

4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Αναπτύσσονται **συνοπτικώς** οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής και οι αντίστοιχες γενικές διαφορικές εξισώσεις του πεδίου ροής. **Είναι απαραίτητη η εμβάθυνση σε έννοιες και σχετική ανάλυση με αξιοποίηση των διανεμομένων συγγραμμάτων.**

4.1 Βασικές έννοιες

4.1.1 Είδη δυνάμεων

- **Καθολικές:** Δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του θεωρούμενου ρευστού.
 - ο Επίδραση από απόσταση: **Βαρύτητα** ή αδρανειακές.
 - ο Ασκούνται στο κέντρο βάρους του ρευστού σωματιδίου.
 - ο Ανάλογες προς τη μάζα του ρευστού σωματιδίου (ή τον όγκο του).
 - ο Συνήθως εκφράζονται με την ανά μονάδα μάζας δύναμη, δηλαδή έχουν διαστάσεις επιτάχυνσης.
 - ο Συχνά τα πεδία καθολικών δυνάμεων προέρχονται από δυναμικό.
 - ο Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με κατακόρυφο προς τα πάνω άξονα z

$$f_x = 0, f_y = 0 \text{ και } f_z = -g \quad (35)$$

- **Επιφανειακές:** Ασκούνται στην επιφάνεια η οποία περιβάλλει το θεωρούμενο όγκο ρευστού από το γειτονικό - σε επαφή - ρευστό.
 - ο Θεωρούμε στοιχειώδη όγκο μορφής ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:
 - ο Σε κάθε έδρα ασκούνται κάθετες και εφαπτομενικές δυνάμεις, οι οποίες δίνουν ορθές (σ) και διατμητικές (τ) τάσεις.
 - ο Η εντατική κατάσταση σε σημείο ρευστού περιγράφεται πλήρως από έξι (6) τάσεις: τρεις (3) ορθές και τρεις (3) διατμητικές, όπως στη Μηχανική των Στερεών!..
- Οι Καθολικές και Επιφανειακές δυνάμεις αποτελούν **σημαντικές παραμέτρους** του Κεφαλαίου **5**. Θα τις υπολογίσουμε <εκεί> αξιοποιώντας τις μεθόδους 2.2.4 και 2.2.2 αντιστοίχως!
- **Γραμμικές:** Αποτέλεσμα του φαινομένου επιφανειακής τάσης.
 - ο Στα όρια μεταξύ υγρού – αερίου ή δύο μη μιγνυομένων υγρών
 - ο Δεν υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης, παρά μόνο ως οριακές συνθήκες.

4.1.2 Θεμελιώδεις νόμοι

- Αρχή **διατήρησης της μάζας**:
 - ο Σε ένα σύνολο ρευστών σωματιδίων - με στοιχειώδεις μάζες το καθένα - η συνολική τους μάζα παραμένει αναλλοίωτη κατά την κίνησή τους.

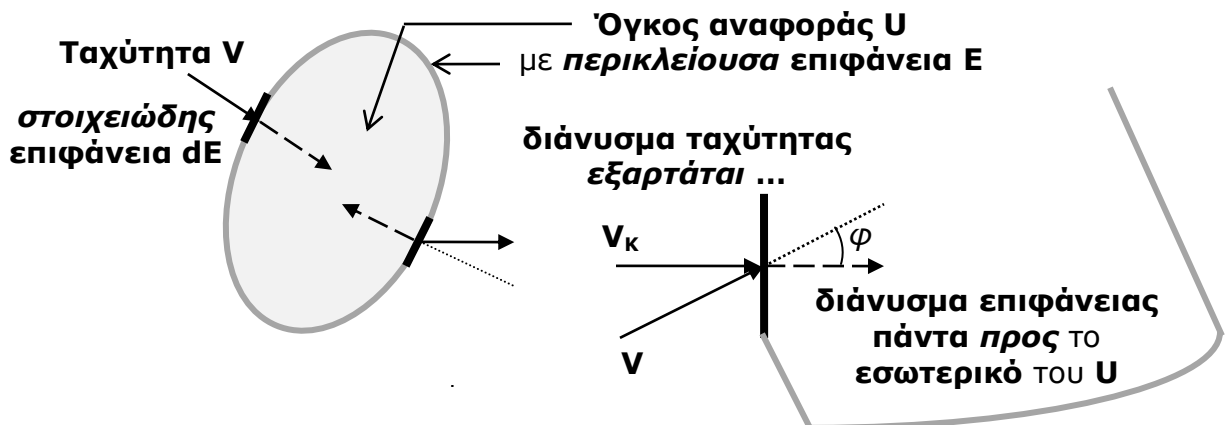
$$\int dm = \text{σταθ} \rightarrow \frac{D}{Dt} \int dm = 0 \quad (36)$$

