

2. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

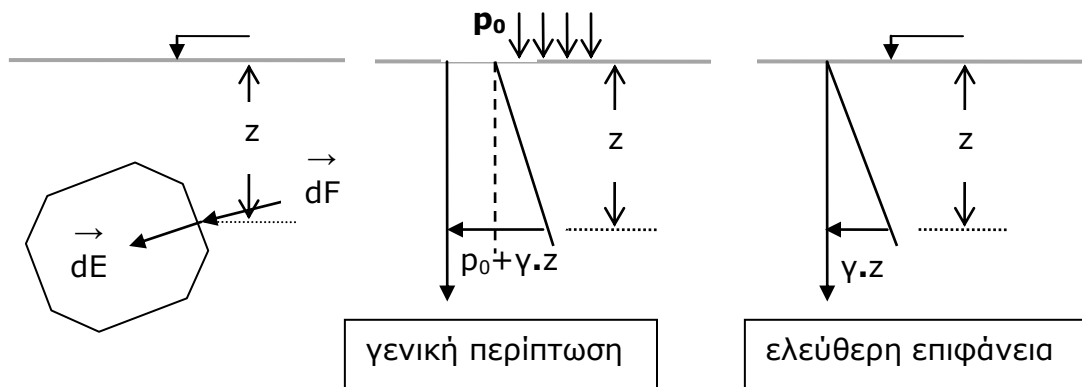
Η Υδροστατική αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ της Μηχανικής των Ρευστών και της Μηχανικής των Στερεών. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες οι οποίες αφορούν σε ασυμπίεστα ρευστά. Δίδονται πληροφορίες για την ιδιαίτερη μορφή των δράσεων από ρευστά πάνω σε στερεούς φορείς, των οποίων η επίλυση ακολουθεί στη συνέχεια ήδη γνωστές μεθόδους, οι οποίες εξειδικεύονται, ώστε να διευκολύνεται η επίλυση, συνδυάζοντας την ιδιαίτερη μορφή των δράσεων με ιδιαίτερες μορφές στερεών φορέων.

Τεκμηριώνεται θεωρητικά η λειτουργία οργάνων μέτρησης, των οποίων η χρήση αναδεικνύεται σε επόμενα κεφάλαια.

2.1 Βασικές έννοιες

2.1.1 Ομογενές ασυμπίεστο υγρό

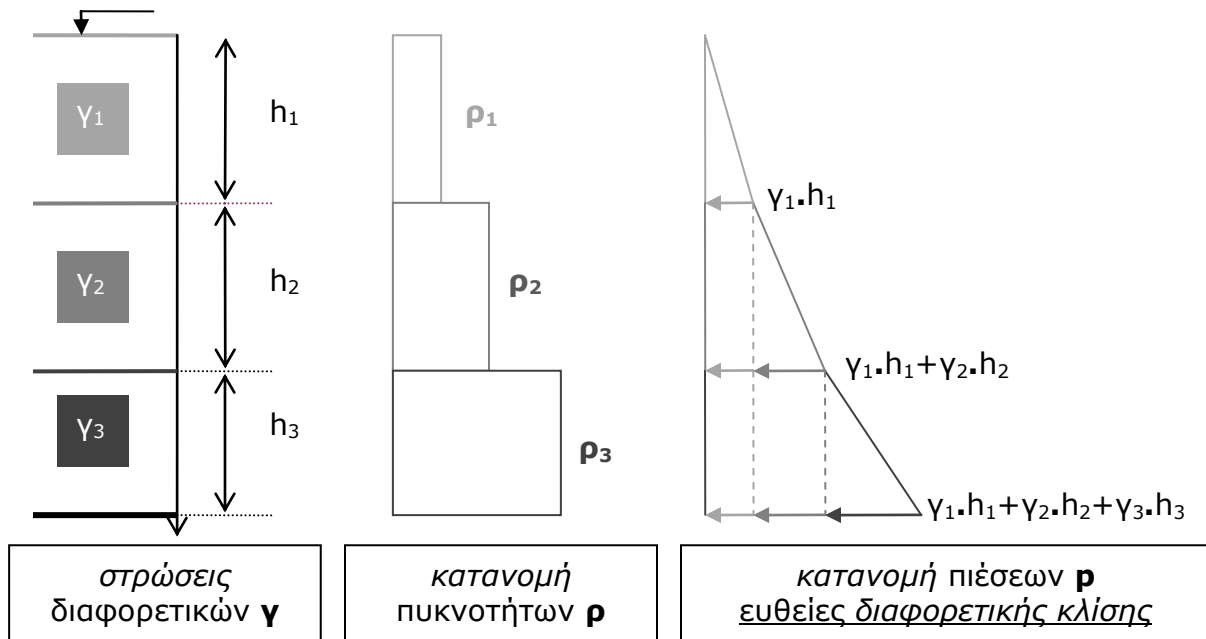
- Η επιφάνεια ενός σώματος βυθισμένου σε ομογενές υγρό, το οποίο ηρεμεί, δέχεται **δυνάμεις**, οι οποίες προέρχονται από **υδροστατικές πιέσεις**.
- Σε ένα διαφορικό στοιχείο επιφάνειας dE η δύναμη είναι dF και ενεργεί κατά την διεύθυνση του διανύσματος της επιφάνειας: **προς το εσωτερικό του σώματος**.



