

2.4 Κατάσταση οριακής ισορροπίας

2.4.1 Γενικά

- Θεωρούμε κατάσταση **οριακής ισορροπίας** ή **οριακής ευστάθειας**, όταν ένας φορέας δέχεται δράσεις των οποίων διαφορική – ελάχιστη μεταβολή προκαλεί ολική – σημαντική μεταβολή της θέσης του φορέα.
- Αναλόγως των **συνθηκών στήριξης** του φορέα, αυτός **μετατοπίζεται – ολισθαίνει**, ή **περιστρέφεται – ανατρέπεται...**
- Σε οιαδήποτε περίπτωση - προκειμένου περί υγρών - συνήθως **αναιρείται η στεγανότητα** και συνεπώς η **υδροστατική** - με την έννοια απουσίας ροής - κατάσταση!

2.4.2 Επισημάνσεις

- Οι **συνθήκες οριακής ισορροπίας**, **αναλόγως** των **συνθηκών στήριξης** του φορέα, μεταφράζονται σε:
 - Ισορροπία – εξίσωση **δυνάμεων ευσταθείας** και **ολίσθησης**
 - Ισορροπία – εξίσωση **ροπών ευσταθείας** και **ανατροπής**
- Οι ως άνω εξισώσεις δυνάμεων ή ροπών είναι πιθανό να περιλαμβάνουν **συντελεστές ασφαλείας**, μετατρεπόμενες σε ανισότητες και αντίστοιχες απαιτήσεις: π.χ. $M_{\text{ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ}} / M_{\text{ΑΝΑΤΡΟΠΗΣ}} = \text{συντελεστής σε ΑΝΑΤΡΟΠΗ} > 1$
- Είναι **προφανές**, ότι στη περίπτωση αμφιέρειστων φορέων:
 - Η **αντίδραση** στην **απλή στήριξη** (κύλιση) μηδενίζεται
 - Η **συνολική δύναμη** από τις δράσεις διέρχεται από την **άρθρωση** – σημείο περιστροφής
- Επισημαίνεται ότι, στους υδραυλικούς **φορείς – μηχανισμούς** οι απλές στήριξεις (κυλίσεις) συνήθως προβλέπονται, ώστε να λειτουργούν μόνο με αντιδράσεις σε θλίψη → εφελκυστική δύναμη στη στήριξη συνεπάγεται άρση της στεγανότητας.
- Για την επίλυση προβλημάτων οριακής ισορροπίας ακολουθούμε τις ως ανωτέρω κατευθύνσεις – μεθόδους επίλυσης (βλ. **2.2**) και λαμβάνουμε υπόψη τις ιδιαιτερότητες δράσεων και συγκεκριμένου φορέα.
- Στην επίλυση προβλημάτων οριακής ισορροπίας εμφανίζονται συχνά τριτοβάθμιες εξισώσεις. Ο προσδιορισμός των ριζών τους απαιτεί ανάκληση γνώσεων από το πεδίο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
- Στα προβλήματα οριακής ισορροπίας οι **αποδεκτές λύσεις** (πραγματικές και θετικές) περιορίζονται σε **μία**, ή και **καμία**! Η **επιλογή** της **κατάλληλης** και η **απόρριψη** των **υπολοίπων**, ή και **όλων**! βασίζεται στις **συνθήκες – δεσμεύσεις** του συγκεκριμένου προβλήματος καθώς και στην ορθή κρίση και αντίληψη...
Κατά τούτο άλλωστε διαφοροποιείται ο **Σπουδαστής – Μηχανικός** από *Μαθητευόμενο Chef* με *όραμα* απασχόλησης σε *reality shows*...

2.4.3 Μαθηματική λύση συνήθως αποκαλούμενη *Gardano*

- $A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$
- Σημείωση: Είναι προφανές ότι, εάν όλοι οι σταθεροί συντελεστές είναι θετικοί, **δεν** υπάρχει **θετική ρίζα**, άρα και οριακή ισορροπία!..
- Θέτουμε: $p = -\left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^2 + \frac{C}{3 \cdot A}$ και $q = \left(\frac{B}{3 \cdot A}\right)^3 - \frac{B \cdot C}{6 \cdot A^2} + \frac{D}{2 \cdot A}$
- Υπολογίζουμε τον όρο: $\Delta = q^2 + p^3$
- Εάν $\Delta < 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές**:
- Υπολογίζουμε τον όρο: ϕ , λογιστικό μέγεθος γωνίας με $\cos \phi = -\frac{q}{|p|^{3/2}}$
 - $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
 - $x_2 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} + 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
 - $x_3 = \left[-2 \cdot |p|^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3} - 60^\circ\right) \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$
- Εάν $\Delta = 0 \rightarrow$ **τρεις** ρίζες **πραγματικές** (η μία διπλή):
 - $x_1 = \left[2 \cdot |p|^{1/2} \right] - \frac{B}{3 \cdot A}$ και $x_2 = x_3 = -|p|^{1/2} - \frac{B}{3 \cdot A}$
- Εάν $\Delta > 0 \rightarrow$ **μία** ρίζα **πραγματική**: x_1 (και δύο μιγαδικές συζυγείς)
 - $x_1 = \left(-q + \Delta^{1/2} \right)^{1/3} + \left(-q - \Delta^{1/2} \right)^{1/3}$

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	D	p	q	Δ

COS φ	φ	x ₁	x ₂	x ₃

x ₁	x _{2,3}

u	v	x ₁

- Υπενθυμίζεται και η μαθηματική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

- $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$

- Υπολογίζουμε τον όρο: $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$

- Εάν $\Delta \geq 0 \rightarrow$ **δύο** ρίζες **πραγματικές:** x_1 και x_2

- $x_1 = \frac{-B + \Delta^{1/2}}{2 \cdot A}$

- $x_2 = \frac{-B - \Delta^{1/2}}{2 \cdot A}$

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	Δ	x ₁	x ₂

2.4.4 Αριθμητική επίλυση (με διαδοχικές προσεγγίσεις – τύπου *Newton Rahpson*)

- $A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$

- Μετασχηματίζουμε: $x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ (16)

Όπου: $b = \frac{B}{A}, c = \frac{C}{A}, d = \frac{D}{A}$

- Σημείωση 1: Υπενθυμίζεται ότι, εάν όλοι οι σταθεροί συντελεστές είναι θετικοί, **δεν** υπάρχει **θετική ρίζα**, άρα και οριακή ισορροπία!..