- Στα **ομογενή** ρευστά συσχετίζονται οι μεταβολές πυκνότητας και ταχύτητας → **εξίσωση συνεχείας** (βλ. 4.2.2).
- Στα ανομοιογενή η αρχή αυτή ισχύει για το καθένα χωριστά.
- Θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** - Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:
 - Το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν σε ένα σύστημα μάζας ρευστού, ισούται με την ολική μεταβολή (παράγωγο) ως προς το χρόνο της ποσότητας κίνησης (ορμής) του συστήματος.
 - $$\vec{F} = \int \vec{\alpha} \cdot dm \rightarrow \vec{F} = \frac{D}{Dt} \int \vec{V} \cdot dm \quad (37)$$
 - Οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης, οι οποίες συνδέουν τα κινηματικά και τα δυναμικά χαρακτηριστικά της ροής → **εξίσωση ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.2.2).
- Αρχή **διατήρησης** της **ενέργειας**:
 - Η ενέργεια αποτελεί ιδιότητα του ρευστού (βλ. 3.1.1) και ορίζεται πλήρως από την κατάσταση του.
 - Η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος προκύπτει από τις μεταβολές:
 - Της θερμότητας: προστιθέμενη <+> / αφαιρούμενη <->
 - Του έργου: αποδιδόμενο <-> / προσλαμβάνόμενο <+>
 - $\pm \delta Q \mp \delta W = dE \quad (38)$
 - Το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:
 - Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
 - Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
 - Έργο μηχανικό που αποδίδεται από (υδροστρόβιλος), ή προσλαμβάνεται στο (αντλία) σύστημα, μέσω μηχανικού άξονα
 - Η **ενέργεια** του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί με την τιμή της ανά μονάδα μάζας και συνίσταται από **τρεις μορφές**:
 - **Δυναμική**, λόγω θέσης - υψομετρικής διαφοράς: $\varepsilon_s = g \cdot h$
 - **Κινητική**, λόγω ταχύτητας: $\varepsilon_k = \frac{V^2}{2}$
 - Εσωτερική, εξαρτώμενη από την τοπική θερμοκρασία: $\varepsilon_i = I$
 - $$(38) \rightarrow \pm \frac{\delta Q}{dt} \mp \frac{\delta W}{dt} = \frac{D}{Dt} \int \varepsilon \cdot dm = \frac{D}{Dt} \int \left(g \cdot h + \frac{V^2}{2} + I \right) \cdot dm \quad (39)$$
 - Στα ρευστά συσχετίζονται **πυκνότητα, πίεση, ταχύτητα, υψομετρική θέση, μηχανικό έργο**, θερμοκρασία, προστιθέμενη θερμότητα...
Στα <δικά μας> υγρά, τα οποία είναι πρακτικώς ασυμπιέστα και έχουν μεγάλη θερμοχωρητικότητα, η εξίσωση απλοποιείται → **εξίσωση ενέργειας** (βλ. 4.2.2).

