

## 4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Αναπτύσσονται **συνοπτικώς** οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής και οι αντίστοιχες γενικές διαφορικές εξισώσεις του πεδίου ροής. **Είναι απαραίτητη η εμβάθυνση σε έννοιες και σχετική ανάλυση με αξιοποίηση των διανεμομένων συγγραμμάτων.**

### 4.1 Βασικές έννοιες

#### 4.1.1 Είδη δυνάμεων

- **Καθολικές:** Δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του θεωρούμενου ρευστού.
  - ο Επίδραση από απόσταση: **Βαρύτητα** ή αδρανειακές.
  - ο Ασκούνται στο κέντρο βάρους του ρευστού σωματιδίου.
  - ο Ανάλογες προς τη μάζα του ρευστού σωματιδίου (ή τον όγκο του).
  - ο Συνήθως εκφράζονται με την ανά μονάδα μάζας δύναμη, δηλαδή έχουν διαστάσεις επιτάχυνσης.
  - ο Συχνά τα πεδία καθολικών δυνάμεων προέρχονται από δυναμικό.
  - ο Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με κατακόρυφο προς τα πάνω άξονα z

$$f_x = 0, f_y = 0 \text{ και } f_z = -g \quad (35)$$

- **Επιφανειακές:** Ασκούνται στην επιφάνεια η οποία περιβάλλει το θεωρούμενο όγκο ρευστού από το γειτονικό - σε επαφή - ρευστό.
  - ο Θεωρούμε στοιχειώδη όγκο μορφής ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου:  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ :
  - ο Σε κάθε έδρα ασκούνται κάθετες και εφαπτομενικές δυνάμεις, οι οποίες δίνουν ορθές ( $\sigma$ ) και διατμητικές ( $\tau$ ) τάσεις.
  - ο Η εντατική κατάσταση σε σημείο ρευστού περιγράφεται πλήρως από έξι (6) τάσεις: τρεις (3) ορθές και τρεις (3) διατμητικές, όπως στη Μηχανική των Στερεών!..
- Οι Καθολικές και Επιφανειακές δυνάμεις αποτελούν **σημαντικές παραμέτρους** του Κεφαλαίου **5**. Θα τις υπολογίσουμε <εκεί> αξιοποιώντας τις μεθόδους 2.2.4 και 2.2.2 αντιστοίχως!
- **Γραμμικές:** Αποτέλεσμα του φαινομένου επιφανειακής τάσης.
  - ο Στα όρια μεταξύ υγρού – αερίου ή δύο μη μιγνυομένων υγρών
  - ο Δεν υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης, παρά μόνο ως οριακές συνθήκες.

#### 4.1.2 Θεμελιώδεις νόμοι

- Αρχή **διατήρησης της μάζας**:
  - ο Σε ένα σύνολο ρευστών σωματιδίων - με στοιχειώδεις μάζες το καθένα - η συνολική τους μάζα παραμένει αναλλοίωτη κατά την κίνησή τους.

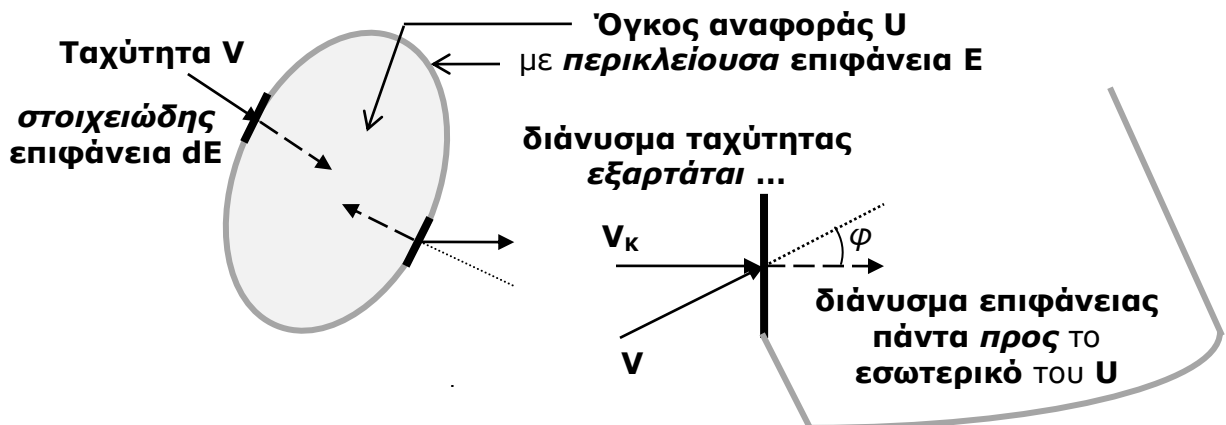
$$\int dm = \text{σταθ} \rightarrow \frac{D}{Dt} \int dm = 0 \quad (36)$$