- Επαναληπτική σχέση: $x_{v+1} = x_v - \frac{x_v^3 + b \cdot x_v^2 + c \cdot x_v + d}{3 \cdot x_v^2 + 2 \cdot b \cdot x_v + c}$ (17)

- Επιλέγουμε την 1^η τιμή εκκίνησης **x_1 αμελώντας δύο όρους** με βάση τις παρακάτω οδηγίες.

Σημείωση 2: Η διαδικασία συχνά διευκολύνεται, διότι σε πολλές περιπτώσεις ο ένας εκ των δύο σταθερών συντελεστών **b** ή **c** έχει μηδενική τιμή, οπότε αμελούμε έναν επιπλέον όρο...

- ο **Αμελούμε** τους δύο όρους με **θετικό b, c ή d**
- ο **Αμελούμε** το **θετικό** όρο και τον πιθανολογούμενο μικρότερο αρνητικό όρο (εάν δύο είναι αρνητικοί)
- ο **Αμελούμε** τους δύο πιθανολογούμενους μικρότερους αρνητικούς όρους (εάν και οι τρεις είναι αρνητικοί)
- ο Προκύπτει μία από τις εξής 1^{ες} τιμές εκκίνησης **x_1** : $|b|, |c|^{1/2}, |d|^{1/3}$

- Ελέγχουμε, ώστε $3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot b \cdot x_1 + c \neq 0$, ούτε καν κοντά στο 0

- Εφαρμόζουμε τη (17), έως ότου το **δεύτερο δεκαδικό** ψηφίο δύο διαδοχικών τιμών **ταυτιστεί**.

- Είναι απαραίτητος ο έλεγχος συμβατότητας της ρίζας μετά το πέρας της επίλυσης!

- Τυποποίηση διαδικασίας:

A	B	C	D	b	c	d

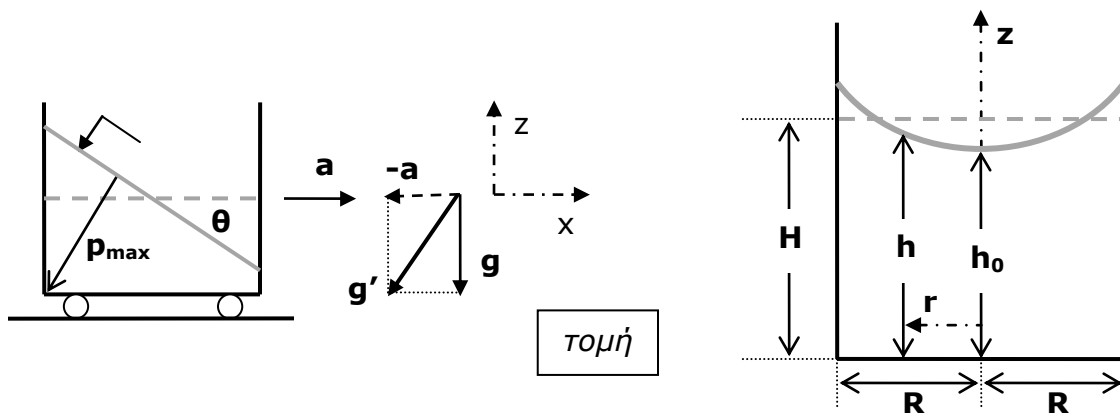
x_1	x_2	x_3	x_4

Η μέθοδος θα γίνει περισσότερο κατανοητή στις εφαρμογές υπολογισμού (βλ. **2.6**)

2.5 Ειδικά θέματα

2.5.1 Γενίκευση της Έννοιας της Ισορροπίας Ρευστών

- Οι αρχές της υδροστατικής μπορούν να εφαρμοστούν και σε ρευστά τα οποία κινούνται ως στερεά σώματα – χωρίς δηλαδή παραμόρφωση σχήματος κατά την κίνησή τους.
- Τούτο συμβαίνει εις την περίπτωση υγρού το οποίο περιέχεται σε δοχείο κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση $\mathbf{a}$.
 - Η μελέτη του προβλήματος βασίζεται στην θεώρηση υποθετικού πεδίου βαρύτητας, το οποίο περιλαμβάνει και την αντίθετη – αδρανειακή επιτάχυνση αυτής με την οποία κινείται το δοχείο, άρα και το υγρό
 - Η επιφάνεια του υγρού είναι κάθετη στην επιτάχυνση $\mathbf{g'}$ του υποθετικού πεδίου και σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια (απουσία επιτάχυνσης)
 - $\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{g}$ (18) και $\tan \theta = \frac{a}{g}$ (19)



- Τούτο επίσης συμβαίνει εις την περίπτωση υγρού με αρχικό βάθος H , το οποίο περιέχεται σε κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R , το οποίο περιστρέφεται (περί τον κατακόρυφο άξονα του) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

- Το βάθος στον άξονα είναι: $h_0 = H - \frac{(\omega \cdot R)^2}{4 \cdot g}$ (20)

- Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι: $h = h_0 + \frac{(\omega \cdot r)^2}{2 \cdot g}$ (21)

και έχει σχήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής.