4.2 Μέθοδοι ανάλυσης

4.2.1 Χαρακτηριστικά

- Τα παραπάνω συνδέονται ευκόλως με τη μέθοδο περιγραφής της κίνησης κατά Lagrange (βλ. 3.1.2).
Είναι όμως αναγκαίες κάποιες **προσαρμογές**, ώστε να συνδεθούν με την κανόνα χρησιμοποιούμενη στη ρευστομηχανική περιγραφή **κατά Euler** (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **ρευστού σωματιδίου**
 - Επιλέγουμε τυχόν σταθερό σημείο (x, y, z) .
 - Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας dm στη γειτονία του σημείου. Έτσι Περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της ροής.
 - Η μεταβολή κάθε ιδιότητας δίνεται από την ολική παράγωγο (βλ. 3.1.3).
- Μέθοδος του **σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς**
 - Επιλέγουμε και πάλι τυχόν **σταθερό σημείο** (x, y, z) .
 - Θεωρούμε διαφορικό όγκο αναφοράς dU **γύρω από το σημείο**.
 - Παρακολουθούμε – καταγράφουμε τις **μεταβολές** των **ιδιοτήτων** του ρευστού, οι οποίες **εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα** στον όγκο αυτό.
 - Για τη μέθοδο έχει ουσιώδη σημασία η έννοια της εισροής (και εκροής!)
- **Πεπερασμένος όγκος αναφοράς, εισροή – εκροή**
 - Θεωρούμε πεπερασμένο όγκο U και την επιφάνεια E , η οποία τον περικλείει. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες dE , των οποίων το **διάνυσμα** έχει **πάντοτε φορά** προς το **εσωτερικό του όγκου**!
 - Στις στοιχειώδεις επιφάνειες αντιστοιχούν ρευστά σωματίδια με ταχύτητα $\vec{V}$, των οποίων η κάθετη συνιστώσα σε κάθε dE είναι V_k .
Τα **διανύσματα ταχυτήτων** έχουν τη **φορά** της **κίνησης**, άρα:
 - Είτε προς το **εσωτερικό** του **όγκου** → **εισρέουν**
 - Είτε προς το **εξωτερικό** του **όγκου** → **εκρέουν**



- Κάθε **διάνυσμα** της **ταχύτητας** είναι φορέας – **όχημα ιδιοτήτων**!
 - Μεταφέρει Ιδιότητες: π.χ. μάζα, επιτάχυνση, ενέργεια, θερμοκρασία, ακτινοβολία, χρώμα
 - Αλλά και την **ιδιότητα ταχύτητα**!.. **Διακριτή** από το **όχημα ταχύτητα**!!.
 - Περισσότερα στο Κεφάλαιο **5**.
- Η εισροή ιδιότητας λ (ή, η εκροή = αρνητική εισροή) στον όγκο U διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dE είναι: $\lambda \cdot V_K \cdot dE$
 Και η ολική εισροή ιδιότητας λ στον όγκο **U** διαμέσου της επιφάνειας **E** είναι:

