωρήσουμε διατομές ανάντη η πίεση δεν θα είναι γνωστή, δηλαδή η ατμοσφαιρική ☹* και θα αμελήσουμε δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στο ειδικό τεμάχιο και μεταφέρονται στη σύνδεση ☹*
 - Εάν θεωρήσουμε διατομές κατόντη θα βρεθούμε στη φλέβα ☹*
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**:
 - ο Άξονας x , ο άξονας του αγωγού, άξονας y οριζόντιος - κάθετος στον x .
 - ο Επίπεδο αναφοράς οριζόντιο, αυτό το οποίο ορίζεται από τους άξονες x και y
→ Οι αποστάσεις z_i στην εξίσωση ενέργειας μηδενίζονται 🎵

- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 - V_3 \cdot E_3 = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 = H_3$$

$$\rightarrow z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{και } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\bar{V}_1 \cdot Q_1) - (\bar{V}_2 \cdot Q_2) - (\bar{V}_3 \cdot Q_3) \right] = \sum_1^3 (\bar{F}_{pi}) + \bar{F}_g + \bar{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot (V_1 \cdot Q_1) = p_1 \cdot E_1 + N_x$$

$$\text{και } -\rho \cdot \left[-(V_2 \cdot Q_2) + (V_3 \cdot Q_3) \right] = -(p_2 \cdot E_2) + (p_3 \cdot E_3) + N_y$$

Άγνωστα μεγέθη: $V_2, Q_2, V_3, Q_3, p_1, N_x, N_y$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2 = V_3 \text{ (διότι } z_2 = z_3 = 0 \text{ και } p_2 = p_3 = 0)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_2 = V_3 = \frac{4 \cdot Q_1}{\pi \cdot (D_2^2 + D_3^2)}$$

$$\rightarrow Q_2 = \frac{D_2^2}{(D_2^2 + D_3^2)} \cdot Q_1 \text{ και } Q_3 = \frac{D_3^2}{(D_2^2 + D_3^2)} \cdot Q_1$$

$$\text{και } p_1 = \frac{\gamma \cdot (V_3^2 - V_1^2)}{2 \cdot g} = \frac{8 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\frac{1}{(D_2^2 + D_3^2)^2} - \frac{1}{D_1^4} \right]$$

$$\rightarrow N_x = - \left(\frac{4 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi \cdot g \cdot D_1^2} \right) - \left(p_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \right)$$

$$\rightarrow N_y = \frac{4 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi \cdot g} \cdot \frac{D_2^2 - D_3^2}{(D_2^2 + D_3^2)^2}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_2 = V_3 = 3,819719 \text{ m/s}$$

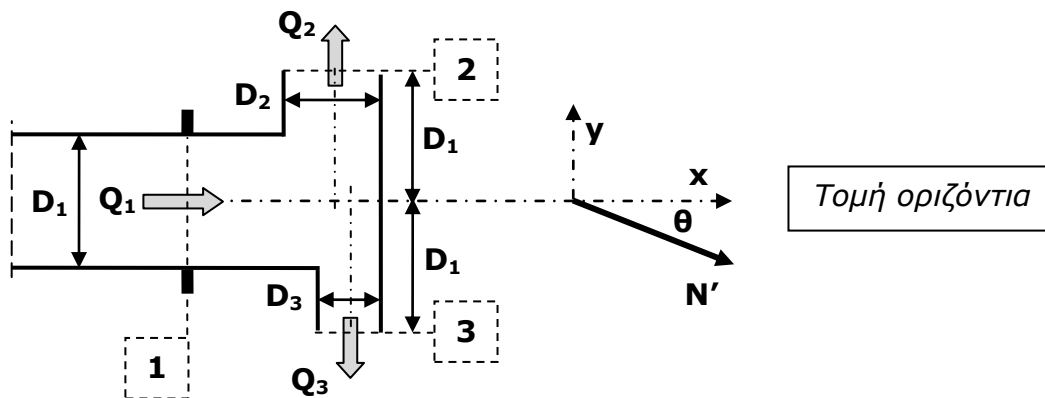
$$Q_2 = 0,120 \text{ m}^3/\text{s} \text{ και } Q_3 = 0,030 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p_1 = 0,671020 \text{ t/m}^2$$

$$N_x = -0,102575 \text{ t και } N_y = +0,035043 \text{ t}$$

$$\rightarrow \mathbf{N}'_x = +0,102575 \text{ t και } \mathbf{N}'_y = -0,035043 \text{ t (συνιστώσες της δύναμης στα τεμάχιο)}$$

$$\rightarrow \mathbf{N}' = +0,108396 \text{ t} = \mathbf{1,063 \text{ kN}} \text{ και } \tan\theta = 0,341637 \rightarrow \theta = \mathbf{18,862^\circ}$$



