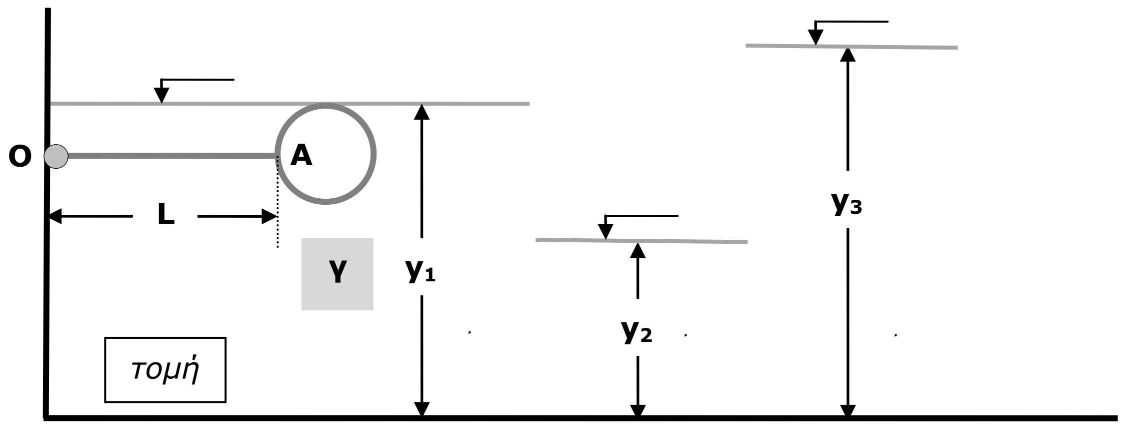
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ $\underline{2^{η}}$ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
4ο ΕΞΑΜΗΝΟ Π.Μ.
ΕΤΟΣ : 2010 – 2011

2.1 Σε κατακόρυφο τοίχωμα δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό, τοποθετείται μηχανισμός, ο οποίος έχει κατασκευασθεί από φύλλα υλικού με βάρος **w** (ανά μονάδα επιφανείας) και αποτελείται από άκαμπτο επίπεδο τμήμα **ΟΑΑ′Ο′** μήκους **L** και πλάτους **b** και κυλινδρικό πλωτήρα ακτίνας **R** και πλάτους **b**.
Ο μηχανισμός είναι στρεπτός (<u>*γραμμική* άρθρωση</u>) περί τον <u>οριζόντιο άξονα</u> ΟΟ′ και για βάθος $\mathbf{y_1}$= **6.R** ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.
<u>Σημείωση</u>: Ο πλωτήρας είναι κενός και στεγανός. Οι βάσεις του κυλίνδρου είναι αβαρείς.

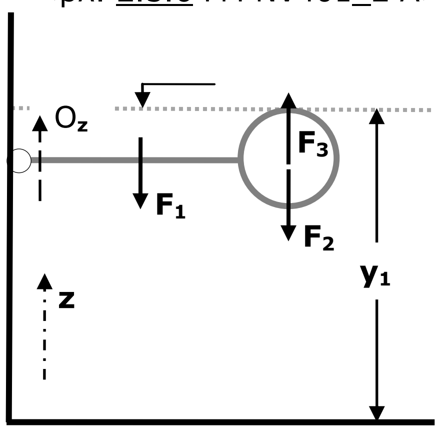
Να υπολογιστούν:
1. Η ακτίνα **R** και η αντίδραση στον άξονα ΟΟ′.

Εάν η στάθμη του νερού μεταβληθεί, να υπολογιστεί η νέα θέση του μηχανισμού, δηλαδή η γωνία **θ** του τμήματος ΟΑΑ′Ο′ ως προς οριζόντιο επίπεδο και η σχετική θέση του πλωτήρα ως προς τη νέα στάθμη:
2. Εάν η νέα στάθμη είναι χαμηλότερη: $\mathbf{y_2} < \mathbf{y_1}$
3. Εάν η νέα στάθμη είναι υψηλότερη: $\mathbf{y_3} > \mathbf{y_1}$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>: **L**= **3** m, **b**= **10** m, **w**= **0,3** t / m^2.