$$\int_E \lambda \cdot V_K \cdot dE = \int_E \lambda \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} \quad (40)$$
 - Όπου είναι $\vec{V} \cdot d\vec{E} > 0 \rightarrow$ **εισροή**
 - Όπου είναι $\vec{V} \cdot d\vec{E} < 0 \rightarrow$ **εκροή**
- Η διατύπωση των θεμελιωδών νόμων βασίζεται στο **ισοζύγιο** μεταξύ των **εισερχομένων, εξερχομένων** και **συσσωρευομένων** ποσοτήτων των διαφόρων **ιδιοτήτων** στον όγκο.
 - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Renault Mégane χρώματος μπλε **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:15 ένα αυτοκίνητο Porsche Cayenne χρώματος λευκού επίσης **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από τη δεξιά λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:17 ένα αυτοκίνητο Toyota Prius χρώματος πρασίνου **εισέρχεται** με σταθερή ταχύτητα (επιτάχυνση μηδενική) από την αριστερή λωρίδα στη διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη».
 - Στις 13:19 το Toyota Prius **ακινητοποιείται** επί της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:20 το Renault Mégane επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Παπάγο – Χολαργό στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:20 το Porsche Cayenne επιβραδύνει και **εξέρχεται** δεξιά προς Βύρωνα στην αντίστοιχη διασταύρωση της **Λεωφόρου**.
- Ανάλυση κατά Euler με χρήση πεπερασμένου όγκου αναφοράς του ως άνω σεναρίου οδικής κυκλοφορίας:
 - Μία επιφάνεια εισόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** αμέσως κατάντη της «πύλης Κατεχάκη». Περιλαμβάνει δύο λωρίδες.
 - Δύο επιφάνειες εξόδου: Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Παπάγο – Χολαργό + Διασταύρωση με τη **Λεωφόρο** προς Βύρωνα.
 - Ο **όγκος αναφοράς** ορίζεται από τις τρεις ως άνω **επιφάνειες** και τα οδικά **όρια** της **Λεωφόρου**.
 - Στις 13:15 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο αυτοκινήτων Renault και Porsche.
 - Στις 13:20 **εκρέουν** από τον όγκο αναφοράς οι ίδιες **ιδιότητες** με διαφορετικές ίσως τιμές, αλλά **πάλι** με **όχημα** την **ταχύτητα** των δύο παραπάνω αυτοκινήτων .

- Στις 13:17 **εισρέουν** στον όγκο αναφοράς διάφορες **ιδιότητες** με κάποιες τιμές και **όχημα** την **ταχύτητα** του ενός αυτοκινήτου Toyota.
- Στις 13:20 οι **ιδιότητες** του Toyota, με κάποιες τιμές, **έχουν συσσωρευθεί** στον όγκο αναφοράς διάφορες.

4.2.2 Εξίσωση Συνεχειας

- Είναι διαφορική εξίσωση, η οποία εκφράζει την **αρχή διατήρησης μάζας** του ρευστού (βλ. 4.1.2).
- Σε **σταθερό διαφορικό όγκο αναφοράς dU** (βλ. 4.2.1) μορφής ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με πλευρές **dx, dy, dz**, η (40) για την ιδιότητα μάζα είναι:

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dU) = \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E}$$

$$\circ \quad \text{Όπου: } \sum \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{E} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) \right] \cdot dU$$

$$\circ \quad \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

- Η (41) αποτελεί τη **γενική εξίσωση συνεχειας** και μπορεί να παραχθεί επίσης με τη μέθοδο του ρευστού σωματιδίου.

- Άλλες μορφές γραφής της (41) είναι:

$$\bullet \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (41\alpha)$$

$$\bullet \quad \frac{D\rho}{Dt} + \text{div}\vec{V} = 0 \quad (41\beta)$$

- Η παραπάνω γενική εξίσωση συνεχειας απλοποιείται υπό προϋποθέσεις:

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά (μόνιμη και μη μόνιμη ροή!):

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\vec{V} = 0 \quad (42)$$

$$\bullet \quad \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (42\alpha)$$

- Για **συμπιεστά** ρευστά και **μόνιμη** ροή: $\text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (43)$

4.2.3 Εξισώσεις Κίνησης

- Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού, οι οποίες εκφράζουν το θεώρημα της **ποσότητας κίνησης** (βλ. 4.1.2).
Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνεχείας) επιλύεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους.

