

2.1 Σε κατακόρυφο τοίχωμα δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό, τοποθετείται μηχανισμός, ο οποίος έχει κατασκευασθεί από φύλλα υλικού με βάρος w (ανά μονάδα επιφανείας) και αποτελείται από άκαμπτο επίπεδο τμήμα **ΟΑΑ'Ο'** μήκους L και πλάτους b και κυλινδρικό πλωτήρα ακτίνας R και πλάτους b . Ο μηχανισμός είναι στρεπτός (*γραμμική άρθρωση*) περί τον οριζόντιο άξονα $ΟΟ'$ και για βάθος $y_1 = 6 \cdot R$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα. Σημείωση: Ο πλωτήρας είναι κενός και στεγανός. Οι βάσεις του κυλίνδρου είναι αβαρείς.

Να υπολογιστούν:

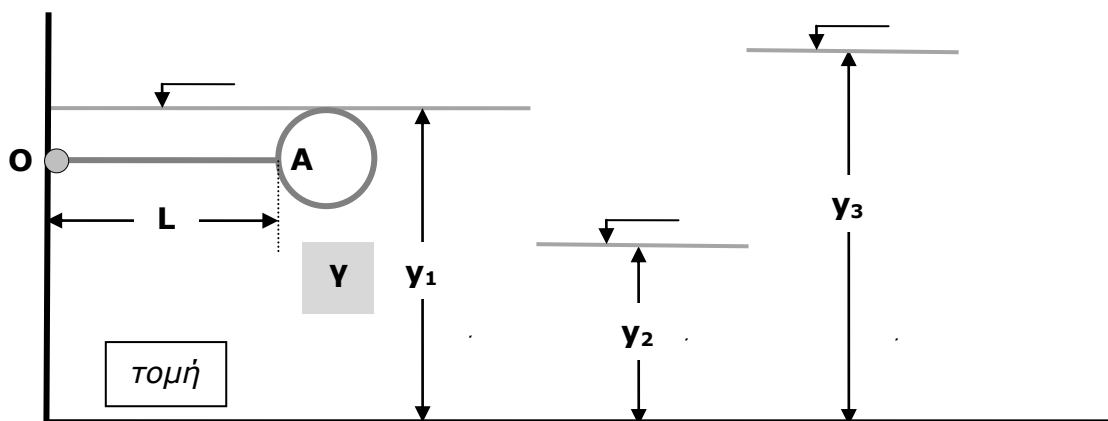
1. Η ακτίνα R και η αντίδραση στον άξονα $ΟΟ'$.

Εάν η στάθμη του νερού μεταβληθεί, να υπολογιστεί η νέα θέση του μηχανισμού, δηλαδή η γωνία θ του τμήματος $ΟΑΑ'Ο'$ ως προς οριζόντιο επίπεδο και η σχετική θέση του πλωτήρα ως προς τη νέα στάθμη:

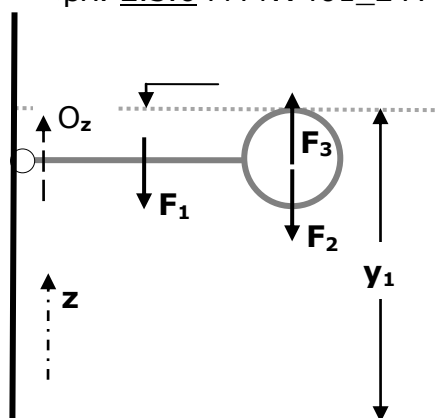
2. Εάν η νέα στάθμη είναι χαμηλότερη: $y_2 < y_1$

3. Εάν η νέα στάθμη είναι υψηλότερη: $y_3 > y_1$

Αριθμητική εφαρμογή: $L = 3 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$, $w = 0,3 \text{ t / m}^2$.