- Στα **ομογενή** ρευστά συσχετίζονται οι μεταβολές πυκνότητας και ταχύτητας → **εξίσωση συνεχείας** (βλ. 4.2.2).
- Στα ανομοιογενή η αρχή αυτή ισχύει για το καθένα χωριστά.
- Θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** - Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:
  - Το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν σε ένα σύστημα μάζας ρευστού, ισούται με την ολική μεταβολή (παράγωγο) ως προς το χρόνο της ποσότητας κίνησης (ορμής) του συστήματος.
  - $$\vec{F} = \int \vec{\alpha} \cdot dm \rightarrow \vec{F} = \frac{D}{Dt} \int \vec{V} \cdot dm \quad (37)$$
  - Οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης, οι οποίες συνδέουν τα κινηματικά και τα δυναμικά χαρακτηριστικά της ροής → **εξίσωση ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.2.2).
- Αρχή **διατήρησης** της **ενέργειας**:
  - Η ενέργεια αποτελεί ιδιότητα του ρευστού (βλ. 3.1.1) και ορίζεται πλήρως από την κατάσταση του.
  - Η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος προκύπτει από τις μεταβολές:
    - Της θερμότητας: προστιθέμενη <+> / αφαιρούμενη <->
    - Του έργου: αποδιδόμενο <-> / προσλαμβάνόμενο <+>
    - $\pm \delta Q \mp \delta W = dE \quad (38)$
  - Το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:
    - Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
    - Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
    - Έργο μηχανικό που αποδίδεται από (υδροστρόβιλος), ή προσλαμβάνεται στο (αντλία) σύστημα, μέσω μηχανικού άξονα
  - Η **ενέργεια** του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί με την τιμή της ανά μονάδα μάζας και συνίσταται από **τρεις μορφές**:
    - **Δυναμική**, λόγω θέσης - υψομετρικής διαφοράς:  $\varepsilon_s = g \cdot h$
    - **Κινητική**, λόγω ταχύτητας:  $\varepsilon_k = \frac{V^2}{2}$
    - Εσωτερική, εξαρτώμενη από την τοπική θερμοκρασία:  $\varepsilon_i = I$
    - $$(38) \rightarrow \pm \frac{\delta Q}{dt} \mp \frac{\delta W}{dt} = \frac{D}{Dt} \int \varepsilon \cdot dm = \frac{D}{Dt} \int \left( g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I \right) \cdot dm \quad (39)$$
  - Στα ρευστά συσχετίζονται **πυκνότητα, πίεση, ταχύτητα, υψομετρική θέση, μηχανικό έργο**, θερμοκρασία, προστιθέμενη θερμότητα...  
Στα <δικά μας> υγρά, τα οποία είναι πρακτικώς ασυμπίεστα και έχουν μεγάλη θερμοχωρητικότητα, η εξίσωση απλοποιείται → **εξίσωση ενέργειας** (βλ. 4.2.2).