2.5.2 Όργανα μέτρησης

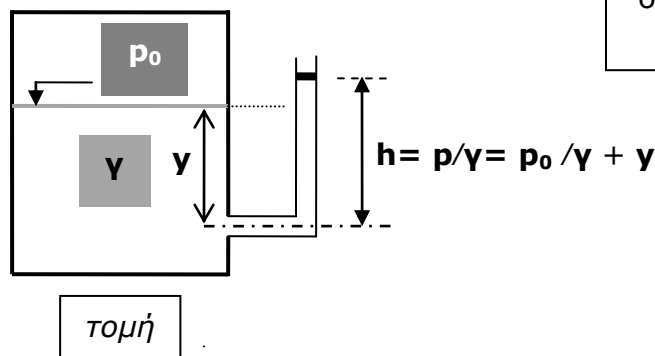
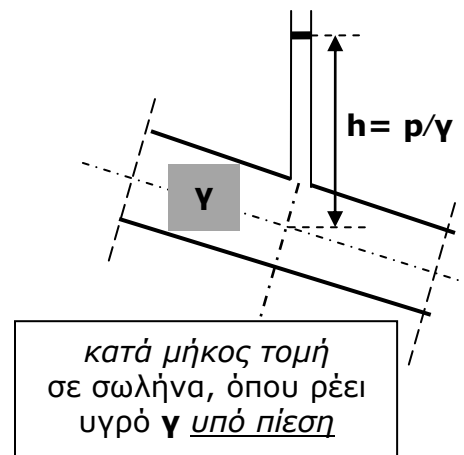
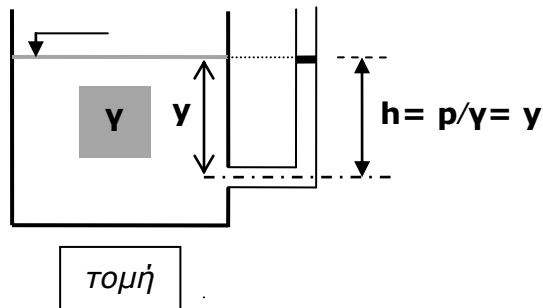
- Παρουσιάζονται εδώ τα δύο όργανα, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση **πιέσεων** ή **διαφορών πιέσεων**.

Σε επόμενα κεφάλαια θα παρουσιαστούν και άλλα όργανα υδραυλικών μετρήσεων, αλλά θα επανέλθουμε και στις χρήσεις των δύο οργάνων του παρόντος εδαφίου σε εφαρμογές, οι οποίες τότε θα είναι κατανοητές (πιέσεις υγρών σε κίνηση).

- **Απλό Πιεζόμετρο**

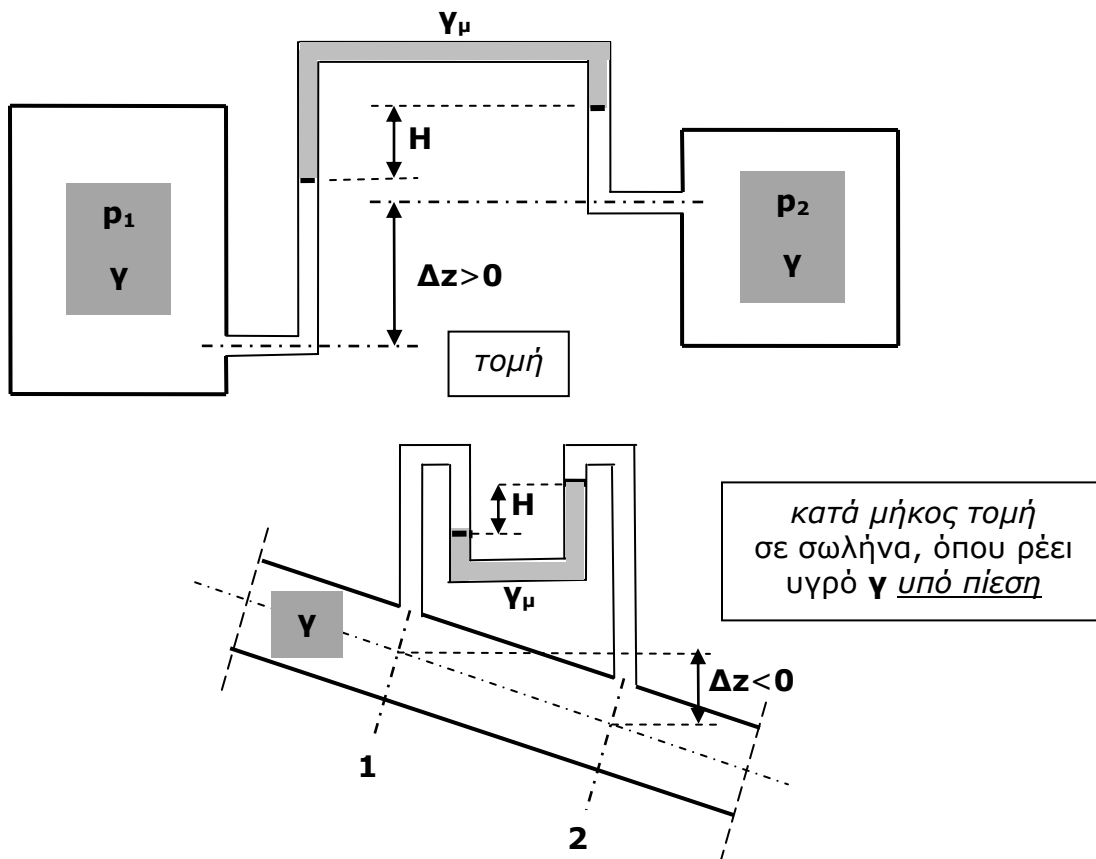
- Σε ένα σημείο δοχείου γεμάτου με υγρό, ή σε μια διατομή αγωγού, όπου ρέει υγρό υπό πίεση, η **πίεση** είναι δυνατό να μετρηθεί με τη χρήση ανοιχτού σωληνίσκου (μικρής διαμέτρου και συνήθως κατακόρυφου)
- Στην ελεύθερη επιφάνεια του σωληνίσκου η πίεση είναι ατμοσφαιρική και Το όργανο αποτελεί ευθεία εφαρμογή της σχέσης (2), (βλ. 2.1.1)
- Ο όρος: **p / γ** έχει διαστάσεις μήκους και ονομάζεται **ύψος πίεσης**

