

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αριθμητικοί τύποι ολοκλήρωσης είναι προσεγγιστικοί τύποι και χρησιμοποιούνται γενικά όταν δεν είναι δυνατή η ακριβής ολοκλήρωση με αναλυτικές μεθόδους, πράγμα που ισχύει κατά κανόνα. Ακόμα και όταν ο ακριβής τύπος είναι γνωστός, μπορεί να είναι υπολογιστικά ακατάλληλος. Για παράδειγμα, στον τύπο

$$\int_0^1 \frac{dx}{5-x^2} = \left[\frac{1}{5^{1/3}6} \ln \frac{5^{1/3} + 5^{1/3}x + x^2}{(5^{1/3} - x)^2} + \frac{1}{5^{2/3}3^{1/2}} \tan^{-1} \left(\frac{2x + 5^{1/3}}{5^{1/3}3^{1/2}} \right) \right]_0^1,$$

για την κάθε συνάρτηση που εμφανίζεται, ο Υπολογιστής χρησιμοποιεί κάποιο ανάπτυγμά της σε σειρά, με ένα μεγάλο πεπερασμένο αριθμό όρων.

Οι αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης έχουν εφαρμογές στις συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις, στις ολοκληρωτικές εξισώσεις, στον υπολογισμό πολλαπλών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων κλπ.

Στις μεθόδους αυτές, προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης με το εύκολα υπολογίσιμο ολοκλήρωμα κάποιου πολυνύμου παρεμβολής της (π.χ. Lagrange ή Hermite), είτε σε ολόκληρο το διάστημα ολοκλήρωσης (απλοί τύποι), είτε κατά διαστήματα (σύνθετοι τύποι). Εξετάζουμε τη σύγκλιση των τύπων αυτών όταν ο αριθμός των σημείων, ή “κόμβων”, τείνει στο άπειρο, καθώς και την ταχύτητα σύγκλισης μέσω εκτιμήσεων σφάλματος. Τέλος, η αναζήτηση μιας κατανομής κόμβων με βέλτιστη ακρίβεια μας οδηγεί στη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss, η οποία αποτελεί μια από τις πλέον αποτελεσματικές και συχνά χρησιμοποιούμενες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

1. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ LAGRANGE

A. ΑΠΛΟΙ ΤΥΠΟΙ – ΤΥΠΟΙ NEWTON-COTES

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$, $x_0, \dots, x_n$ ($n \geq 0$) $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[a, b]$, που καλούνται **κόμβοι**, και p_n το αντίστοιχο πολυνύμο παρεμβολής Lagrange. Θέτοντας $f_i := f(x_i)$, έχουμε (βλ. Κεφ. 3, §1)

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i + e_n(x),$$

όπου l_i , $i = 0, \dots, n$, τα βασικά πολυνύμα Lagrange και $e_n(x)$ το σφάλμα παρεμβολής για κάθε x . Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή, βρίσκουμε το γενικό **τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης Lagrange**

$$(1\alpha) \quad \int_a^b f(x) dx = I_n(f) + E_n(f),$$

όπου

$$(1\beta) \quad I_n(f) = \sum_{i=0}^n C_i f_i, \quad \text{με} \quad C_i = \int_a^b l_i(x) dx \quad (\text{συντελεστές}),$$

το **αριθμητικό ολοκλήρωμα**, και

$$(1\gamma) \quad E_n(f) = \int_a^b e_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx,$$

το σφάλμα ολοκλήρωσης.

Θα υποθέσουμε από εδώ και στο εξής ότι τα σημεία x_i είναι ισαπέχοντα, με $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Στην περίπτωση αυτή, οι αντίστοιχοι τύποι ολοκλήρωσης, για $n = 0, 1, 2, \dots$, καλούνται τύποι **Newton-Cotes**. Αποδεικνύεται τότε (μέσω ολοκλήρωσης κατά μέρη και ενός θεωρήματος Μέσου Όρου για ολοκλήρωμα) ότι:

- για n μονό

$$E_n(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} \int_0^n \prod_{i=0}^n (x-i) dx, \quad \text{για κάποιο σταθερό } \mu \in [a, b],$$

- για n ζυγό

$$E_n(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\mu)}{(n+2)!} \int_0^n x \prod_{i=0}^n (x-i) dx, \quad \text{για κάποιο σταθερό } \mu \in [a, b].$$

Τύπος Τραπεζίου (n=1).

Για $n = 1$, ας υπολογίσουμε τους συντελεστές του τύπου ολοκλήρωσης και το σφάλμα ολοκλήρωσης. Έχουμε

$$C_0 = \int_0^h l_0(x) dx = \int_0^h \frac{x-x_1}{x_0-x_1} dx = \int_0^h \frac{x-h}{-h} dx = \frac{h}{2},$$

$$C_1 = \int_0^h l_1(x) dx = \int_0^h \frac{x-x_0}{x_1-x_0} dx = \int_0^h \frac{x}{h} dx = \frac{h}{2},$$

και

$$E_1(f) = \frac{h^3 f''(\mu)}{2} \int_0^1 (x-0)(x-1) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\mu),$$

άρα ο **τύπος Τραπεζίου** γράφεται

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\mu), \quad \text{με } \mu \in [x_0, x_1].$$

Τύπος Simpson (n=2).