- Για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** καταλήγουν στις εξισώσεις **Navier - Stokes**:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{f} - \text{grad}p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (44)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot f_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (45\alpha)$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot f_y - \frac{dp}{dy} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (45\beta)$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot f_z - \frac{dp}{dz} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (45\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ασυμπίεστα** ρευστά **σταθερής πυκνότητας** και **συνεκτικότητας** στο **πεδίο βαρύτητας** της **γης** οι εξισώσεις **Navier - Stokes** είναι:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (46)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (46\alpha)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (46\beta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (46\gamma)$$

- Ειδικότερα για **ιδεατά ρευστά**, όπου $\mu = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικώς και είναι γνωστές ως εξισώσεις **Euler**:

- $$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p + \gamma \cdot h) \quad (47)$$

- Ή, αναλυτικώς ανά διεύθυνση:

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (47\alpha)$$

- $$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (47\beta)$$

- $$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (47\gamma)$$

- Οι εξισώσεις Euler είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α' βαθμού. Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (τρεις κινήσεις + εξίσωση συνεχείας) επιλύεται με μαθηματικές μεθόδους!

4.3 Παρατηρήσεις για τις εξισώσεις συνέχειας και κίνησης

4.3.1 Ασυμπίεστα και ομογενή ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης

- Ισχύουν οι (42) και (46^α, β, γ) (βλ. 4.2.2 και 4.2.3).
 - Το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων έχει τέσσερις αγνώστους: τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας (**u, v, w**) και την πίεση **p**.
 - Η επίλυση είναι δυνατή εφ' όσον καθοριστούν:
 - Οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου επίλυσης
 - Οι αρχικές συνθήκες στην αρχή του χρόνου
 - Οριακές συνθήκες για την **ταχύτητα** είναι **κινηματικές** και φυσικές (βλ. 3.4)
 - Οριακές συνθήκες για την **πίεση** είναι π.χ. η ελεύθερη επιφάνεια, η οποία υπόκειται σε ατμοσφαιρική πίεση, ή όπου αλλού η πίεση στα όρια είναι γνωστή.
- Οι εξισώσεις **Navier – Stokes** είναι δυνατό να θεωρηθούν ως **εξισώσεις ισορροπίας** μεταξύ των (ανά μονάδα μάζας) **δυνάμεων**: **αδρανείας, βαρύτητας, πίεσης** και **συνεκτικότητας**.
Επομένως, ακόμη και σε **πραγματικά** ρευστά είναι δυνατό να **απλοποιηθούν**, όταν στο **φυσικό πρόβλημα, κάποια** από αυτές τις δυνάμεις είναι δυνατό να θεωρηθεί **αμελητέα**:

- **Παράλληλη ροή**

- ο Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους $\rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$
 - (42) $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow$ η $u = u(y, z, t)$ είναι αμετάβλητη κατά μήκος εκάστης γραμμής ροής.
 - (46α) $\rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma \cdot h) + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ (48α)
 - (46β) $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma \cdot h)$ (48β)
 - (46γ) $\rightarrow 0 = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma \cdot h)$ (48γ)
- ο Δηλαδή σε **παράλληλη** ροή, η **πίεση κατανέμεται υδροστατικά** πάνω σε **διατομές κάθετες** προς τη **διεύθυνση** της **ροής** ♪

- **Κλειστό Σύστημα**

- ο Η ροή περιβάλλεται από παντού από στερεά όρια, επομένως η γεωμετρία του πεδίου ροής **δεν μεταβάλλεται** από αυτή καθ' αυτή τη ροή.
- ο Είναι δυνατό να θεωρήσουμε, ότι η συνολική – πραγματική πίεση είναι άθροισμα δύο όρων:
 - **Στατική πίεση** p_s , η οποία θα υπήρχε ήδη σε κατάσταση ηρεμίας.
 - **(Υδρο)δυναμική πίεση** p_δ , η οποία οφείλεται αποκλειστικώς στην κίνηση.
- ο Σε **ασυμπίεστα ομογενή** ρευστά στο πεδίο **βαρύτητας** της **γης** απαλείφεται ο όρος της βαρύτητας και παραμένει μόνο η συνιστώσα της δυναμικής πίεσης:
 - (46) $\rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p_\delta + \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{V}$ (49)
 - Η περαιτέρω επίλυση του συστήματος είναι δυνατό να γίνει ως προς τη δυναμική πίεση, με την προϋπόθεση ότι και οι οριακές συνθήκες είναι δυνατό να εκφραστούν συναρτήσει αυτής.
 - Οι ως άνω προϋπόθεση ικανοποιείται σε συστήματα «ροής υπό πίεση» (σε κλειστούς αγωγούς), ενώ δεν ικανοποιείται σε συστήματα «ροής με ελεύθερη επιφάνεια» (σε ανοικτούς αγωγούς).

