

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρουσιάζονται οι απαραίτητες έννοιες και στοιχεία της Μηχανικής των Ρευστών με έμφαση στα βασικά χαρακτηριστικά των ρευστών, τις κατηγορίες και μορφές ροής και τις μεθόδους ανάλυσης της ροής γενικώς. Αναλύεται η διαδικασία και οι χρησιμοποιούμενοι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων.

1.1 Βασικές έννοιες και στοιχεία Μηχανικής των Ρευστών

1.1.1 Βασικά χαρακτηριστικά των ρευστών

- **Ρευστό σωματίδιο:** Ο στοιχειώδης όγκος dU ρευστού ο οποίος είναι αρκετά μεγαλύτερος από έναν ελάχιστο όγκο ($\min dU = 10^{-9} \text{ m}^3$), ώστε να περιλαμβάνει ένα ικανό και περίπου σταθερό αριθμό μορίων.
- **Πυκνότητα $\rho = \text{Μάζα} / \text{Όγκος}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[\rho] \rightarrow [M / L^3]: \text{kg} / \text{m}^3, \text{gr} / \text{cm}^3$
 - ο Η πυκνότητα ενός ρευστού εξαρτάται από την πίεση και τη θερμοκρασία του.
 - ο Η πυκνότητα ενός υγρού είναι σχετικά σταθερή. Η πυκνότητα του νερού είναι περίπου ίση με $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$ και όταν αυξήσουμε την πίεση 220 φορές η πυκνότητα αυτή θα αυξηθεί μόνο κατά περίπου 1%.
 - ο Η πυκνότητα των υγρών είναι περίπου τρεις τάξεις μεγαλύτερη της πυκνότητας των αερίων $\rightarrow$ Στην ελεύθερη επιφάνεια ενός αγωγού η παρουσία του υπερκείμενου ρευστού <αέρα> έχει μικρή έως αμελητέα επίδραση.
- **Ειδικό βάρος $\gamma = \text{Βάρος} / \text{Όγκος}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[\gamma] \rightarrow [F / L^3]: \text{t} / \text{m}^3, \text{kg}^* / \text{m}^3, \text{kN} / \text{m}^3, \text{N} / \text{m}^3$
 - ο $\gamma = \rho \cdot g$, όπου g : επιτάχυνση της βαρύτητας **9,81** m / s^2
 - ο Προσοχή! Πυκνότητα και Ειδικό βάρος έχουν την ίδια αριθμητική τιμή σε διαφορετικά συστήματα: Για το νερό
 - Πυκνότητα ρ : περίπου $1.000 \text{ kg} / \text{m}^3$
 - Ειδικό βάρος γ : περίπου $1 \text{ t} / \text{m}^3 = 1.000 \text{ kg}^* / \text{m}^3 = 9,81 \text{ kN} / \text{m}^3$
- **Πίεση $p = \text{Δύναμη (κάθετη)} / \text{Επιφάνεια}$**
 - ο Διάσταση - μονάδες $[p] \rightarrow [F / L^2]: \text{t} / \text{m}^2, \text{kg}^* / \text{m}^2, \text{N} / \text{m}^2 (= \text{Pa})$
 - ο Είναι η κάθετη – θλιπτική – τάση η οποία προέρχεται από την αντίστοιχη δύναμη, την οποία το ρευστό ασκεί στην επιφάνεια στοιχειώδους όγκου.
 - ο Είναι βαθμωτό μέγεθος το οποίο προέρχεται από διανυσματικό μέγεθος.
 - ο Συνήθως ορίζουμε, για λόγους ευκολίας την ατμοσφαιρική πίεση ως σημείο αναφοράς με τιμή μηδέν και μετράμε τη σχετική πίεση ως διαφορά της απόλυτης και της ατμοσφαιρικής: $p_{\text{σχετ}} = p_{\text{απολ}} - p_{\text{ατμοσφ}}$
Αυτό οδηγεί λογιστικά και σε αρνητικές τιμές της σχετικής πίεσης: **υποπίεση**.
 - ο Όταν πραγματοποιείται εξάτμιση του νερού σε ένα κλειστό χώρο, όπως π.χ. σε ένα τμήμα σωλήνα με ροή νερού υπό πίεση, τότε η πίεση από τα μόρια των υδρατμών καλείται **πίεση υδρατμών: p_v** . Στην περίπτωση αυτή η συνέχεια της ροής διακόπτεται (σπηλαίωση) και το ρευστό δεν είναι πλέον ένα συνεχές μέσο. Το φαινόμενο είναι ανεπιθύμητο και εις το επόμενο εξάμηνο (Εφαρμοσμένη Υδραυλική) θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους ελέγχου και αποφυγής του.
Η p_v αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

$$1. (1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h}{2} + \frac{\rho_3 \cdot h}{2} \right) \rightarrow \mathbf{p = 21,00 \text{ t / m}^2 = 206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{8} + \frac{\rho_2 \cdot h^2}{4} + \frac{\rho_3 \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow \mathbf{F = 205,00 \text{ t / m} = 2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{12} + \frac{\rho_2 \cdot h^3}{16} + \frac{\rho_3 \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow \mathbf{M = 1.350,0 \text{ tm / m} = 13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