Για $n = 2$, υπολογίζουμε

$$C_0 = \int_0^{2h} l_0(x) dx = \int_0^{2h} \frac{(x-h)(x-2h)}{(0-h)(0-2h)} dx = \frac{h}{3},$$

$$C_1 = \int_0^{2h} l_1(x) dx = \int_0^{2h} \frac{(x-0)(x-2h)}{(h-0)(h-2h)} dx = \frac{4h}{3},$$

$$C_2 = \int_0^{2h} l_2(x) dx = \int_0^{2h} \frac{(x-0)(x-h)}{(2h-0)(2h-h)} dx = \frac{h}{3},$$

$$E_2(f) = \frac{h^5 f^{(4)}(\mu)}{4!} \int_0^2 x(x-0)(x-1)(x-2) dx = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu),$$

οπότε ο **τύπος Simpson** γράφεται

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu), \quad \text{με } \mu \in [x_0, x_2].$$

Τύπος των Τριών Ογδών (n=3).

Παρόμοια, για $n = 3$, παίρνουμε τον **τύπο των Τριών Ογδών**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\mu), \quad \mu \in [x_0, x_3].$$

Ο τύπος Simpson έχει την ίδια τάξη σφάλματος (h^5) με τον τύπο των Τριών Ογδών, είναι όμως απλούστερος, γι' αυτό και προτιμάται στην πράξη.

B. ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ ΚΑΙ SIMPSON

Όπως και στην παρεμβολή, για να επιτύχουμε καλή προσέγγιση, η αριθμητική ολοκλήρωση εφαρμόζεται κατά τμήματα. Προκύπτουν τότε οι σύνθετοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Σύνθετος Τύπος Τραπεζίου.

Έστω $x_0, \dots, x_M$ $M+1$ ισαπέχοντα σημεία, με $x_k - x_{k-1} = h$, $k=1, \dots, M$, $x_0 = a$, $x_M = b$. Εφαρμόζοντας σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, \dots, M$, τον απλό τύπο Τραπεζίου, βρίσκουμε το **σύνθετο τύπο Τραπεζίου**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^M \frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k) - \sum_{k=1}^M \frac{h^3}{12} f''(\mu_k) \\ &= h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{M-1} + \frac{1}{2}f_M\right) - \sum_{k=1}^M \frac{h^3}{12} f''(\mu_k), \quad \mu_k \in [x_{k-1}, x_k], \end{aligned}$$

και την **εκτίμηση σφάλματος**

$$|E_T(f)| \leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^M |f''(\mu_k)| \leq \frac{h^3}{12} N \|f''\|_{\infty} = \frac{h^2}{12} (b-a) \|f''\|_{\infty}.$$

Σύνθετος Τύπος Simpson.

Έστω $x_0, \dots, x_N$ $N+1$ ισαπέχοντα σημεία, με $N = 2M$, $x_i - x_{i-1} = h$, $i=1, \dots, N$, $x_0 = a$, $x_N = b$. Εφαρμόζοντας σε κάθε διάστημα $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k=1, \dots, M$, τον απλό τύπο Simpson, παίρνουμε το **σύνθετο τύπο Simpson**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^M \frac{h}{3}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) - \sum_{k=1}^M \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu_k) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{N-1} + f_N) - \sum_{k=1}^M \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu_k), \quad \mu_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}], \end{aligned}$$

και την **εκτίμηση σφάλματος**

$$|E_S(f)| \leq \frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^M |f^{(4)}(\mu_k)| \leq \frac{h^5}{90} M \|f^{(4)}\|_{\infty} \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

N	I_T	I_S
4	2.918	2.478
8	2.659	2.573
16	2.6505	2.6477
32	2.65135	2.651627
64	2.65156	2.6516353
128	2.651617	2.6516353

Πίνακας 1

Παράδειγμα. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-4}^4 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους σύνθετους τύπους Τραπεζίου και Simpson για $N = 2^i$, $i = 2, \dots, 7$, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.

Αλγόριθμος της μεθόδου Τραπεζίου.

Ορίζουμε τη συνάρτηση f

Διαβάζουμε τα a, b, N

$$h = (b - a) / N$$

$$T = (f(a) + f(b)) / 2$$

$$x = a$$

Για $i = 1, \dots, N - 1$ εκτελούμε μέχρι το 1

$$x = x + h$$

1 $T = T + f(x)$

$$T = hT$$

Εκτυπώνουμε το T

Σταματάμε

Αλγόριθμος της μεθόδου Simpson.

Ορίζουμε τη συνάρτηση f

Διαβάζουμε τα a, b, N (ζυγό)

$$h = (b - a) / N$$

$$h_2 = 2h$$

$$M = N / 2$$

$$S = f(a) + f(b)$$

$$S_4 = 0$$

$$x = a + h$$

Για $k = 1, \dots, M$ εκτελούμε μέχρι το 1

$$S_4 = S_4 + f(x)$$

1 $x = x + h_2$

$$x = a + h_2$$

$$S_2 = 0$$

Για $k = 1, \dots, M - 1$ εκτελούμε μέχρι το 2

$$S_2 = S_2 + f(x)$$

2 $x = x + h_2$

$$S = (S + 4S_4 + 2S_2)h / 3$$

Εκτυπώνουμε το S

Σταματάμε