<βλ. <u>2.3.6</u> FM NV401_2 A> και <**1.3** - 1η Σειρά 2011>



$$F_1 = w \cdot L \cdot b \Downarrow \text{ (βάρος του οριζοντίου φύλλου) και } e_{OF1} = \frac{L}{2}$$

$$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \Downarrow \text{ (βάρος του πλωτήρα) και } e_{OF2} = L + R$$

$$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \Uparrow \text{ (\textit{άνωση} του πλωτήρα) και } e_{OF3} = L + R$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_{1}^{2} M_{OFi} - M_{OF3} = 0$$

$$\rightarrow (\pi \cdot \gamma) \cdot R^3 + \left[\pi \cdot (\gamma \cdot L - 2 \cdot w)\right] \cdot R^2 - (2 \cdot \pi \cdot w \cdot L) \cdot R - \left(\frac{w \cdot L^2}{2}\right) = 0$$

Η ακτίνα **R** είναι <u>ανεξάρτητη</u> του βάθους $\mathbf{y_1}$

$$\sum F_z = O_z - \sum_{1}^{2} F_i + F_3 = 0 \rightarrow O_z = \left[(2 \cdot \pi \cdot R + L) \cdot w - \pi \cdot \gamma \cdot R^2\right] \cdot b$$

Η αντίδραση $\mathbf{O_z}$ είναι <u>επίσης ανεξάρτητη</u> του βάθους $\mathbf{y_1}$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>:

$$R^3 + 2,4 \cdot R^2 - 1,8 \cdot R - \frac{1,35}{\pi} = 0$$

<u>Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3</u>

A	**B**	**C**	**D**	p	q	Δ
1	**2,4**	**-1,8**	**-0,429718**	-1,240000	1,017141	-0,872049 <0

cos φ	φ	R_1	R_2	R_3
-0,736629	137,445008	**0,752**242	-0,193042	-2,959200

→ **R**= **0,752** m.

<u>Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4</u>

<u>Δεν απαιτείται μετασχηματισμός</u>: $R^3 + 2,4 \cdot R^2 - 1,8 \cdot R - \frac{1,35}{\pi} = 0$

a	**b**	**c**	**d**
1	**2,4**	**-1,8**	**-0,429718**

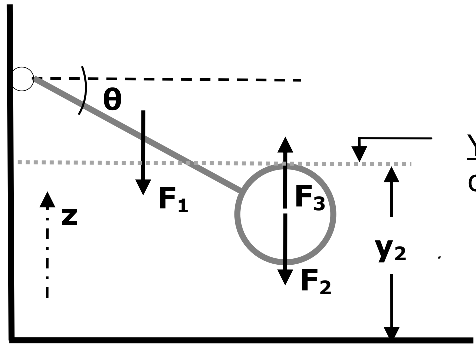
$$(17) \rightarrow R_{\nu+1} = R_\nu - \frac{R_\nu^{\,3} + 2,4 \cdot R_\nu^{\,2} - 1,8 \cdot R_\nu - \frac{1,35}{\pi}}{3 \cdot R_\nu^{\,2} + 4,8 \cdot R_\nu - 1,8}$$

Για τη 1^{η} <u>τιμής εκκίνησης</u>: ***αμελούμε*** τα <**+2,4.$\mathbf{R^2}$**> και <**-1,35/π**> → $R_1 = \sqrt{1,8}$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
1,341641	*0,954158*	*0,770630*	*0,752673*	*0,752243* ✓

→ **R**= **0,752** m.