<βλ. 2.3.6 FM NV401_2 A> και <1.3 - 1η Σειρά 2011>



$$F_1 = w \cdot L \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του οριζοντίου φύλλου) και } e_{OF1} = \frac{L}{2}$$

$$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του πλωτήρα) και } e_{OF2} = L + R$$

$$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \uparrow \text{ (άνωση του πλωτήρα) και } e_{OF3} = L + R$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - M_{OF3} = 0$$

$$\rightarrow (\pi \cdot \gamma) \cdot R^3 + [\pi \cdot (\gamma \cdot L - 2 \cdot w)] \cdot R^2 - (2 \cdot \pi \cdot w \cdot L) \cdot R - \left(\frac{w \cdot L^2}{2} \right) = 0$$

Η ακτίνα **R** είναι ανεξάρτητη του βάθους **y₁** ☼

$$\sum F_z = O_z - \sum_1^2 F_i + F_3 = 0 \rightarrow O_z = [(2 \cdot \pi \cdot R + L) \cdot w - \pi \cdot \gamma \cdot R^2] \cdot b$$

Η αντίδραση **O_z** είναι επίσης ανεξάρτητη του βάθους **y₁** ☼

Αριθμητική εφαρμογή:

$$R^3 + 2,4 \cdot R^2 - 1,8 \cdot R - \frac{1,35}{\pi} = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3

A	B	C	D	p	q	Δ
1	2,4	-1,8	-0,429718	-1,240000	1,017141	-0,872049 < 0

cos φ	φ	R ₁	R ₂	R ₃
-0,736629	137,445008	0,752242	-0,193042	-2,959200

→ **R = 0,752 m.**

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: $R^3 + 2,4 \cdot R^2 - 1,8 \cdot R - \frac{1,35}{\pi} = 0$

a	b	c	d
1	2,4	-1,8	-0,429718

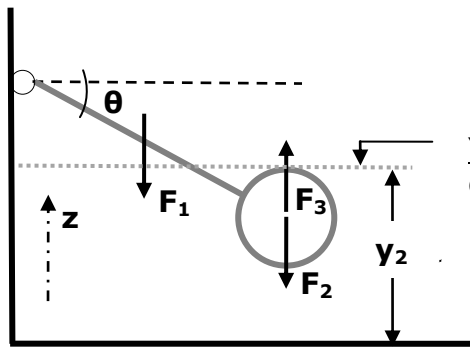
$$(17) \rightarrow R_{v+1} = R_v - \frac{R_v^3 + 2,4 \cdot R_v^2 - 1,8 \cdot R_v - \frac{1,35}{\pi}}{3 \cdot R_v^2 + 4,8 \cdot R_v - 1,8}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** τα **<+2,4·R²>** και **<-1,35/π>** → **R₁ = √1,8**

R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅
1,341641	0,954158	0,770630	0,752673	0,752243 ✓

→ **R = 0,752 m.**

→ **O_z = 5,402159 t = 52,995 kN**



Υποθέτουμε αρχικώς ότι και για το βάθος $y_2 < y_1$ ο πλωτήρας καλύπτεται οριακώς από το νερό

$$F_1 = w \cdot L \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του οριζοντίου φύλλου - ίδιο με πριν) και } e_{OF1} = \frac{L}{2}$$

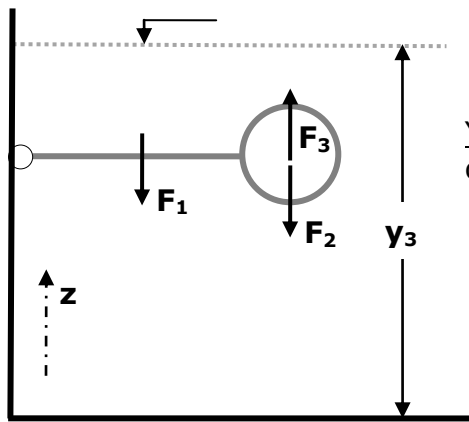
$$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του πλωτήρα- ίδιο με πριν) και } e_{OF2} = (L + R) \cdot \cos\theta$$

$$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \uparrow \text{ (άνωση του πλωτήρα- ίδια με πριν) και } e_{OF3} = (L + R) \cdot \cos\theta$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - M_{OF3} = 0, \text{ ο όρος } \cos\theta \text{ απλοποιείται!}$$

→ Ο πλωτήρας όντως ισορροπεί στη θέση, την οποία υποθέσαμε!