- $$h = \frac{p}{\gamma} \quad (22)$$



• Διαφορικό Μανόμετρο

- Μεταξύ δύο δοχείων που περιέχουν διαφορετικά υγρά, ή μεταξύ δύο διατομών αγωγού, όπου ρέει υγρό υπό πίεση, η **διαφορά** της **πίεσης** είναι δυνατό να μετρηθεί με τη χρήση διάταξης κλειστών σωληνίσκων (μικρής διαμέτρου και συνήθως κατακόρυφων)
- Η διάταξη των σωληνίσκων περιέχει υγρό διαφορετικό - μεγαλύτερης πυκνότητας και μη μιννυόμενο με τα υπόλοιπα. Το όργανο αποτελεί σύνθετη εφαρμογή της σχέσης (2). Συνήθη (☹ τοξικά!..) υγρά του μανομέτρου είναι:
 - Τετραχλωράνθρακας: $\gamma_{\mu} = 1,60 \text{ t/m}^3$
 - Υδράργυρος: $\gamma_{\mu} = 13,60 \text{ t/m}^3$
- Ο όρος: p / γ έχει διαστάσεις μήκους και ονομάζεται **ύψος πίεσης**
- $$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_{\mu}}{\gamma} - 1 \right) \cdot H + \Delta z \quad (23)$$
 Προσοχή το Δz είναι προσημασμένο ☹
- Η στάθμη του υγρού στο μανόμετρο σηματοδοτεί ποια πίεση είναι μεγαλύτερη!
 - Στο παρακάτω σχήμα στα δοχεία είναι: $p_1 < p_2$ και $\Delta z > 0$
 - Στο παρακάτω σχήμα στο σωλήνα είναι: $p_1 > p_2$ και $\Delta z < 0$



2.6 Εφαρμογές υπολογισμού

2.6.1 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στα 2.2.3 και 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ABOA** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο B είναι 90° .

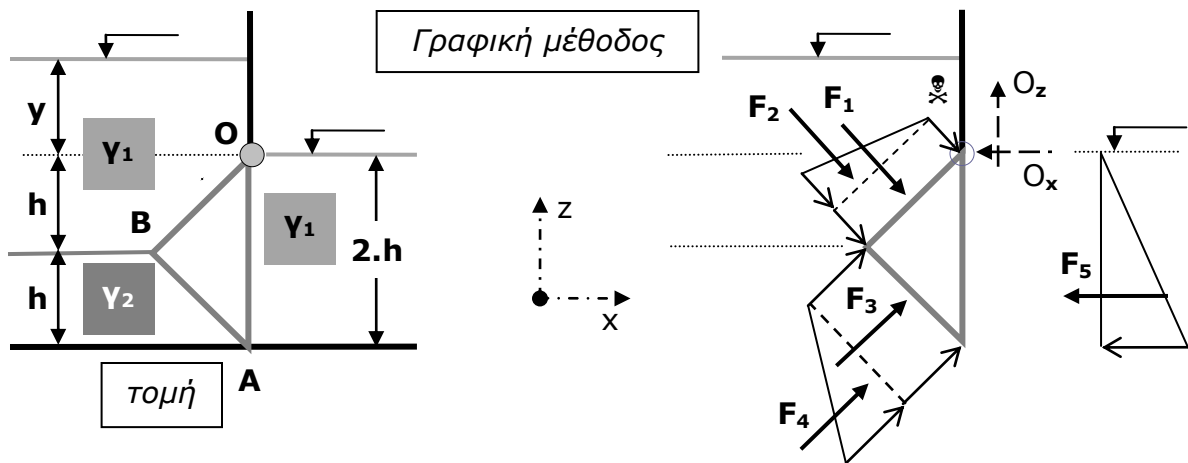
Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **O**, απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **A** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y+h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το βάθος **$y > 0$** , ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα, σημείο εφαρμογής)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .



Αξιοποιούμε τη μεθοδολογία επίλυσης της 2.3.9

Τα μήκη των πλευρών AB και BO είναι: $\sqrt{2} \cdot h$

$$F_1 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot y \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot (y + h) \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

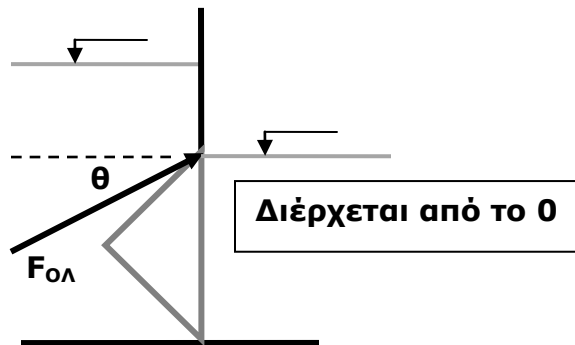
Λόγω της συνθήκης οριακής ισορροπίας η **A_x μηδενίζεται!**