→ $\mathbf{O_z}$= **5,402**159 t= **52,995** kN



<u>Υποθέτουμε</u> αρχικώς ότι και για το βάθος $\mathbf{y_2} < \mathbf{y_1}$ ο πλωτήρας <u>καλύπτεται οριακώς</u> από το νερό

$F_1 = w \cdot L \cdot b \Downarrow$ (βάρος του οριζοντίου φύλλου – <u>ίδιο με πριν</u>) και $e_{OF1} = \dfrac{L}{2}$

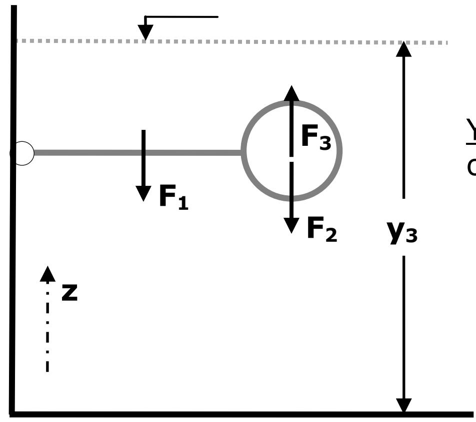
$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \Downarrow$ (βάρος του πλωτήρα– <u>ίδιο με πριν</u>) και $e_{OF2} = (L + R) \cdot \cos\theta$

$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \Uparrow$ (*άνωση* του πλωτήρα– <u>ίδια με πριν</u>) και $e_{OF3} = (L + R) \cdot \cos\theta$

$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - M_{OF3} = 0$, ο όρος $\cos\theta$ <u>απλοποιείται</u>!

→ Ο πλωτήρας <u>όντως ισορροπεί</u> στη <u>θέση</u>, την οποία <u>υποθέσαμε</u>!

→ $\theta = \arcsin\left(\dfrac{y_1 - y_2}{L + R}\right)$



<u>Υποθέτουμε</u> αρχικώς ότι για το βάθος $\mathbf{y_3} > \mathbf{y_1}$ ο πλωτήρας <u>παραμένει στην ίδια – οριζόντια θέση</u>

$F_1 = w \cdot L \cdot b \Downarrow$ (βάρος του οριζοντίου φύλλου – <u>ίδιο με πριν</u>) και $e_{OF1} = \dfrac{L}{2} \cdot \cos\theta$

$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \Downarrow$ (βάρος του πλωτήρα– <u>ίδιο με πριν</u>) και $e_{OF2} = L + R$

$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \Uparrow$ (*άνωση* του πλωτήρα– <u>ίδια με πριν</u>) και $e_{OF3} = L + R$

$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - M_{OF3} = 0$, η εξίσωση <u>ικανοποιείται</u>! (ανεξάρτητη του **y**!..)

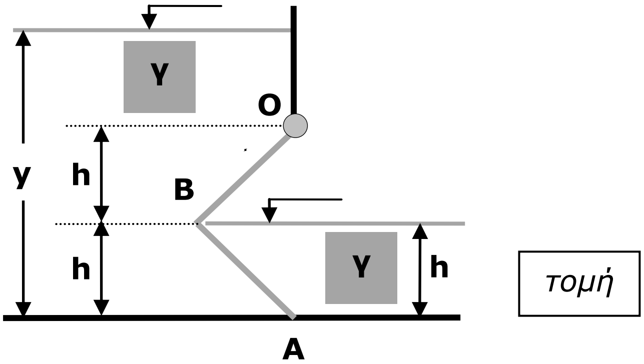
<u>Ικανοποιείται επίσης</u> για <u>οιοδήποτε βάθος</u> μεταξύ $\mathbf{y_3}$ και $\mathbf{y_1}$, αρκεί ο πλωτήρας να <u>καλύπτεται οριακώς</u> από το νερό!

→ Ο πλωτήρας <u>όντως ισορροπεί</u> στη <u>θέση</u>, την οποία <u>υποθέσαμε</u>, εφόσον **δεν** υπάρχει *άλλη* ***αιτία*** να κινηθεί!..