## 4.2 Μέθοδοι ανάλυσης

### 4.2.1 Χαρακτηριστικά

- Τα παραπάνω συνδέονται ευκόλως με τη μέθοδο περιγραφής της κίνησης κατά Lagrange (βλ. 3.1.2).  
Είναι όμως αναγκαίες κάποιες **προσαρμογές**, ώστε να συνδεθούν με την κανόνα χρησιμοποιούμενη στη ρευστομηχανική περιγραφή **κατά Euler** (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **ρευστού σωματιδίου**
  - Επιλέγουμε τυχόν σταθερό σημείο  $(x, y, z)$ .
  - Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας  $dm$  στη γειτονία του σημείου. Έτσι Περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της ροής.
  - Η μεταβολή κάθε ιδιότητας δίνεται από την ολική παράγωγο (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς**
  - Επιλέγουμε και πάλι τυχόν **σταθερό σημείο**  $(x, y, z)$ .
  - Θεωρούμε διαφορικό όγκο αναφοράς  $dU$  **γύρω από το σημείο**.
  - Παρακολουθούμε – καταγράφουμε τις **μεταβολές** των **ιδιοτήτων** του ρευστού, οι οποίες **εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα** στον όγκο αυτό.
  - Για τη μέθοδο έχει ουσιώδη σημασία η έννοια της εισροής (και εκροής!)
- **Πεπερασμένος όγκος αναφοράς, εισροή – εκροή**
  - Θεωρούμε πεπερασμένο όγκο  $U$  και την επιφάνεια  $E$ , η οποία τον περικλείει. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες  $dE$ , των οποίων το **διάνυσμα** έχει **πάντοτε φορά** προς το **εσωτερικό του όγκου**!
  - Στις στοιχειώδεις επιφάνειες αντιστοιχούν ρευστά σωματίδια με ταχύτητα  $\vec{V}$ , των οποίων η κάθετη συνιστώσα σε κάθε  $dE$  είναι  $V_k$ .  
Τα **διανύσματα ταχυτήτων** έχουν τη **φορά** της **κίνησης**, άρα:
    - Είτε προς το **εσωτερικό** του **όγκου** → **εισρέουν**
    - Είτε προς το **εξωτερικό** του **όγκου** → **εκρέουν**



- Κάθε **διάνυσμα** της **ταχύτητας** είναι φορέας – **όχημα ιδιοτήτων**!
  - Μεταφέρει Ιδιότητες: π.χ. μάζα, επιτάχυνση, ενέργεια, θερμοκρασία, ακτινοβολία, χρώμα ....
  - Αλλά και την **ιδιότητα ταχύτητα**!.. **Διακριτή** από το **όχημα ταχύτητα**!!.
  - Περισσότερα στο Κεφάλαιο **5**.
- Η εισροή ιδιότητας λ (ή, η εκροή = αρνητική εισροή) στον όγκο U διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dE είναι:  $\lambda \cdot V_K \cdot dE$   
 Και η ολική εισροή ιδιότητας λ στον όγκο **U** διαμέσου της επιφάνειας **E** είναι:
 
$$\int_E \lambda \cdot V_K \cdot dE = \int_E \lambda \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} \quad (40)$$
  - Όπου είναι  $\vec{V} \cdot d\vec{E} > 0 \rightarrow$  **εισροή**
  - Όπου είναι  $\vec{V} \cdot d\vec{E} < 0 \rightarrow$  **εκροή**
- Η διατύπωση των θεμελιωδών νόμων βασίζεται στο **ισοζύγιο** μεταξύ των **εισερχομένων, εξερχομένων** και **συσσωρευομένων** ποσοτήτων των διαφόρων **ιδιοτήτων** στον όγκο.
  - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Renault Mégane χρώματος μπλε **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
  - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Porsche Cayenne χρώματος λευκού επίσης **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από τη δεξιά λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
  - Στις 13:17 ένα αυτοκίνητο Toyota Prius χρώματος πρασίνου **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
  - Στις 13:19 το Toyota Prius **ακινητοποιείται** επί της **Λεωφόρου**.
  - Στις 13:20 το Renault Mégane επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Παπάγο – Χολαργό στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
  - Στις 13:20 το Porsche Cayenne επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Βύρωνα στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
- Ανάλυση κατά Euler με χρήση πεπερασμένου όγκου αναφοράς του ως άνω σεναρίου οδικής κυκλοφορίας:
  - Μία επιφάνεια εισόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη». Περιλαμβάνει δύο λωρίδες.
  - Δύο επιφάνειες εξόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Παπάγο – Χολαργό + Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Βύρωνα.
  - Ο **όγκος αναφοράς** ορίζεται από τις τρεις ως άνω **επιφάνειες** και τα οδικά **όρια** της **Λεωφόρου**.
  - Στις 13:15 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο αυτοκινήτων Renault και Porsche.
  - Στις 13:20 **εκρέουν** από τον όγκο αναφοράς οι ίδιες **ιδιότητες** με διαφορετικές ίσως τιμές, αλλά **πάλι** με **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο παραπάνω αυτοκινήτων .

- Στις 13:17 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** του ενός αυτοκινήτου Toyota.
- Στις 13:20 οι **ιδιότητες** του Toyota, με κάποιες τιμές, **έχουν συσσωρευθεί** στον όγκο αναφοράς διάφορες.