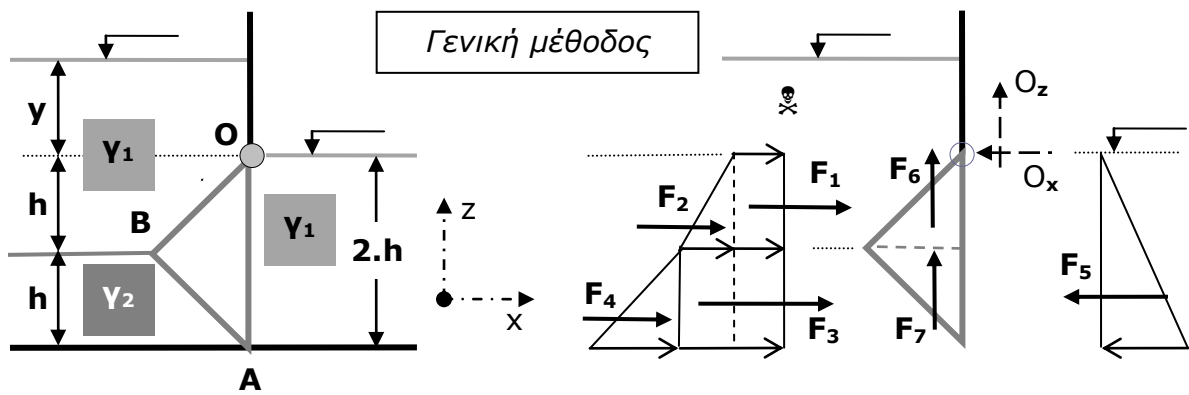
$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - M_{OF5} = 0 \rightarrow (2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2) \cdot y - \left[\frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{3} \cdot h^3 \right] = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{6 \cdot \gamma_1} \cdot h \rightarrow \mathbf{y = 1,3 \text{ m}}$$

$$F_{O\Lambda} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \mathbf{F_{O\Lambda} = 37,251 \text{ t} = 365,430 \text{ kN}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} \rightarrow \tan \theta = \mathbf{0,588785} \rightarrow \mathbf{\theta = 30,489^\circ}$$





Αξιοποιούμε τη μεθοδολογία επίλυσης της 2.3.9

$$F_1 = \gamma_1 \cdot y \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{h}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \gamma_1 \cdot (y + h) \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{5 \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF6} = \frac{h}{3}$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF7} = \frac{h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^4 M_{OFi} - \sum_5^7 M_{OFi} = 0$$

Επισημάνση 1: Η άσκηση (όπως και η 2.3.9) είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με τις δύο κατευθύνσεις – μεθόδους και είναι **εμφανέστατη η υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

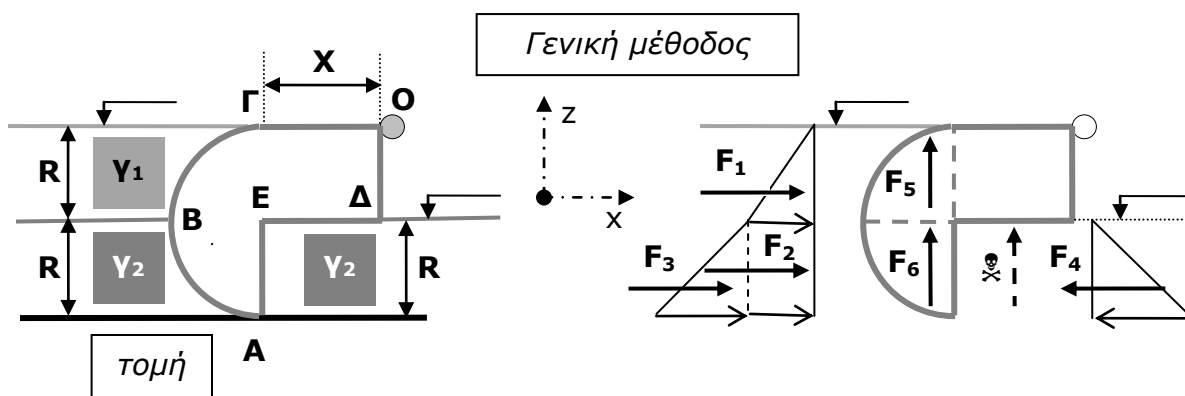
2.6.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΓΟΔΕΑ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει *σύνθετη* διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **R** + ορθογώνιο με πλευρές **X** και **R**, στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο**, απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **Α** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **R** και και ειδικά βάρη **γ₁** και **γ₂**. Κατάντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **R** και ειδικό βάρος **γ₂** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης – η διάσταση **X**, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά.

Αριθμητική εφαρμογή: **γ₁ = 1,00 t/m³**, **γ₂ = 1,05 t/m³**, **R = 1,4 m**.



Επισημάνση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$F_2 = \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{3 \cdot R}{2}$$

$$F_3 = F_4 \text{ αλληλοαναιρούνται! } \text{♪}$$

$$F_5 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_1 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} + X$$

$$F_6 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF6} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} + X$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \sum_1^2 M_{OFi} - \sum_5^6 M_{OFi} = 0$$

$$\rightarrow X = \frac{2 \cdot (9 \cdot \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2)}{3 \cdot \pi \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot R \rightarrow \mathbf{X = 1,00 \text{ m.}}$$

2.6.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει σύνθετη διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **h** + κατακόρυφο τμήμα.

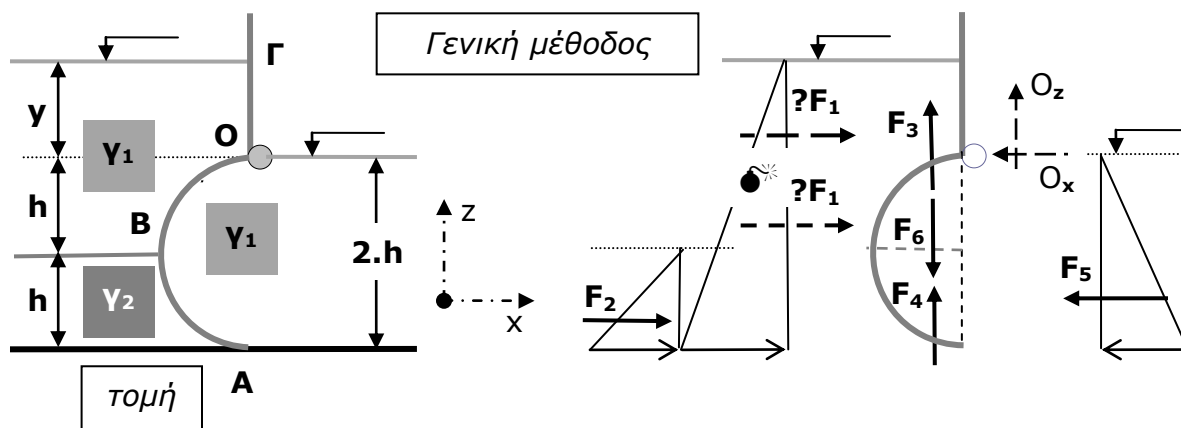
Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα , απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **A** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα.

Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y+h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατάντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το βάθος **$y > 0$** , ώστε η ισορροπία του θυροφράγματος να είναι οριακή.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα, σημείο εφαρμογής)

Αριθμητική εφαρμογή: **$h = 1,5$ m, $b = 8$ m, $\gamma_1 = 1,00$ t/m³, $\gamma_2 = 1,10$ t/m³.**



Επισήμανση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

Επισήμανση 2: Η χρήση του εναλλακτικού τρόπου εγκυμονεί <εδώ> **κίνδυνο**:

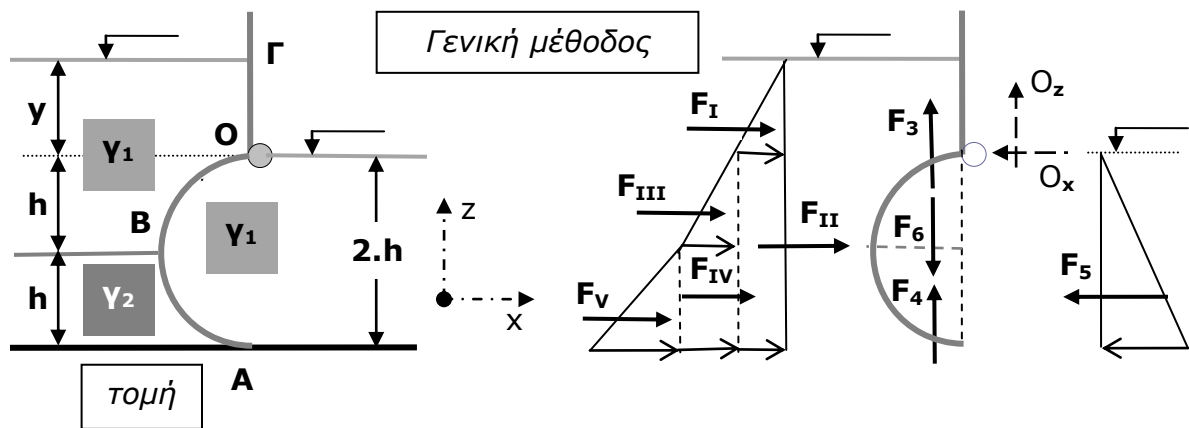
Με άγνωστο το **y** δεν είναι δεδομένη η σχετική θέση της δύναμης **F_1** ως προς το **O** ☹️
Άρα και το πρόσημο της ροπής της!

Επομένως πρέπει να θεωρήσουμε δύο διακριτά πεδία, όπου θα αναζητήσουμε ρίζες και είναι απαραίτητος ο έλεγχος συμβατότητας μετά το πέρας της επίλυσης!

Γενικώς σε περιπτώσεις **ασαφούς γεωμετρίας** δεν προτείνεται η χρήση του εναλλακτικού τρόπου ☹️

Εδώ, θα είχαμε το πεδίο $5 \cdot h > y > 0$ και το πεδίο $y \geq 5 \cdot h$

Θα προτιμήσουμε τον κλασικό τρόπο, με μερική αξιοποίηση της μεθοδολογίας επίλυσης της 2.3.10



$$F_I = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot y^2 \cdot b \text{ και } e_{OFI} = \frac{y}{3}$$

$$F_{II} = 2 \cdot \gamma_1 \cdot y \cdot h \cdot b \text{ και } e_{OFII} = h$$

$$F_{III} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OFIII} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_{IV} = \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OFIV} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$F_V = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OFV} = \frac{5 \cdot h}{3}$$

$$F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_4 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{\pi}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OFI} - \sum_{II} M_{OFi} + \sum_3 M_{OFi} - M_{OF6} = 0$$

$$\rightarrow y^3 - (12 \cdot h^2) \cdot y - \left[3 \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) \cdot h^3 \right] = 0$$

$$\rightarrow y^3 - 27 \cdot y - 1,0125 = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3

A	B	C	D	p	q	Δ
1	0	-27	-1,01250	-9,000000	-0,506250	-728,743711 < 0

cos φ	φ	γ ₁	γ ₂	γ ₃
0,018750	88,925641	5,214802	-0,037502	-5,177300

→ **y = 5,215 m**

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: $y^3 - 27 \cdot y - 1,0125 = 0$

a	b	c	d
1	0	-27	-1,01250

$$(17) \rightarrow y_{v+1} = y_v - \frac{y_v^3 - 27 \cdot y_v - 1,0125}{3 \cdot y_v^2 - 27}$$

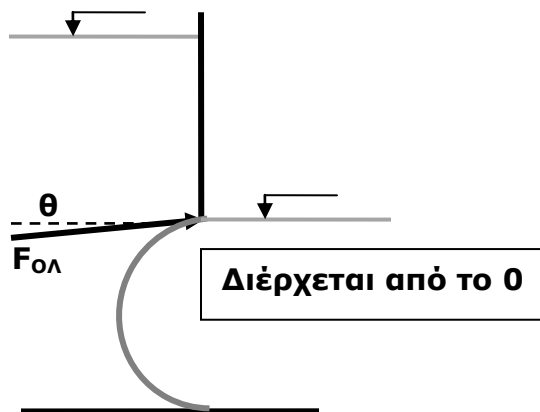
Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το <-1,0125> → $y_1 = \sqrt[3]{27}$