2.2 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟ** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο Β είναι 90^{o}.
Το θυρόφραγμα στηρίζεται με <u>*γραμμική* άρθρωση</u> στον οριζόντιο άξονα **ΟΟ'**, σε κατακόρυφο τοίχωμα, <u>απλώς *ακουμπάει στον πυθμένα*</u> στον οριζόντιο άξονα **ΑΑ'** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει νερό με βάθος **y** > **2.h**.
Κατάντη περιέχει επίσης νερό με βάθος **h** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί το βάθος **y**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.

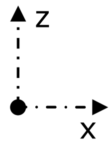
<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>: **h**= **2** m, **b**= **10** m.

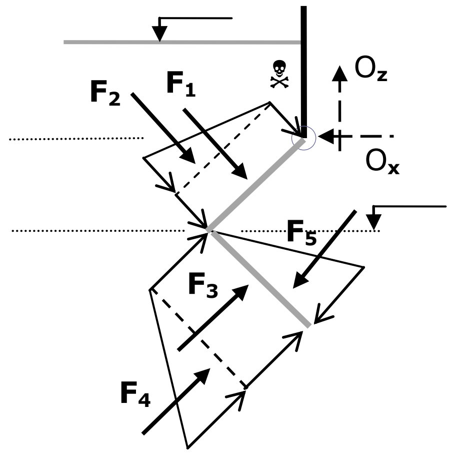


<βλ. <u>2.3.9</u> FM NV401_2 A>

και <**1.4** - 1η Σειρά 2011>

Γραφική μέθοδος





Τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΒΟ είναι: $\sqrt{2}\cdot h$

<u>Θέτω</u>: $Y = y - 2\cdot h > 0$

$$F_1 = \sqrt{2}\cdot\gamma\cdot h\cdot Y\cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2}\cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\gamma\cdot h\cdot Y\cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot h}{3}$$

$$F_3 = \sqrt{2}\cdot\gamma\cdot h\cdot\left(h+Y\right)\cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2}\cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\gamma\cdot h^2\cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot h}{3}$$

$$F_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\gamma\cdot h^2\cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - M_{OF5} = 0 \rightarrow \sum_1^3 M_{OFi} = 0 \text{, διότι } M_{OF4} = -M_{OF5}$$

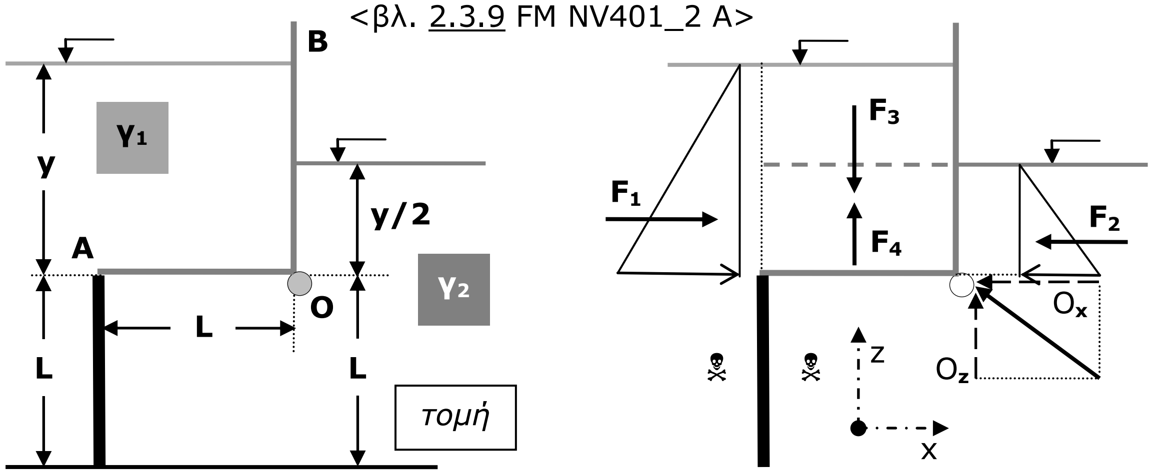
Δεν υπάρχει **λύση** στο **πεδίο y** > **2.h**, οι **ροπές** είναι **αριστερόστροφες**