$$\rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{y_1 - y_2}{L + R}\right)$$



Υποθέτουμε αρχικώς ότι για το βάθος $y_3 > y_1$ ο πλωτήρας παραμένει στην ίδια - οριζόντια θέση

$$F_1 = w \cdot L \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του οριζοντίου φύλλου - ίδιο με πριν) και } e_{OF1} = \frac{L}{2} \cdot \cos\theta$$

$$F_2 = 2 \cdot w \cdot \pi \cdot R \cdot b \downarrow \text{ (βάρος του πλωτήρα- ίδιο με πριν) και } e_{OF2} = L + R$$

$$F_3 = \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \uparrow \text{ (άνωση του πλωτήρα- ίδια με πριν) και } e_{OF3} = L + R$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - M_{OF3} = 0, \text{ η εξίσωση ικανοποιείται! (ανεξάρτητη του y !..)}$$

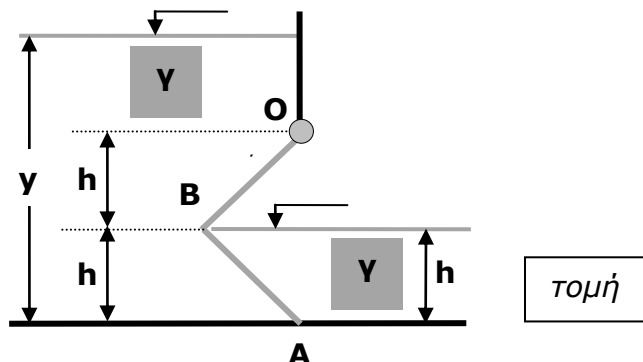
Ικανοποιείται επίσης για οιοδήποτε βάθος μεταξύ y_3 και y_1 , αρκεί ο πλωτήρας να καλύπτεται οριακώς από το νερό!

→ Ο πλωτήρας όντως ισορροπεί στη θέση, την οποία υποθέσαμε, εφόσον **δεν** υπάρχει άλλη αιτία να κινηθεί!..

2.2 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ABO** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο B είναι 90° . Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **OO'**, σε κατακόρυφο τοίχωμα, απλώς ακουμπάει στον πυθμένα στον οριζόντιο άξονα **AA'** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα. Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει νερό με βάθος $y > 2 \cdot h$. Κατάντη περιέχει επίσης νερό με βάθος **h** (βλ. σχήμα).

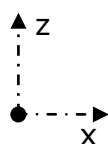
Να υπολογιστεί το βάθος **y**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 2 m, b = 10 m.**

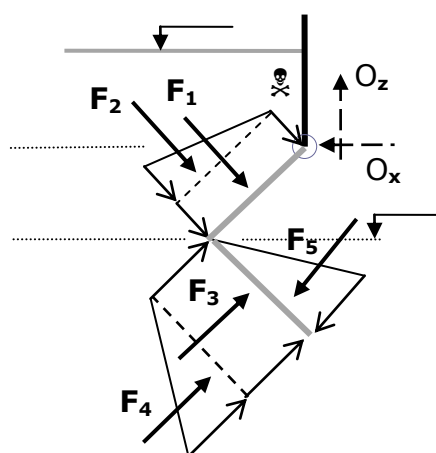


<βλ. 2.3.9 FM NV401_2 A>
και <1.4 - 1η Σειρά 2011>

Γραφική μέθοδος



Τα μήκη των πλευρών AB
και BO είναι: $\sqrt{2} \cdot h$



Θέτω: $Y = y - 2 \cdot h > 0$

$$F_1 = \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot h \cdot Y \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \cdot h \cdot Y \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot h \cdot (h + Y) \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - M_{OF5} = 0 \rightarrow \sum_1^3 M_{OFi} = 0, \text{ διότι } M_{OF4} = -M_{OF5}$$