Εναλλακτικός τρόπος:

$$(1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow \mathbf{p = 21,00 \text{ t / m}^2 = 206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow \mathbf{F = 205,00 \text{ t / m} = 2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow \mathbf{M = 1.350,0 \text{ tm / m} = 13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

$$2. (5), (6) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow \mathbf{p = 21,00 \text{ t / m}^2 = 206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(8) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{6} \right) \rightarrow \mathbf{F = 206,67 \text{ t / m} = 2.027,40 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{24} \right) \rightarrow \mathbf{M = 1.366,67 \text{ tm / m} = 13.407,0 \text{ kNm / m}}$$

Επισήμανση: Παρότι – με τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης – η πίεση **p** στη βάση του φράγματος προκύπτει ίδια σε όλες τις περιπτώσεις, η συνολική δύναμη **F** και η ροπή πάκτωσης **M** είναι διαφορετικές σε κάθε περίπτωση!

2.3.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.3

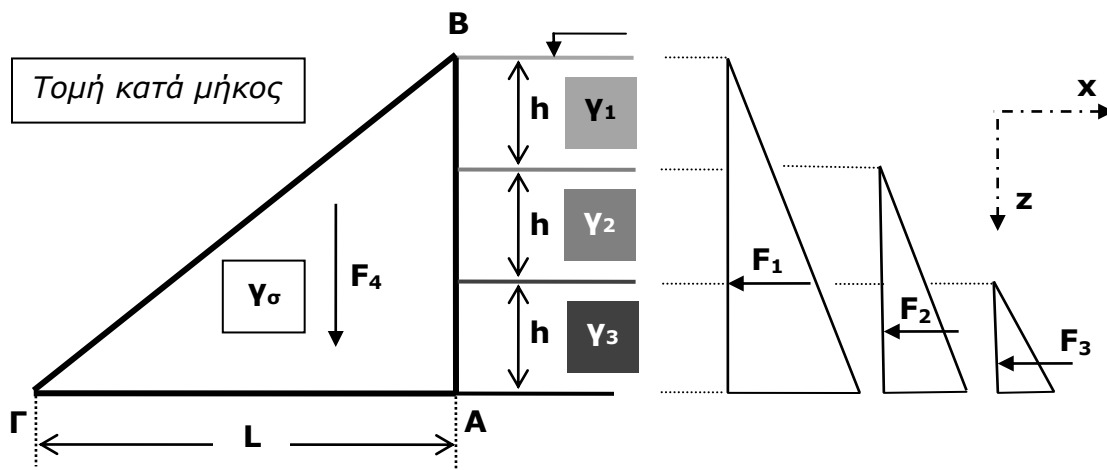
Σε ορθογωνική διατομή ποταμού με πλάτος **b** και βάθος **3.h** σχεδιάζεται η κατασκευή φράγματος βαρύτητας ΑΒΓ, τριγωνικής διατομής με μήκος **L**, από σκυρόδεμα ειδικού βάρους γ_σ .

Ο ανάντη του φράγματος ταμιευτήρας θα περιέχει τρεις στρώσεις υγρών με βάθη **h** και ειδικά βάρη γ_1 , γ_2 και γ_3 (βλ. σχήμα). Το έδαφος θεμελίωσης του φράγματος είναι στεγανό και έχει συντελεστή οριζόντιας τριβής **k**.

Να υπολογιστούν οι συντελεστές ασφαλείας:

1. Σε ολίσθηση **C₁**: Κατακόρυφες δυνάμεις επί το **k** / Οριζόντιες δυνάμεις.
2. Σε ανατροπή (περί το σημείο Γ) **C₂** : Ροπές ευσταθείας / Ροπές ανατροπής.