γ ₁	γ ₂	γ ₃
5,196152	5,214902	5,214802 ✓

→ **y = 5,215 m**

$$F_{o\lambda} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} \rightarrow F_{o\lambda} = 234,836 \text{ t} = 2.303,745 \text{ kN}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} \rightarrow \tan \theta = 0,006020 \rightarrow \theta = 0,345^\circ \text{ (σχεδόν οριζόντια)}$$



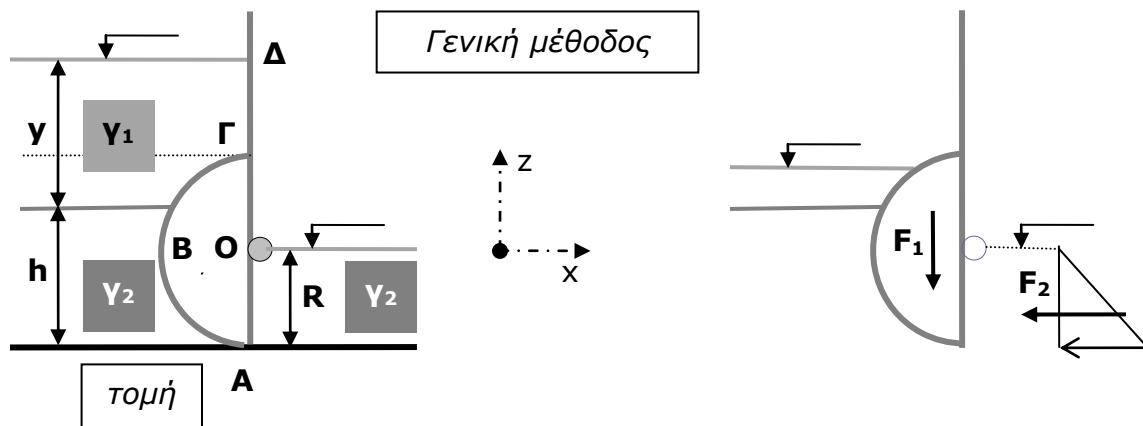
2.6.4 Η εφαρμογή αναφέρεται στο **2.4** (και στο 2.2.4)

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΓΔΓΟΑ**, κατασκευασμένο από φύλλα υλικού βάρους **w** σε t/m^2 , σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει σύνθετη διατομή: ημικύκλιο με ακτίνα **R** + κατακόρυφο τμήμα, στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο** (στο κέντρο του ημικυκλίου), απλώς ακουμπάει στον οριζόντιο άξονα **Α** και είναι δυνατό να περιστραφεί μόνο δεξιόστροφα. Το τμήμα ΑΒΓ είναι κατασκευασμένο από φύλλα υλικού βάρους **w** (σε t/m^2), ενώ το τμήμα ΑΟΓΔ από φύλλα αβαρή. Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **y** και **h=1,5.R** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **R** και ειδικό βάρος **γ_2** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Το ελάχιστο βάρος **$w_{\min}$** (σε t/m^2) των φύλλων του υλικού, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά για **$y \leq 0,5.R$** .
2. Το βάθος **y**, ώστε το θυρόφραγμα να ισορροπεί οριακά για δεδομένο **w** και **$y > 0,5.R$**

Αριθμητική εφαρμογή: **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** , **$R = 1,0 \text{ m}$** , **$w = 0,775 \text{ t/m}^2$**



Επισήμανση 1: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)

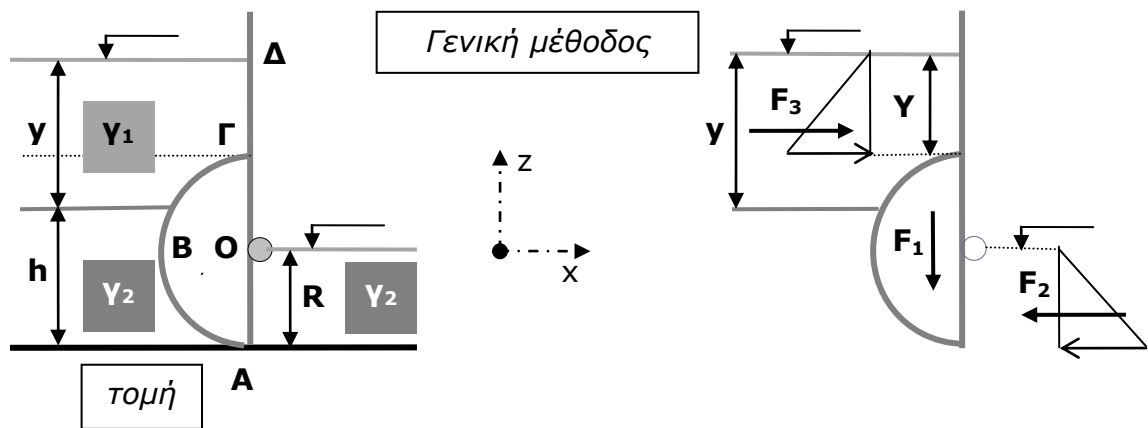
Επισήμανση 2: Τα υγρά τα οποία **βρέχουν** την επιφάνεια **ΑΒΓ**, **ΔΕΝ** συμμετέχουν στην ισορροπία, η συνολική **δύναμη** από πιέσεις **διέρχεται από το Ο** ♪

Περίπτωση 1:

$$F_1 = w_{\min} \cdot \pi \cdot R \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} = 0 \rightarrow w_{\min} = \frac{\gamma_2}{4} \cdot R \rightarrow w_{\min} = 0,275 \text{ t/m}^2$$