2.3 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **AOB** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα στηρίζεται με *<u>γραμμική</u>* <u>άρθρωση</u> στον οριζόντιο άξονα **OO′**, <u>απλώς</u> *<u>ακουμπάει</u>* στην ακμή **AA′** σε κατακόρυφο τοίχωμα και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει υγρό με βάθος **y** + **L** και ειδικό βάρος $\boldsymbol{\gamma_1}$. Κατάντη περιέχει υγρό με βάθος **0,5.y** + **L** και ειδικό βάρος $\boldsymbol{\gamma_2}$ (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν:
1. Το βάθος **y**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Για το βάθος **y** που υπολογίστηκε, οι αντιδράσεις των στηρίξεων στον άξονα OO′ και στην ακμή AA′ (μέτρο, διεύθυνση, σημείο εφαρμογής).

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>: $\boldsymbol{\gamma_1}$ = **1,00** t/ m^3, $\boldsymbol{\gamma_2}$ = **1,05** t/ m^3, **L**= **4,10** m, **b**= **8** m.

<βλ. <u>2.3.9</u> FM NV401_2 A>



$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot y^2 \cdot b \ \text{ και } \ e_{OF1} = \frac{y}{3}$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \cdot \gamma_2 \cdot y^2 \cdot b \ \text{ και } \ e_{OF2} = \frac{y}{6}$$

$$F_3 = \gamma_1 \cdot L \cdot y \cdot b \ \text{ και } \ e_{OF3} = \frac{L}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot L \cdot y \cdot b \ \text{ και } \ e_{OF4} = \frac{L}{2}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} + M_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow \ y = \left(\frac{24 \cdot \gamma_1 - 12 \cdot \gamma_2}{8 \cdot \gamma_1 - \gamma_2} \right)^{1/2} \cdot L \text{, με } y \neq 0 \rightarrow$$ **y**= **5,251**023 m

$$O_x = \sum_1^2 F_i = \frac{4 \cdot \gamma_1 - \gamma_2}{8} \cdot y^2 \cdot b \rightarrow$$ $\boldsymbol{O_x}$= **81,341**050 t= **797,956** kN

$$O_z = \sum_3^4 F_i = \frac{2 \cdot \gamma_1 - \gamma_2}{2} \cdot L \cdot y \cdot b \rightarrow$$ $\boldsymbol{O_z}$= **81,810**931 t= **802,565** kN

→ Αντίδραση στον **OO′**= **115,366** t= **1.131,744** kN και **θ**= **45,165°**

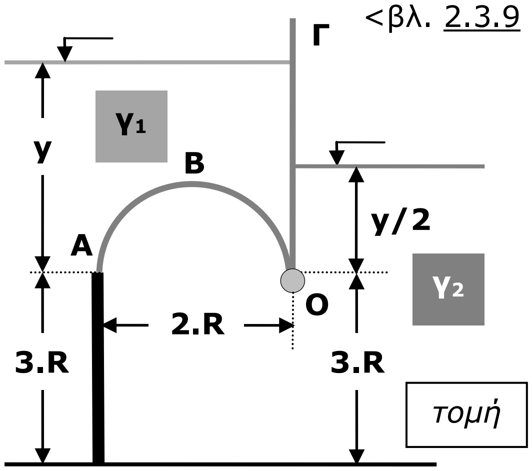
Αντίδραση στην ακμή **AA′**= **0** 💣 (οριακή ισορροπία!)