#### 4.2.2 Εξίσωση Συνεχειας

- Είναι διαφορική εξίσωση, η οποία εκφράζει την **αρχή διατήρησης μάζας** του ρευστού (βλ. 4.1.2).
- Σε **σταθερό διαφορικό όγκο αναφοράς dU** (βλ. 4.2.1) μορφής ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με πλευρές **dx, dy, dz**, η (40) για την ιδιότητα μάζα είναι:

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dU) = \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E}$$

$$\circ \quad \text{Όπου: } \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) \right] \cdot dU$$

$$\circ \quad \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

- Η (41) αποτελεί τη **γενική εξίσωση συνεχειας** και μπορεί να παραχθεί επίσης με τη μέθοδο του ρευστού σωματιδίου.

- Άλλες μορφές γραφής της (41) είναι:

$$\circ \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (41\alpha)$$

$$\circ \quad \frac{D\rho}{Dt} + \text{div}\vec{V} = 0 \quad (41\beta)$$

- Η παραπάνω γενική εξίσωση συνεχειας απλοποιείται υπό προϋποθέσεις:

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά (μόνιμη και μη μόνιμη ροή!):

$$\circ \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\vec{V} = 0 \quad (42)$$

$$\circ \quad \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (42\alpha)$$

- Για **συμπιεστά** ρευστά και **μόνιμη** ροή:  $\text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (43)$

#### 4.2.3 Εξισώσεις Κίνησης

- Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού, οι οποίες εκφράζουν το θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.1.2). Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνεχείας) επιλύεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους.

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** καταλήγουν στις εξισώσεις **Navier - Stokes**:

- $$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{f} - \text{grad}p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (44)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

- $$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot f_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (45\alpha)$$

- $$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot f_y - \frac{dp}{dy} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (45\beta)$$

- $$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot f_z - \frac{dp}{dz} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (45\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** στο **πεδίο βαρύτητας** της **γης** οι εξισώσεις **Navier - Stokes** είναι:

- $$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (46)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (46\alpha)$$

- $$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (46\beta)$$

- $$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (46\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ιδεατά ρευστά**, όπου  $\mu = 0$  οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικώς και είναι γνωστές ως εξισώσεις **Euler**:

$$\circ \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) \quad (47)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\cdot \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (47\alpha)$$

$$\cdot \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (47\beta)$$

$$\cdot \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (47\gamma)$$

- Οι εξισώσεις Euler είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α' βαθμού. Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνεχείας) επιλύεται με μαθηματικές μεθόδους!

### 4.3 Παρατηρήσεις για τις εξισώσεις συνέχειας και κίνησης

#### 4.3.1 Ασυμπίεστα και ομογενή ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης

- Ισχύουν οι (42) και (46<sup>α</sup>, β, γ) (βλ. 4.2.2 και 4.2.3).
  - Το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων έχει τέσσερις αγνώστους: τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας (**u, v, w**) και την πίεση **p**.
  - Η επίλυση είναι δυνατή εφ' όσον καθοριστούν:
    - Οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου επίλυσης
    - Οι αρχικές συνθήκες στην αρχή του χρόνου
  - Οριακές συνθήκες για την **ταχύτητα** είναι **κινηματικές** και φυσικές (βλ. **3.4**)
  - Οριακές συνθήκες για την **πίεση** είναι π.χ. η ελεύθερη επιφάνεια, η οποία υπόκειται σε ατμοσφαιρική πίεση, ή όπου αλλού η πίεση στα όρια είναι γνωστή.
- Οι εξισώσεις **Navier – Stokes** είναι δυνατό να θεωρηθούν ως **εξισώσεις ισορροπίας** μεταξύ των (ανά μονάδα μάζας) **δυνάμεων**: **αδρανείας, βαρύτητας, πίεσης** και **συνεκτικότητας**.  
Επομένως, ακόμη και σε **πραγματικά** ρευστά είναι δυνατό να **απλοποιηθούν**, όταν στο **φυσικό πρόβλημα, κάποια** από αυτές τις δυνάμεις είναι δυνατό να θεωρηθεί **αμελητέα**:

- **Παράλληλη ροή**

- ο Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους  $\rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ 
  - (42)  $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow$  η  $u = u(y, z, t)$  είναι αμετάβλητη κατά μήκος εκάστης γραμμής ροής.
  - (46α)  $\rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma \cdot h) + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$  (48α)
  - (46β)  $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma \cdot h)$  (48β)
  - (46γ)  $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma \cdot h)$  (48γ)
- ο Δηλαδή σε **παράλληλη** ροή, η **πίεση κατανέμεται υδροστατικά** πάνω σε **διατομές κάθετες** προς τη **διεύθυνση** της **ροής** ♪