- **Έρπουσα ροή**

- ο Είναι σχετικώς **βραδεία**, δηλαδή οι όροι των **επιταχύνσεων** στις εξισώσεις Navier – Stokes είναι **πολύ μικρότερες** από τους όρους των **δυνάμεων συνεκτικότητας**, άρα είναι δυνατό (κατά προσέγγιση) να **αμεληθούν**:

$$(46) \rightarrow \text{grad}(p + \gamma \cdot h) = \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (50)$$

- ο Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η **ροή σε πορώδες έδαφος** (υπόγεια ύδατα).

- **Ιδεατά ρευστά – Οριακό στρώμα**

- ο Στα **ιδεατά** ρευστά ($\mu = 0$) οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοποιούνται ως εξισώσεις **Euler** (βλ. 4.2.3).
 - Σε προβλήματα όπου οι όροι **συνεκτικότητας** στις εξισώσεις Navier – Stokes έχουν **μικρό μέγεθος** σε σύγκριση με τους άλλους όρους, η **θεωρία** των **ιδεατών ρευστών** (βλ. Κεφάλαιο 7) είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα**. Σε άλλα προβλήματα όχι...
 - Ακόμη και στην περίπτωση όπου η **συνεκτικότητα δεν** είναι δυνατό να **αμεληθεί γενικώς**, η θεωρία των **ιδεατών ρευστών** είναι **δυνατό** να οδηγήσει σε **ικανοποιητικά αποτελέσματα** σε **τμήμα** του **πεδίου** ροής: **Μακριά** από τα **στερεά όρια**, όπου η **φυσική οριακή συνθήκη** (βλ. 3.4.3), δηλαδή η επιρροή των διατμητικών τάσεων **δεν** είναι **σημαντική** ♪
- ο **Κοντά** στα **στερεά όρια**, η **επιρροή** των **διατμητικών τάσεων** (οσοδήποτε μικρή και αν είναι η συνεκτικότητα...) είναι **πάντοτε σημαντική**, διότι εκεί αναπτύσσονται **μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων**.
 - Στο **στερεό όριο** η **ταχύτητα** είναι **μηδενική** (βλ. 3.4.4).
 - **Λίγο πιο μακριά** από το όριο η **ταχύτητα** έχει **μη μηδενική** τιμή!
 - Η **μεταβολή** - κλίση της **ταχύτητας** έχει **πολύ μεγάλη τιμή** (θεωρητικώς **άπειρη**), οπότε το **γινόμενο** της ακόμη και με **πολύ μικρή** τιμή **συνεκτικότητας** έχει **μη μηδενική** τιμή και **δεν αμελείται**!
- ο Η ανάλυση (βλ. Κεφάλαια 9 και 12) γίνεται με **διαφορετικές μεθόδους** σε **δύο περιοχές** του **πεδίου** ροής:
 - **Κοντά** στα **στερεά όρια** → **εντός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας** **δεν** αμελούνται.
 - **Μακριά** από τα **στερεά όρια** → **εκτός** του **οριακού στρώματος**, οι όροι **συνεκτικότητας** **αμελούνται**.