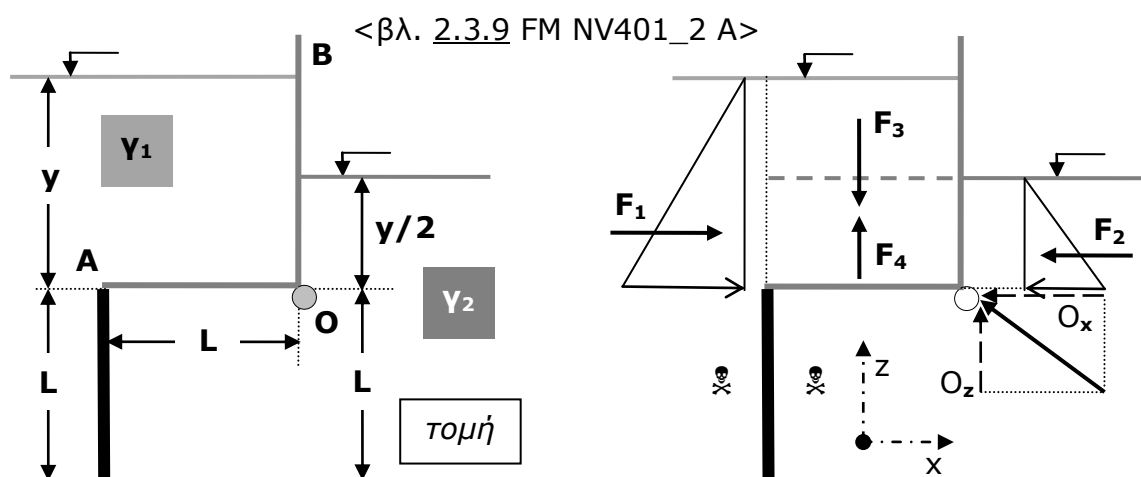
Δεν υπάρχει **λύση** στο **πεδίο** $y > 2 \cdot h$, οι **ροπές** είναι **αριστερόστροφες** ☹

2.3 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΟΒ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **ΟΟ'**, απλώς ακουμπάει στην ακμή **ΑΑ'** σε κατακόρυφο τοίχωμα και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα. Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει υγρό με βάθος **y + L** και ειδικό βάρος **γ₁**. Κατάντη περιέχει υγρό με βάθος **0,5·y + L** και ειδικό βάρος **γ₂** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν:

1. Το βάθος **y**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Για το βάθος **y** που υπολογίστηκε, οι αντιδράσεις των στηρίξεων στον άξονα **ΟΟ'** και στην ακμή **ΑΑ'** (μέτρο, διεύθυνση, σημείο εφαρμογής).

Αριθμητική εφαρμογή: **γ₁ = 1,00 t/m³, γ₂ = 1,05 t/m³, L = 4,10 m, b = 8 m.**



$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{y}{3}$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \cdot \gamma_2 \cdot y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{y}{6}$$

$$F_3 = \gamma_1 \cdot L \cdot y \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{L}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot L \cdot y \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{L}{2}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} + M_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{24 \cdot \gamma_1 - 12 \cdot \gamma_2}{8 \cdot \gamma_1 - \gamma_2} \right)^{1/2} \cdot L, \text{ με } y \neq 0 \rightarrow y = \mathbf{5,251023 \text{ m}}$$

$$O_x = \sum_1^2 F_i = \frac{4 \cdot \gamma_1 - \gamma_2}{8} \cdot y^2 \cdot b \rightarrow O_x = \mathbf{81,341050 \text{ t} = 797,956 \text{ kN}}$$

$$O_z = \sum_3^4 F_i = \frac{2 \cdot \gamma_1 - \gamma_2}{2} \cdot L \cdot y \cdot b \rightarrow O_z = \mathbf{81,810931 \text{ t} = 802,565 \text{ kN}}$$