Αριθμητική εφαρμογή: **h= 5 m, b= 25 m, L= 30 m, k= 0,55, $\gamma_\sigma= 2,50$ t/ m³, $\gamma_1= 1,00$ t/ m³, $\gamma_2= 1,05$ t/ m³, $\gamma_3= 1,10$ t/ m³.**



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από το **πρόβλημα**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στην επιφάνεια του φορέα με τον εναλλακτικός τρόπο

$$(11a) \rightarrow F_1 = \frac{9 \cdot \gamma_1 \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_1 = 2.812,50 \text{ t} = 27.590,625 \text{ kN} \text{ και } e_{1F1} = h$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = 2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot b \cdot h^2 \rightarrow F_2 = 62,50 \text{ t} = 613,125 \text{ kN} \text{ και } e_{2F2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$(11a) \rightarrow F_3 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2) \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_3 = 15,625 \text{ t} = 153,281 \text{ kN} \text{ και } e_{3F3} = \frac{h}{3}$$

$$F_4 = \frac{3 \cdot \gamma_\sigma \cdot b \cdot h \cdot L}{2} \rightarrow F_4 = 14.062,50 \text{ t} = 137.953,125 \text{ kN} \text{ και } e_{4F4} = \frac{2 \cdot L}{3}$$

$$\sum F_x = \sum_1^3 F \text{ και } \sum F_z = F_4 \rightarrow C_1 = \frac{3 \cdot k \cdot \gamma_\sigma}{9 \cdot \gamma_1 + 4 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \frac{L}{h} \rightarrow C_1 = 2,67568$$

$$\sum M^- = \sum_1^3 M_F \text{ και } \sum M^+ = M_{F4} \rightarrow C_2 = \frac{6 \cdot \gamma_\sigma}{27 \cdot \gamma_1 + 8 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

$$\rightarrow C_2 = 19,672131$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OF} = \frac{L}{2} + \frac{L^2}{12 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right)} \rightarrow e_{OF} = \mathbf{1,100723 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

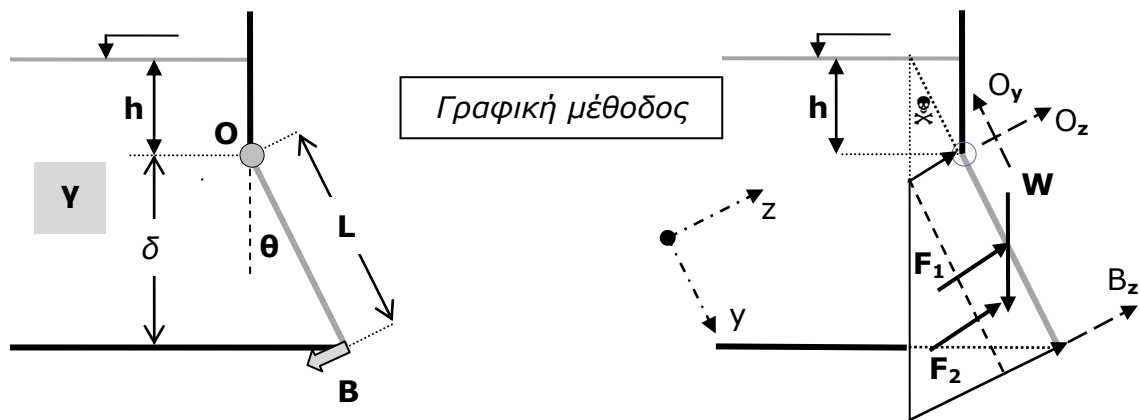
$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_y = 17,320508 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{OW} - F \cdot e_{OF} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = -1,309401 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F - W \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = -0,154701 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

Η συνολική δύναμη και το σημείο εφαρμογής της έχουν ήδη υπολογιστεί: **F, y_n**
 Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα → **30°** ως προς οριζόντιο άξονα.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στην επιφάνεια του φορέα

$$(11a) \rightarrow F_1 = \gamma \cdot h \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{F_1 = 8,000 \text{ t} = 78,480 \text{ kN}}$$

$$e_{OF1} = \frac{L}{2} \rightarrow e_{OF1} = \mathbf{1,000 \text{ m}}$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \delta \cdot L^2}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot \cos \theta}{2} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,464102 \text{ t} = 33,983 \text{ kN}}$$

$$e_{OF2} = \frac{2 \cdot L}{3} \rightarrow e_{OF2} = \mathbf{1,333333 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

2.4.3 Μαθηματική λύση συνήθως αποκαλούμενη *Gardano*

- $A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$
- Σημείωση: Είναι προφανές ότι, εάν όλοι οι σταθεροί συντελεστές είναι θετικοί, **δεν** υπάρχει **θετική ρίζα**, άρα και οριακή ισορροπία!..
- Θέτουμε: $p = -\left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^2 + \frac{C}{3 \cdot A}$ και $q = \left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^3 - \frac{B \cdot C}{6 \cdot A^2} + \frac{D}{2 \cdot A}$
- Υπολογίζουμε τον όρο: $\Delta = q^2 + p^3$
- Εάν $\Delta < 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές**:
- Υπολογίζουμε τον όρο: ϕ , λογιστικό μέγεθος γωνίας με $\cos \phi = -\frac{q}{|p|^{3/2}}$
 - $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
 - $x_2 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} + 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
 - $x_3 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} - 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
- Εάν $\Delta = 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές** (η μία διπλή):
 - $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$ και $x_2 = x_3 = -|p|^{1/2} - \frac{B}{3 \cdot A}$
- Εάν $\Delta > 0 \rightarrow$ **μία** ρίζα **πραγματική**: x_1 (και δύο μιγαδικές συζυγείς)
 - $x_1 = \left(-q + \Delta^{1/2} \right)^{1/3} + \left(-q - \Delta^{1/2} \right)^{1/3} - \frac{B}{3 \cdot A}$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το $<+3.Y^2> \rightarrow Y_1 = \sqrt{4}$

