• <u>Γραμμική κατανομή πυκνότητας:</u>

$\rho(z)=\rho_0+\lambda\cdot z$

Για $z=h$ έχουμε $\rho_h=\rho_0+\lambda\cdot h \Leftrightarrow \lambda h=\rho_h-\rho_0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{\rho_h-\rho_0}{h}$

Άρα $\rho(z)=\rho_0+\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot z$

• <u>Ειδικό βάρος:</u> $\gamma(z)=\rho(z)\cdot g=g\left(\rho_0+\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot z\right)$

• <u>Πιέσεις:</u> $dp=\gamma(z)dz \Rightarrow \int_0^z dp=\int_0^z \gamma(z)dz \Leftrightarrow p(z)-\cancelto{0}{p(0)}=\int_0^z g\left(\rho_0+\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot z\right)dz \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p(z)=\left[g\cdot\rho_0\cdot z+g\,\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\,\frac{z^2}{2}\right]_0^z \Rightarrow p(z)=g\cdot\rho_0\cdot z+g\,\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^2}{2}$$

• <u>Δυνάμεις:</u> $dF=p(z)\cdot dE$

Έστω ότι εξετάζουμε πλάτος $b$ κάθετα στο σχήμα

(για μοναδιαίο πλάτος, $b=1$)

$$dF=p(z)\cdot b\cdot dz \Rightarrow \int_0^z dF=\int_0^z p(z)\cdot b\cdot dz \Rightarrow F(z)-\cancelto{0}{F(0)}=b\cdot\int_0^z\left(g\cdot\rho_0\cdot z+g\,\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^2}{2}\right)dz \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(z)=b\left[g\cdot\rho_0\cdot\frac{z^2}{2}+g\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^3}{6}\right]_0^z \Rightarrow F(z)=b\left(g\cdot\rho_0\cdot\frac{z^2}{2}+g\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^3}{6}\right)$$

↳ στη συνέχεια θεωρούμε $b=1$

• <u>Σημείο εφαρμογής της $F$</u> (για $z=h$): Στο κέντρο βάρους της παραβολής των πιέσεων

Το Κ.Β υπολογίζεται από τη σχέση:

$$z_c=\frac{\int_0^h z\cdot p(z)\cdot dz}{\underbrace{\int_0^h p(z)dz}_{F(h)}}=\frac{\int_0^h z\left(g\cdot\rho_0\cdot z+g\,\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^2}{2}\right)dz}{g\cdot\rho_0\cdot\frac{h^2}{2}+g\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{h^3}{6}}=\frac{\cancel{g}\cdot\rho_0\cdot\frac{h^3}{3}+\cancel{g}\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{h^4}{8}}{\cancel{g}\cdot\rho_0\cdot\frac{h^2}{2}+\cancel{g}\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{h^3}{6}}=$$

$$=\frac{\rho_0\cdot\frac{h^3}{3}+(\rho_h-\rho_0)\cdot\frac{h^3}{8}}{\rho_0\cdot\frac{h^2}{2}+(\rho_h-\rho_0)\cdot\frac{h^2}{6}}=h\,\frac{\frac{\rho_0}{3}+\frac{\rho_h}{8}-\frac{\rho_0}{8}}{\frac{\rho_0}{2}+\frac{\rho_h}{6}-\frac{\rho_0}{6}}=h\,\frac{\frac{5\rho_0}{24}+\frac{3\rho_h}{24}}{\frac{2\rho_0}{6}+\frac{\rho_h}{6}}=\frac{h}{4}\,\frac{5\rho_0+3\rho_h}{2\rho_0+\rho_h}$$

• <u>Μοχλοβραχίονας:</u> η δύναμη ασκείται στη θέση $(h-d)$ από τον πυθμένα

$$F(h)=g\cdot\rho_0\cdot\frac{h^2}{2}+g\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{h^3}{6}=g\cdot\rho_0\cdot\frac{h^2}{2}+g\cdot(\rho_h-\rho_0)\cdot\frac{h^2}{6}=\frac{g\,h^2}{6}(3\rho_0+\rho_h-\rho_0)=\frac{gh^2}{6}(2\rho_0+\rho_h)$$

$$h-d=h-\frac{h}{4}\,\frac{5\rho_0+3\rho_h}{2\rho_0+\rho_h}=h\left(\frac{8\rho_0+4\rho_h-5\rho_0-3\rho_h}{8\rho_0+4\rho_h}\right)=h\,\frac{3\rho_0+\rho_h}{8\rho_0+4\rho_h}=\frac{h}{4}\cdot\frac{3\rho_0+\rho_h}{2\rho_0+\rho_h}$$

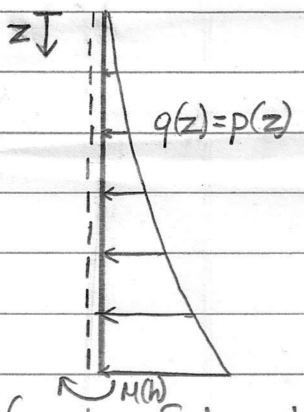
$$M=F(h)\cdot(h-d)=\frac{gh^2}{6}\cancel{(2\rho_0+\rho_h)}\cdot\frac{h}{4}\cdot\frac{3\rho_0+\rho_h}{\cancel{2\rho_0+\rho_h}}=\frac{gh^3}{24}(3\rho_0+\rho_h)$$

Εναλλακτικά:

Από τη στατική ☺ γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$Q(z) = \int_0^z -q(z)\,dz$

$M(z) = \int_0^z Q(z)\,dz$




Θεωρώντας το διπλανό φορέα, παρατηρούμε ότι $q(z)=p(z)$, άρα $Q(z)=\int_0^z -p(z)\,dz = -\int_0^z p(z)\,dz = -F(z)$ (για μοναδιαίο πλάτος)

Συνεπώς $M(h)=\int_0^h Q(z)\,dz = \int_0^h -F(z)\,dz = -\int_0^h F(z)\,dz =$

$$= -\int_0^h \left(g\cdot\rho_0\cdot\frac{z^2}{2} + g\cdot\frac{\rho_h-\rho_0}{h}\cdot\frac{z^3}{6}\right)dz = -\left(g\cdot\rho_0\cdot\frac{h^3}{6} + g\cdot(\rho_h-\rho_0)\cdot\frac{h^3}{24}\right) = -\frac{gh^3}{24}(3\rho_0+\rho_h)$$

Αρνητικό πρόσημο => θλίβει τις ίνες του σχήματος.