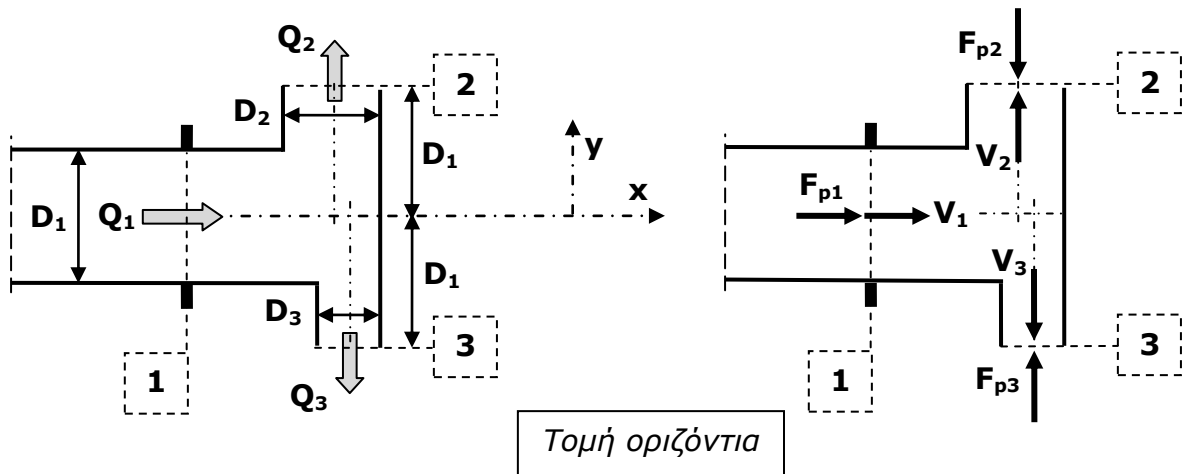
5.3.3 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή υπό Πίεση και έξοδο Φλέβας στην Ατμόσφαιρα

Στο πέρας οριζόντιου αγωγού κυκλικής διατομής διαμέτρου $\mathbf{D_1}$ συνδέεται οριζόντιο ειδικό τεμάχιο. Η διερχόμενη παροχή νερού στον αγωγό είναι $\mathbf{Q_1}$ και εκρέει στην ατμόσφαιρα από τους δύο αγωγούς κυκλικής διατομής με διαμέτρους $\mathbf{D_2}$ και $\mathbf{D_3}$ του ειδικού τεμαχίου (βλ. σχήμα).

Οι απώλειες ενέργειας μεταξύ της διατομής εισόδου και των διατομών εξόδου δίδονται από τη σχέση: $\Delta H = k \cdot V_1^2 / g$, (όπου $k > 0$, σταθερός αδιάστατος συντελεστής). Θεωρούμε όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα.

Να υπολογιστεί η συνολική δύναμη, (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα), η οποία πρέπει να αναληφθεί στη σύνδεση σωλήνα και ειδικού τεμαχίου.

Αριθμητική εφαρμογή: $\mathbf{Q_1 = 150 \text{ lt/s, } D_1 = 0,4 \text{ m, } D_2 = 0,2 \text{ m, } D_3 = 0,1 \text{ m, } k = 0,5.}$



- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.2).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς** (βλ. 5.3.2).
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 - V_3 \cdot E_3 = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 + \Delta H_{\alpha(1-2)} = H_3 + \Delta H_{\alpha(1-3)} \text{ (διαφέρουν από την 5.3.2) } \bullet^*$$

$$\rightarrow z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{k \cdot V_1^2}{g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} + \frac{k \cdot V_1^2}{g} \text{ (διαφέρει από την 5.3.2) } \bullet^*$$

$$\text{και } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} + \frac{k \cdot V_1^2}{g} \text{ (διαφέρει από την 5.3.2) } \bullet^*$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot [(\bar{V}_1 \cdot Q_1) - (\bar{V}_2 \cdot Q_2) - (\bar{V}_3 \cdot Q_3)] = \sum_1^3 (\bar{F}_{pi}) + \bar{F}_g + \bar{N} \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot (V_1 \cdot Q_1) = p_1 \cdot E_1 + N_x \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$\text{και } -\rho \cdot [-(V_2 \cdot Q_2) + (V_3 \cdot Q_3)] = -(p_2 \cdot E_2) + (p_3 \cdot E_3) + N_y \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

Άγνωστα μεγέθη: $V_2, Q_2, V_3, Q_3, p_1, N_x, N_y$ (όπως στην 5.3.2)!

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$z_2 = z_3 = 0 \text{ και } p_2 = p_3 = 0, \text{ αλλά και } \Delta H_{\alpha(1-2)} = \Delta H_{\alpha(1-3)} !$$

$$\rightarrow V_2 = V_3 = \frac{4 \cdot Q_1}{\pi \cdot (D_2^2 + D_3^2)} \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$\rightarrow Q_2 = \frac{D_2^2}{(D_2^2 + D_3^2)} \cdot Q_1 \text{ και } Q_3 = \frac{D_3^2}{(D_2^2 + D_3^2)} \cdot Q_1 \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$\text{και } p_1 = \frac{[V_3^2 - (1 - 2 \cdot k) \cdot V_1^2] \cdot \gamma}{2 \cdot g} = \frac{8 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\frac{1}{(D_2^2 + D_3^2)^2} - \frac{(1 - 2 \cdot k)}{D_1^4} \right]$$

η τιμή της p_1 διαφέρει από την τιμή στην 5.3.2, είναι δε μεγαλύτερη (διότι $k > 0$).

$$\rightarrow N_x = - \left(\frac{4 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi \cdot g \cdot D_1^2} \right) - \left(p_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \right) \text{ (όπως στην 5.3.2, αλλά με διαφορετική } p_1 \text{)!}$$

σε απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την τιμή στην 5.3.2 (διότι η p_1 είναι μεγαλύτερη).
Τούτο είναι αναμενόμενο. Έχοντας στην 5.3.2 αμελήσει απώλειες, επί της ουσίας είχαμε αμελήσει έργο δυνάμεων, δηλαδή τις είχαμε υποεκτιμήσει στον υπολογισμό!

$$\rightarrow N_y = \frac{4 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi \cdot g} \cdot \frac{D_2^2 - D_3^2}{(D_2^2 + D_3^2)^2} \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_2 = V_3 = 3,819719 \text{ m/s}$$

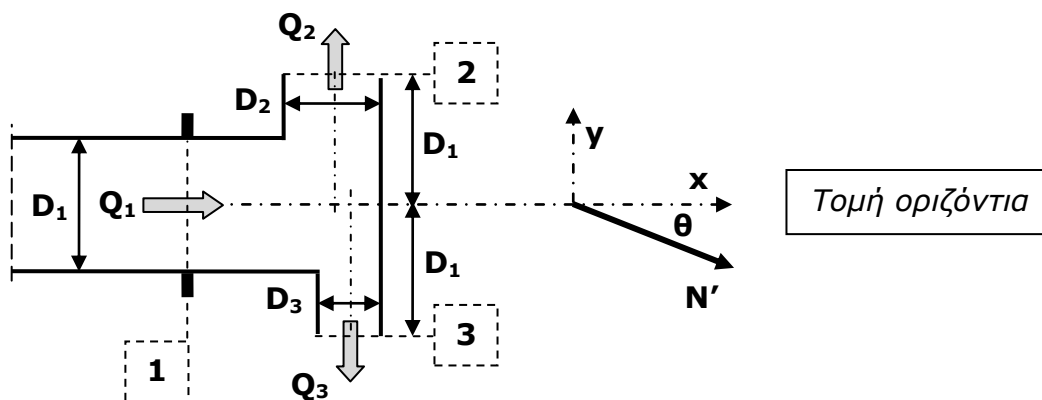
$$Q_2 = 0,120 \text{ m}^3/\text{s} \text{ και } Q_3 = 0,030 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p_1 = 0,743642 \text{ t/m}^2$$