- **Κλειστό Σύστημα**

- ο Η ροή περιβάλλεται από παντού από στερεά όρια, επομένως η γεωμετρία του πεδίου ροής **δεν μεταβάλλεται** από αυτή καθ' αυτή τη ροή.
- ο Είναι δυνατό να θεωρήσουμε, ότι η συνολική – πραγματική πίεση είναι άθροισμα δύο όρων:
  - **Στατική πίεση**  $p_s$ , η οποία θα υπήρχε ήδη σε κατάσταση ηρεμίας.
  - **(Υδρο)δυναμική πίεση**  $p_d$ , η οποία οφείλεται αποκλειστικώς στην κίνηση.
- ο Σε **ασυμπίεστα ομογενή** ρευστά στο πεδίο **βαρύτητας** της **γης** απαλείφεται ο όρος της βαρύτητας και παραμένει μόνο η συνιστώσα της δυναμικής πίεσης:
  - (46)  $\rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p_d + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V}$  (49)
  - Η περαιτέρω επίλυση του συστήματος είναι δυνατό να γίνει ως προς τη δυναμική πίεση, με την προϋπόθεση ότι και οι οριακές συνθήκες είναι δυνατό να εκφραστούν συναρτήσει αυτής.
  - Οι ως άνω προϋπόθεση ικανοποιείται σε συστήματα «ροής υπό πίεση» (σε κλειστούς αγωγούς), ενώ δεν ικανοποιείται σε συστήματα «ροής με ελεύθερη επιφάνεια» (σε ανοικτούς αγωγούς).

- **Έρπουσα ροή**

- ο Είναι σχετικώς **βραδεία**, δηλαδή οι όροι των **επιταχύνσεων** στις εξισώσεις Navier – Stokes είναι **πολύ μικρότερες** από τους όρους των **δυνάμεων συνεκτικότητας**, άρα είναι δυνατό (κατά προσέγγιση) να **αμεληθούν**:

$$(46) \rightarrow \text{grad}(p + \gamma \cdot h) = \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (50)$$

- ο Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η **ροή σε πορώδες έδαφος** (υπόγεια ύδατα).

- **Ιδεατά ρευστά – Οριακό στρώμα**

- ο Στα **ιδεατά** ρευστά ( $\mu = 0$ ) οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοποιούνται ως εξισώσεις **Euler** (βλ. 4.2.3).
  - Σε προβλήματα όπου οι όροι **συνεκτικότητας** στις εξισώσεις Navier – Stokes έχουν **μικρό μέγεθος** σε σύγκριση με τους άλλους όρους, η **θεωρία** των **ιδεατών ρευστών** (βλ. Κεφάλαιο 7) είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα**. Σε άλλα προβλήματα όχι...
  - Ακόμη και στην περίπτωση όπου η **συνεκτικότητα δεν** είναι δυνατό να **αμεληθεί γενικώς**, η θεωρία των **ιδεατών ρευστών** είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα** σε **τμήμα** του **πεδίου** ροής: **Μακριά** από τα **στερεά όρια**, όπου η **φυσική οριακή συνθήκη** (βλ. 3.4.3), δηλαδή η επιρροή των διατμητικών τάσεων **δεν** είναι **σημαντική** ♪
- ο **Κοντά** στα **στερεά όρια**, η **επιρροή** των **διατμητικών τάσεων** (οσοδήποτε μικρή και αν είναι η συνεκτικότητα...) είναι **πάντοτε σημαντική**, διότι εκεί αναπτύσσονται **μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων**.
  - Στο **στερεό όριο** η **ταχύτητα** είναι **μηδενική** (βλ. 3.4.4).
  - **Λίγο πιο μακριά** από το όριο η **ταχύτητα** έχει **μη μηδενική** τιμή!
  - Η **μεταβολή** - κλίση της **ταχύτητας** έχει **πολύ μεγάλη τιμή** (θεωρητικώς **άπειρη**), οπότε το **γινόμενο** της ακόμη και με **πολύ μικρή** τιμή **συνεκτικότητας** έχει **μη μηδενική** τιμή και **δεν αμελείται**!
- ο Η ανάλυση (βλ. Κεφάλαια 9 και 12) γίνεται με **διαφορετικές μεθόδους** σε **δύο περιοχές** του **πεδίου** ροής:
  - **Κοντά** στα **στερεά όρια** → **εντός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας δεν** αμελούνται.
  - **Μακριά** από τα **στερεά όρια** → **εκτός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας αμελούνται**.