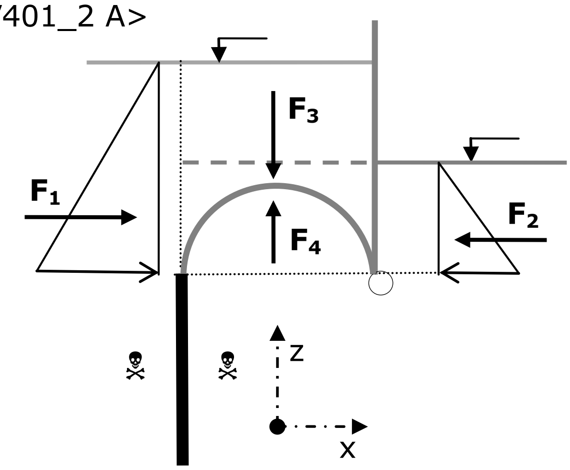
2.4 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει *σύνθετη* διατομή: (ημικύκλιο με ακτίνα **R** + κατακόρυφο τμήμα), στηρίζεται με *γραμμική* άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **ΟΟ'**, απλώς *ακουμπάει* στην ακμή **ΑΑ'** σε κατακόρυφο τοίχωμα και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει υγρό με βάθος **y** + **3.R** και ειδικό βάρος γ_1. Κατάντη περιέχει υγρό με βάθος **0,5.y** + **3.R** και ειδικό βάρος γ_2 (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί το βάθος **y** >**2.R**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.

Αριθμητική εφαρμογή: $\gamma_1 = 1{,}00$ t/ m^3, $\gamma_2 = 1{,}05$ t/ m^3, **R**= **2,05** m, **b**= **8** m.

<βλ. 2.3.9 FM NV401_2 A>





$$F_1 = \frac{1}{2}\cdot\gamma_1\cdot y^2\cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{y}{3}$$

$$F_2 = \frac{1}{8}\cdot\gamma_2\cdot y^2\cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{y}{6}$$

$$F_3 = \gamma_1\cdot 2\cdot R\cdot y\cdot b - \frac{1}{2}\cdot\gamma_1\cdot\pi\cdot R^2\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\gamma_1\cdot R\cdot(4\cdot y - \pi\cdot R)\cdot b \text{ και } e_{OF3} = R$$

$$F_4 = \frac{1}{2}\cdot\gamma_2\cdot 2\cdot R\cdot y\cdot b - \frac{1}{2}\cdot\gamma_2\cdot\pi\cdot R^2\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\gamma_2\cdot R\cdot(2\cdot y - \pi\cdot R)\cdot b \text{ και } e_{OF4} = R$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} + M_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow (8\cdot\gamma_1 - \gamma_2)\cdot y^3 - \left[48\cdot(2\cdot\gamma_1 - \gamma_2)\right]\cdot R^2\cdot y + 24\cdot\pi\cdot(\gamma_1 - \gamma_2)\cdot R^3 = 0$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$6{,}95\cdot y^3 - 191{,}634\cdot y - 10{,}33815\cdot\pi = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3

A	C	D	p	q	Δ
6,95	**-191,634**	**-32,478256**	-9,191079	-2,336565	-770,965473 <0

cos φ	φ	y_1	y_2	y_3
0,083855	85,189823	**5,333**795	-0,169658	-5,164138

→ **y**= **5,334** m. (> 4,10= 2**.**R)

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

Μετασχηματίζουμε: $y^3 - 27,573237 \cdot y - 4,67313 = 0$

a	c	d
1	**-27,573237**	**-4,67313**

(17) → $y_{\nu+1} = y_\nu - \dfrac{{y_\nu}^3 - 27,573237 \cdot y_\nu - 4,67313}{3 \cdot {y_\nu}^2 - 27,573237}$

Για τη $1^η$ τιμής εκκίνησης: ***αμελούμε*** το <**-4,67313**>

→ $y_1 = (27,573237)^{1/2} = 5,251023$

y_1	y_2	y_3
5,251023	*5,335763*	*5,333796* ✓

→ **y**= **5,334** m. (> 4,10= 2**.**R)