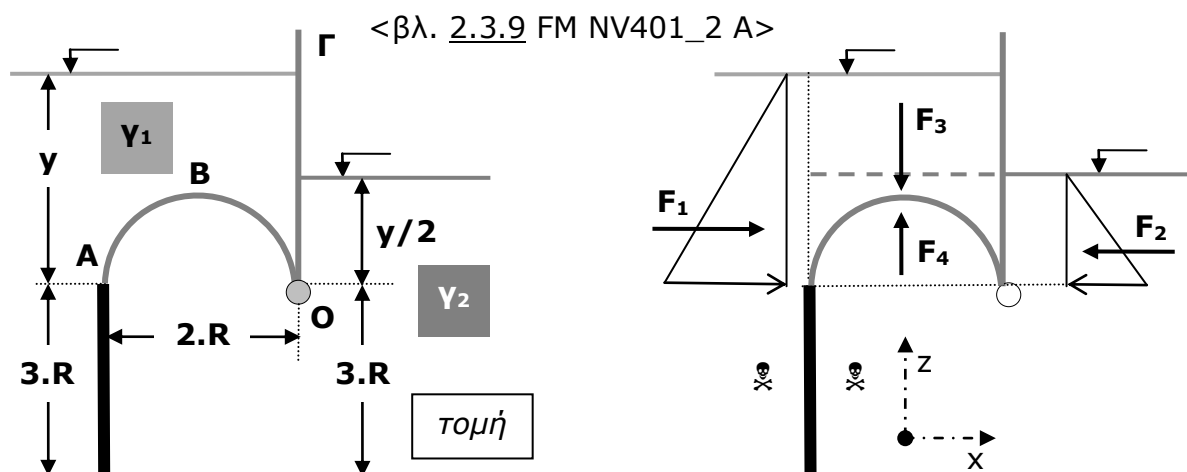
$$\rightarrow \text{Αντίδραση στον } \mathbf{ΟΟ'} = \mathbf{115,366 \text{ t} = 1.131,744 \text{ kN}} \text{ και } \mathbf{\theta = 45,165^\circ}$$

$$\text{Αντίδραση στην ακμή } \mathbf{ΑΑ'} = \mathbf{0 \text{ t}}^* \text{ (οριακή ισορροπία!)}$$

2.4 Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει *σύνθετη* διατομή: (ημικύκλιο με ακτίνα **R** + κατακόρυφο τμήμα), στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **ΟΟ'**, απλώς ακουμπάει στην ακμή **ΑΑ'** σε κατακόρυφο τοίχωμα και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει υγρό με βάθος **y + 3.R** και ειδικό βάρος **γ₁**. Κατάντη περιέχει υγρό με βάθος **0,5.y + 3.R** και ειδικό βάρος **γ₂** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί το βάθος **y > 2.R**, ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.

Αριθμητική εφαρμογή: **γ₁ = 1,00 t/m³, γ₂ = 1,05 t/m³, R = 2,05 m, b = 8 m.**



$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{y}{3}$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \cdot \gamma_2 \cdot y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{y}{6}$$

$$F_3 = \gamma_1 \cdot 2 \cdot R \cdot y \cdot b - \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot R \cdot (4 \cdot y - \pi \cdot R) \cdot b \text{ και } e_{OF3} = R$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot 2 \cdot R \cdot y \cdot b - \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot R \cdot (2 \cdot y - \pi \cdot R) \cdot b \text{ και } e_{OF4} = R$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} + M_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow (8 \cdot \gamma_1 - \gamma_2) \cdot y^3 - [48 \cdot (2 \cdot \gamma_1 - \gamma_2)] \cdot R^2 \cdot y - 24 \cdot \pi \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot R^3 = 0$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$6,95 \cdot y^3 - 191,634 \cdot y + 10,33815 \cdot \pi = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3

A	C	D	p	q	Δ
6,95	-191,634	32,478256	-9,191079	2,336565	-770,965473 < 0

cos φ	φ	γ ₁	γ ₂	γ ₃
-0,083855	94,810177	5,164138	0,169658 < 4,10	-5,333795

→ **y = 5,164 m.**

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

Μετασχηματίζουμε: $y^3 - 27,573237 \cdot y + 4,67313 = 0$

a	c	d
1	-27,573237	4,67313

$$(17) \rightarrow y_{v+1} = y_v - \frac{y_v^3 - 27,573237 \cdot y_v + 4,67313}{3 \cdot y_v^2 - 27,573237}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το **<+4,67313>**

$$\rightarrow y_1 = (27,573237)^{1/2} = 5,251023$$

γ ₁	γ ₂	γ ₃
5,251023	5,166282	5,164139 ✓

→ **y = 5,164 m.** (> 4,10 = 2.R)