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
2,000000	1,583333	1,143275	1,011970	1,000094 ✓

$\rightarrow Y = 1,000 \text{ m} \rightarrow y = 1,500 \text{ m}.$

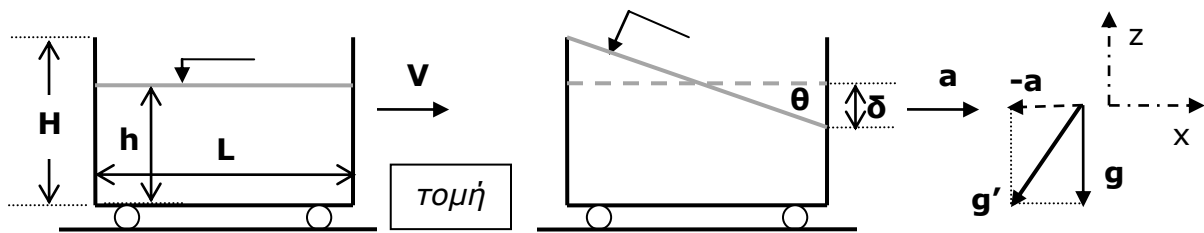
Επισήμανση 3: Τα υγρά τα οποία **βρέχουν** την επιφάνεια **ΑΒΓ**, δεν συμμετέχουν μεν στην ισορροπία, **συμμετέχουν** όμως στον **υπολογισμό** της **συνολικής δύναμης** από πιέσεις $\otimes$ (και της κλίσης της), η οποία βεβαίως **διέρχεται από το Ο**.

2.6.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Ένα ανοιχτό *όχημα* με πλάτος **b**, ύψος **H** και μήκος **L=2.H** περιέχει υγρό πυκνότητας **ρ** με βάθος **h=0,75.H** και κινείται με σταθερή ταχύτητα **V** σε οριζόντιο επίπεδο (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής επιτάχυνσης **a**, η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο *όχημα*, ώστε το υγρό να μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H= 1,6 m, b= 2 m, ρ= 1.050 kgr / m³.**



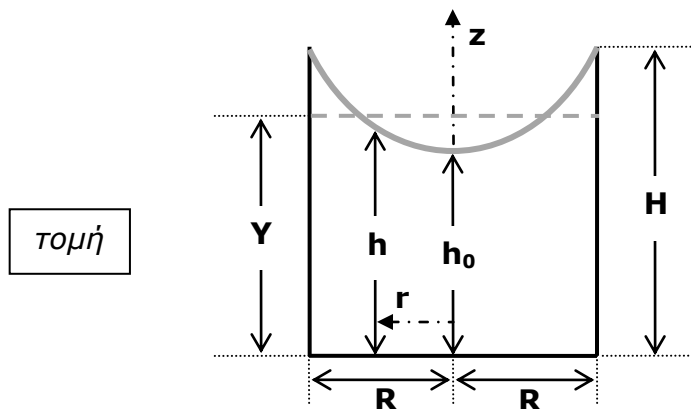
$$(19) \rightarrow a = g \cdot \tan \theta = 2 \cdot g \cdot \frac{\delta}{L} = g \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right) \rightarrow a = 2,4525 \text{ m /s}^2$$

2.6.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Κυλινδρικό δοχείο, με βάση κύκλο ακτίνας **R** και συνολικό ύψος **H**, βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και το περιεχόμενο νερό φθάνει σε ύψος **Y = 0,75.H** (βλ. σχήμα). Στη συνέχεια το δοχείο τίθεται σε περιστροφική γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κίνηση, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής γωνιακής ταχύτητας **ω** , η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο δοχείο, ώστε το νερό να μη μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H = 1,6 m, R = 2 m, $\rho = 1.000 \text{ kgr} / \text{m}^3$.**



$$(20) \rightarrow h_0 = Y - \frac{(\omega \cdot R)^2}{4 \cdot g} \text{ και } (21) \rightarrow H = h_0 + \frac{(\omega \cdot R)^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{(g \cdot H)^{1/2}}{R} \rightarrow \omega = \mathbf{1,981 \text{ rad.s}^{-1}}$$