## 4.4 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

### 4.4.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

|   |                                                               |
|---|---------------------------------------------------------------|
|   | <b>Σε ένα πεδίο ροής πραγματικού ρευστού:</b>                 |
| ✓ | Οι καθολικές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του    |
|   | Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του |
|   | Οι γραμμικές δυνάμεις συνήθως προέρχονται από δυναμικό        |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                       |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                             |

|   |                                                                                           |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Σε ένα πεδίο ροής ιδεατού ρευστού το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:</b> |
|   | Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος                       |
|   | Μεταβολή της θερμότητας στα όρια του συστήματος                                           |
| ✓ | Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος                           |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                                   |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                                         |

|   |                                       |
|---|---------------------------------------|
|   | <b>Η μέθοδος ανάλυσης κατά Euler:</b> |
|   | Εφαρμόζεται μόνο σε ιδεατά ρευστά     |
|   | Εφαρμόζεται μόνο σε πραγματικά ρευστά |
|   | Βασίζεται στις εξισώσεις Euler        |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω               |
| ✓ | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω     |

|   |                                                                                                                                 |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Στη μέθοδο ανάλυσης του σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς:</b>                                                              |
|   | Παρακολουθούμε μόνο τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται μέσα στον όγκο αυτό                          |
| ✓ | Παρακολουθούμε τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα στον όγκο αυτό |
|   | Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας $dm$ , το οποίο εισέρχεται ή εξέρχεται από τον όγκο αυτό          |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                                                                         |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                                                                               |

|   |                                                                          |
|---|--------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Η εξίσωση συνεχείας είναι διαφορική εξίσωση, η οποία:</b>             |
|   | Ισχύει μόνο για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας |
| ✓ | Εκφράζει την αρχή διατήρησης μάζας του ρευστού                           |
|   | Ισχύει μόνο για ιδεατά ρευστά                                            |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                  |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                        |

|   |                                                                                                  |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Οι εξισώσεις Navier – Stokes:</b>                                                             |
|   | Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας                             |
|   | Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας στο πεδίο βαρύτητας της γης |
|   | Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης                                            |
| ✓ | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                                          |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                                                |

|   |                                                       |
|---|-------------------------------------------------------|
|   | <b>Οι εξισώσεις Euler:</b>                            |
| ✓ | Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης |
|   | Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού     |
|   | Εφαρμόζονται μόνο στη μέθοδο ανάλυσης κατά Euler      |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                               |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                     |

|   |                                                                                     |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Σε παράλληλη ροή:</b>                                                            |
|   | Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους                                   |
|   | Η πίεση κατανέμεται υδροστατικά πάνω σε διατομές κάθετες προς τη διεύθυνση της ροής |
|   | Οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοούνται                                             |
| ✓ | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                             |
|   | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                                   |

|   |                                                                                         |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <b>Η ροή πραγματικού ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια σε έναν αγωγό κλειστής διατομής:</b> |
|   | Είναι δυνατό να προσεγγιστεί ως κλειστό σύστημα                                         |
|   | Είναι πάντοτε δυνατό να προσεγγιστεί ως έρπουσα                                         |
|   | Είναι δυνατό να επιλυθεί με τις εξισώσεις Euler                                         |
|   | Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω                                                                 |
| ✓ | ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω                                                       |

#### 4.4.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων  $\vec{V}(u, v)$  δίνονται από τις σχέσεις:  $u = \frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0$  και  $v = -\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0$ , όπου  $L$  και  $V_0$  είναι σταθερά μεγέθη μήκους και ταχύτητας αντιστοίχως.

Να εξεταστεί εάν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{L^2} \cdot V_0 \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{L^2} \cdot V_0$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \underline{\text{ικανοποιείται}}$$

#### 4.4.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων  $\vec{V}(u, v)$  δίνονται από τις σχέσεις:  $u = 4 \cdot x \cdot y + y^2$  και  $v = 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x$ .

Να εξεταστεί εάν οι παραπάνω τιμές είναι δυνατές για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot y \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = 6 \cdot x$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \rightarrow \text{δεν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας} \rightarrow \underline{\text{η ροή δεν είναι δυνατή}}$$