$$N_x = -0,111700 \text{ t και } N_y = +0,035043 \text{ t}$$

$$\rightarrow \mathbf{N}'_x = +0,111700 \text{ t και } \mathbf{N}'_y = -0,035043 \text{ t (συνιστώσες της δύναμης στα τεμάχιο)}$$

$$\rightarrow \mathbf{N}' = +0,117068 \text{ t} = \mathbf{1,148 \text{ kN}} \text{ και } \tan \theta = 0,313725 \rightarrow \theta = \mathbf{17,418^\circ}$$



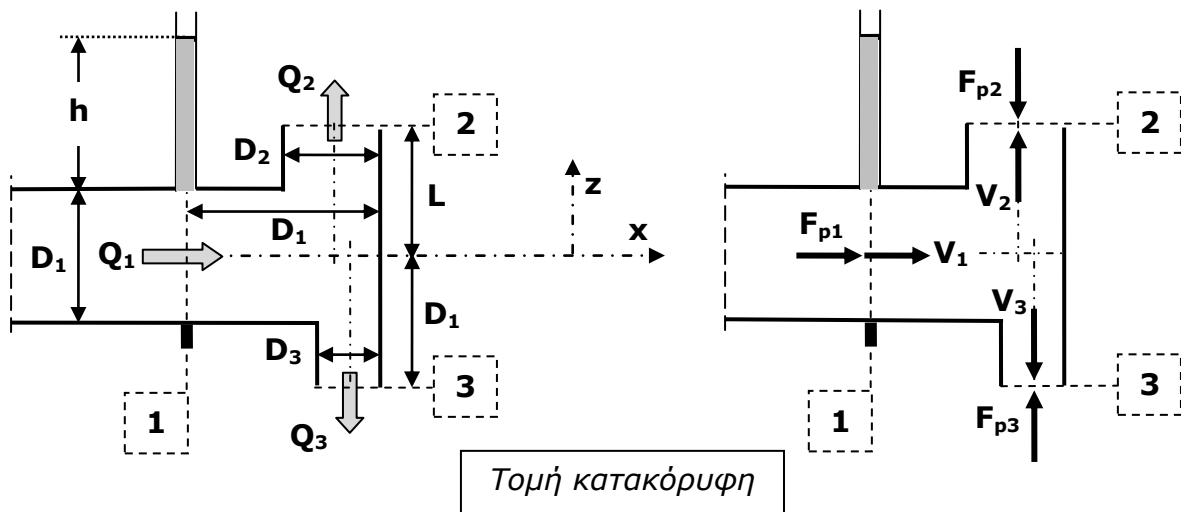
5.3.4 Η εφαρμογή αφορά σε Ροή υπό Πίεση και Έξοδο Φλέβας στην Ατμόσφαιρα

Στο πέρας οριζώντιου αγωγού κυκλικής διατομής διαμέτρου D_1 συνδέεται κατακόρυφο ειδικό τεμαχίο. Η διερχόμενη παροχή νερού στον αγωγό είναι Q_1 και εκρέει στην ατμόσφαιρα από τους δύο αγωγούς κυκλικής διατομής με διαμέτρους D_2 και D_3 του ειδικού τεμαχίου (βλ. σχήμα).

Ακριβώς στη διατομή **1** υπάρχει απλό πιεζόμετρο, του οποίου η ένδειξη - εκτός του αγωγού - είναι h .

Αμελώντας απώλειες ενέργειας και θεωρώντας όλους τους συντελεστές συνόρθωσης σε όλες τις διατομές ίσους με τη μονάδα, να υπολογιστεί η συνολική δύναμη, (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα), η οποία πρέπει να αναληφθεί στη σύνδεση σωλήνα και ειδικού τεμαχίου.

Αριθμητική εφαρμογή: $Q_1 = 150 \text{ lt/s}$, $D_1 = 0,4 \text{ m}$, $D_2 = 0,2 \text{ m}$, $D_3 = 0,1 \text{ m}$ και $h = 1,0 \text{ m}$.