4.4 Ερωτήσεις κατανόησης και Εφαρμογές υπολογισμού

4.4.1 (μία μόνο απάντηση είναι ορθή)

	Σε ένα πεδίο ροής πραγματικού ρευστού:
✓	Οι καθολικές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του
	Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν σε όλα τα ρευστά σωματίδια του
	Οι γραμμικές δυνάμεις συνήθως προέρχονται από δυναμικό
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε ένα πεδίο ροής ιδεατού ρευστού το ισοζύγιο έργου με το περιβάλλον περιλαμβάνει:
	Έργο διατμητικών τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
	Μεταβολή της θερμότητας στα όρια του συστήματος
✓	Έργο καθέτων τάσεων, οι οποίες ενεργούν στα όρια του συστήματος
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η μέθοδος ανάλυσης κατά Euler:
	Εφαρμόζεται μόνο σε ιδεατά ρευστά
	Εφαρμόζεται μόνο σε πραγματικά ρευστά
	Βασίζεται στις εξισώσεις Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Στη μέθοδο ανάλυσης του σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς:
	Παρακολουθούμε μόνο τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται μέσα στον όγκο αυτό
✓	Παρακολουθούμε τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού, οι οποίες εισέρχονται, εξέρχονται ή συγκεντρώνονται μέσα στον όγκο αυτό
	Παρακολουθούμε την κίνηση ρευστού σωματιδίου απειροστής μάζας dm , το οποίο εισέρχεται ή εξέρχεται από τον όγκο αυτό
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η εξίσωση συνεχείας είναι διαφορική εξίσωση, η οποία:
	Ισχύει μόνο για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας
✓	Εκφράζει την αρχή διατήρησης μάζας του ρευστού
	Ισχύει μόνο για ιδεατά ρευστά
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι εξισώσεις Navier – Stokes:
	Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας
	Ισχύουν για ασυμπίεστα ρευστά σταθερής πυκνότητας και συνεκτικότητας στο πεδίο βαρύτητας της γης
	Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Οι εξισώσεις Euler:
✓	Ισχύουν για ιδεατά ρευστά στο πεδίο βαρύτητας της γης
	Είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις β' βαθμού
	Εφαρμόζονται μόνο στη μέθοδο ανάλυσης κατά Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Σε παράλληλη ροή:
	Οι γραμμές ροής είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους
	Η πίεση κατανέμεται υδροστατικά πάνω σε διατομές κάθετες προς τη διεύθυνση της ροής
	Οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοιοούνται
✓	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

	Η ροή πραγματικού ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια σε έναν αγωγό κλειστής διατομής:
	Είναι δυνατό να προσεγγιστεί ως κλειστό σύστημα
	Είναι πάντοτε δυνατό να προσεγγιστεί ως έρπουσα
	Είναι δυνατό να επιλυθεί με τις εξισώσεις Euler
	Ισχύουν ΟΛΑ τα παραπάνω
✓	ΔΕΝ ισχύει ΤΙΠΟΤΑ από τα παραπάνω

4.4.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ δίνονται από τις σχέσεις: $u = \frac{x^2}{2 \cdot L^2} \cdot V_0$ και $v = -\frac{x \cdot y}{L^2} \cdot V_0$, όπου L και V_0 είναι σταθερά μεγέθη μήκους και ταχύτητας αντιστοίχως.

Να εξεταστεί εάν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{L^2} \cdot V_0 \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{L^2} \cdot V_0$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \underline{\text{ικανοποιείται}}$$

4.4.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 4.2.2

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός δισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων $\vec{V}(u, v)$ δίνονται από τις σχέσεις: $u = 4 \cdot x \cdot y + y^2$ και $v = 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x$.

Να εξεταστεί εάν οι παραπάνω τιμές είναι δυνατές για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

$$\text{Υπολογίζουμε: } \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot y \text{ και } \frac{\partial v}{\partial y} = 6 \cdot x$$

$$(42) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \rightarrow \text{δεν ικανοποιείται η εξίσωση συνεχείας} \rightarrow \underline{\text{η ροή δεν είναι δυνατή}}$$