Περίπτωση 2:

$$F_1 = w \cdot \pi \cdot R \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot R^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot R}{3}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot Y^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{Y}{3} + R, \text{ όπου: } Y = y - \frac{R}{2}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M_{OF1} - M_{OF2} - M_{OF3} = 0$$

$$\rightarrow \gamma_1 \cdot Y^3 + 3 \cdot \gamma_1 \cdot R \cdot Y^2 - [2 \cdot (4 \cdot w - \gamma_2 \cdot R) \cdot R^2] = 0$$

$$\rightarrow Y^3 + 3 \cdot Y^2 - 4 = 0$$

Εφαρμόζουμε τη μαθηματική λύση 2.4.3

A	B	C	D	p	q	Δ
1	3	0	-4	-1,000000	-1,000000	0,00

X ₁	X _{2,3}
1,000	-2,000

$$\rightarrow Y = 1,000 \text{ m} \rightarrow y = \mathbf{1,500 \text{ m.}}$$

Εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση 2.4.4

$$\text{Δεν απαιτείται μετασχηματισμός: } Y^3 + 3 \cdot Y^2 - 4 = 0$$

a	b	c	d
1	3	0	-4

$$(17) \rightarrow Y_{v+1} = Y_v - \frac{Y_v^3 + 3 \cdot Y_v^2 - 4}{3 \cdot Y_v^2 + 6 \cdot Y_v}$$

Για τη 1^η τιμή εκκίνησης: **αμελούμε** το $<+3.Y^2> \rightarrow Y_1 = \sqrt{4}$

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
2,000000	1,583333	1,143275	1,011970	1,000094 ✓

$\rightarrow Y = 1,000 \text{ m} \rightarrow y = 1,500 \text{ m}$.

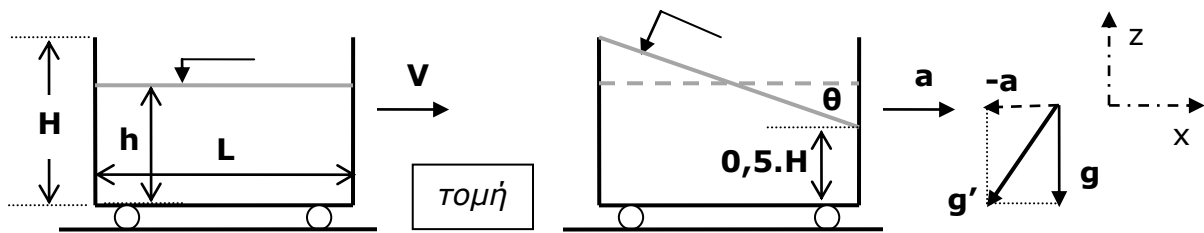
Επισήμανση 3: Τα υγρά τα οποία **βρέχουν** την επιφάνεια **ΑΒΓ**, δεν συμμετέχουν μεν στην ισορροπία, **συμμετέχουν** όμως στον **υπολογισμό** της **συνολικής δύναμης** από πιέσεις $\otimes$ (και της κλίσης της), η οποία βεβαίως **διέρχεται από το Ο**.

2.6.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Ένα ανοιχτό *όχημα* με πλάτος **b**, ύψος **H** και μήκος **L=2.H** περιέχει υγρό πυκνότητας **ρ** με βάθος **h=0,75.H** και κινείται με σταθερή ταχύτητα **V** σε οριζόντιο επίπεδο (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής επιτάχυνσης **a**, η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο *όχημα*, ώστε το υγρό να μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H= 1,6 m**, **b= 2 m**, **ρ= 1.050 kgr / m³**.



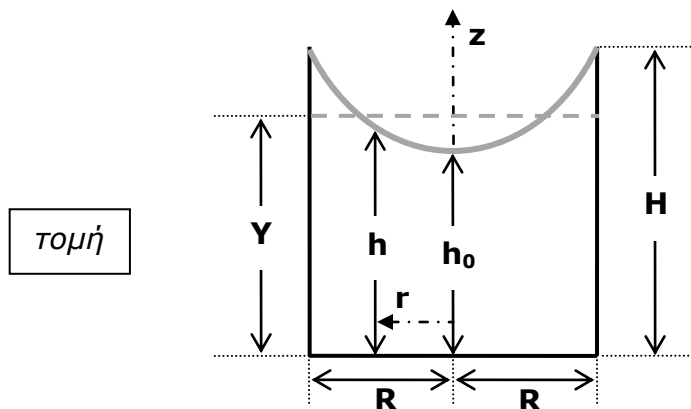
$$(19) \rightarrow a = g \cdot \tan \theta = g \cdot \frac{H}{2 \cdot H} = \frac{g \cdot H}{2} \rightarrow a = 7,848 \text{ m / s}^2$$

2.6.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.5.1

Κυλινδρικό δοχείο, με βάση κύκλο ακτίνας **R** και συνολικό ύψος **H**, βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και το περιεχόμενο νερό φθάνει σε ύψος **Y = 0,75.H** (βλ. σχήμα). Στη συνέχεια το δοχείο τίθεται σε περιστροφική γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κίνηση, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της σταθερής γωνιακής ταχύτητας **ω** , η οποία είναι δυνατό να εφαρμοσθεί στο δοχείο, ώστε το νερό να μη μην υπερχειλίσει.

Αριθμητική εφαρμογή: **H = 1,6 m, R = 2 m, $\rho = 1.000 \text{ kgr} / \text{m}^3$.**



$$(20) \rightarrow h_0 = Y - \frac{(\omega \cdot R)^2}{4 \cdot g} \text{ και } (21) \rightarrow H = h_0 + \frac{(\omega \cdot R)^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{(g \cdot H)^{1/2}}{R} \rightarrow \omega = 1,981 \text{ s}^{-1}$$