- Επιλέγουμε κατάλληλο **όγκο αναφοράς** (βλ. 5.3.2).
- Επιλέγουμε χρηστικό **σύστημα αξόνων** και **επίπεδο αναφοράς**:
 - Άξονας x , ο άξονας του αγωγού, άξονας z κατακόρυφος - κάθετος στον x .
 - Επίπεδο αναφοράς οριζόντιο, αυτό το οποίο διέρχεται από τον άξονα x .
- Καταστρώνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$(52\gamma) \rightarrow V_1 \cdot E_1 - V_2 \cdot E_2 - V_3 \cdot E_3 = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \text{ (όπως στην 5.3.2)!}$$

$$(57\delta) \rightarrow H_1 = H_2 = H_3$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{και } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g}$$

$$(53\delta) \rightarrow -\rho \cdot \left[(\vec{V}_1 \cdot \vec{Q}_1) - (\vec{V}_2 \cdot \vec{Q}_2) - (\vec{V}_3 \cdot \vec{Q}_3) \right] = \sum_1^3 (\vec{F}_{pi}) + \vec{F}_g + \vec{N}$$

$$\rightarrow -\rho \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{Q}_1) = p_1 \cdot E_1 + N_x$$

$$\text{και} \rightarrow -\rho \cdot [-(\vec{V}_2 \cdot \vec{Q}_2) + (\vec{V}_3 \cdot \vec{Q}_3)] = -(p_2 \cdot E_2) + (p_3 \cdot E_3) - F_g + N_z$$

Άγνωστα μεγέθη: $V_2, Q_2, V_3, L, Q_3, N_x, N_z$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \rightarrow L = \frac{2 \cdot h + D_1}{2} + \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{Q_1^2}{D_1^4} - \frac{Q_2^2}{D_2^4} \right)$$

$$(\text{διότι } \frac{p_1}{\gamma} = h + \frac{D}{2} \bullet^*, p_2 = 0, z_1 = 0 \text{ και } z_3 = +L)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} \rightarrow V_3 = \left[V_1^2 + g \cdot (2 \cdot h + 3 \cdot D_1) \right]^{1/2}$$

$$(\text{διότι } \frac{p_1}{\gamma} = h + \frac{D}{2} \bullet^*, p_3 = 0, z_1 = 0 \text{ και } z_3 = -D_1)$$

$$\rightarrow Q_3 = \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot \left[\left(\frac{4 \cdot Q_1}{\pi \cdot D_1^2} \right)^2 + g \cdot (2 \cdot h + 3 \cdot D_1) \right]^{1/2} \text{ και } Q_2 = Q_1 - Q_3$$

$$\rightarrow N_x = - \left(\frac{4 \cdot \gamma \cdot Q_1^2}{\pi \cdot g \cdot D_1^2} \right) - \left[\gamma \cdot \left(h + \frac{D_1}{2} \right) \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \right]$$

$$\rightarrow N_z = \frac{4 \cdot \gamma}{\pi \cdot g} \cdot \left[\left(\frac{Q_2}{D_2} \right)^2 - \left(\frac{Q_3}{D_3} \right)^2 \right] + \gamma \cdot U, \text{ όπου: } U \approx \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^3 + D_2^2 \cdot L + D_3^2 \cdot D_1)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$V_2 = 3,342499 \text{ m/s και } V_3 = 5,728597 \text{ m/s}$$

$$Q_2 = 0,105 \text{ m}^3/\text{s και } Q_3 = 0,045 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L = 0,703187 \text{ m}$$

$$N_x = - 0,170472 \text{ t και } N_z = + 0,084989 \text{ t}$$

$$\rightarrow \mathbf{N'_x} = + \mathbf{0,170472 \text{ t}} \text{ και } \mathbf{N'_z} = - \mathbf{0,084989 \text{ t}} \text{ (συνιστώσες της δύναμης στα τεμάχιο)}$$

$$\rightarrow \mathbf{N'} = + \mathbf{0,190483 \text{ t}} = \mathbf{1,063 \text{ kN}} \text{ και } \mathbf{\tan \theta = 0,498552} \rightarrow \mathbf{\theta = 26,498^\circ}$$