- $\gamma = \rho \cdot g$ (1) και $p_z = p_0 + \gamma \cdot z$ (2)
- $d\vec{F} = p_z \cdot d\vec{E} = (p_0 + \gamma \cdot z) \cdot d\vec{E}$ (3) και $\vec{F} = \int d\vec{F}$ (4)
 - **p**: συνολική (απόλυτη) πίεση
 - **p₀**: υπερκείμενη πίεση (στην επιφάνεια του υγρού)
 - **ρ**: πυκνότητα του ομογενούς υγρού (σταθερή, ανεξάρτητη του βάθους)
 - **γ**: ειδικό βάρος του ομογενούς υγρού (σταθερό, ανεξάρτητο του βάθους)
 - **z**: βάθος (κατακόρυφο) του στοιχείου dE από την επιφάνεια
 - **F**: συνολική δύναμη από υδροστατική πίεση
- Εάν το υγρό έχει **ελεύθερη επιφάνεια**, τότε **p₀** είναι η **ατμοσφαιρική πίεση** την οποία συνήθως λαμβάνουμε ως **πίεση αναφοράς**, δηλαδή συμβατικά η τιμή της είναι **μηδέν**.

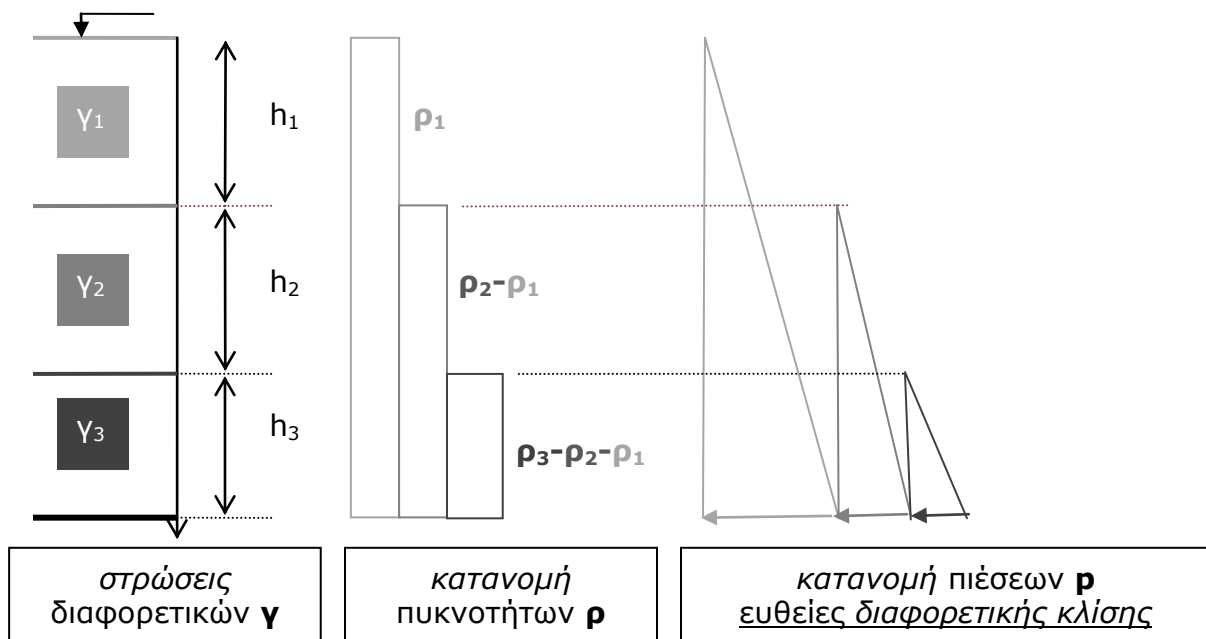
2.1.2 Μη ομογενές ασυμπίεστο υγρό

- **Διακριτές στρώσεις με διαφορετική πυκνότητα** → Στρωματοποιημένο υγρό

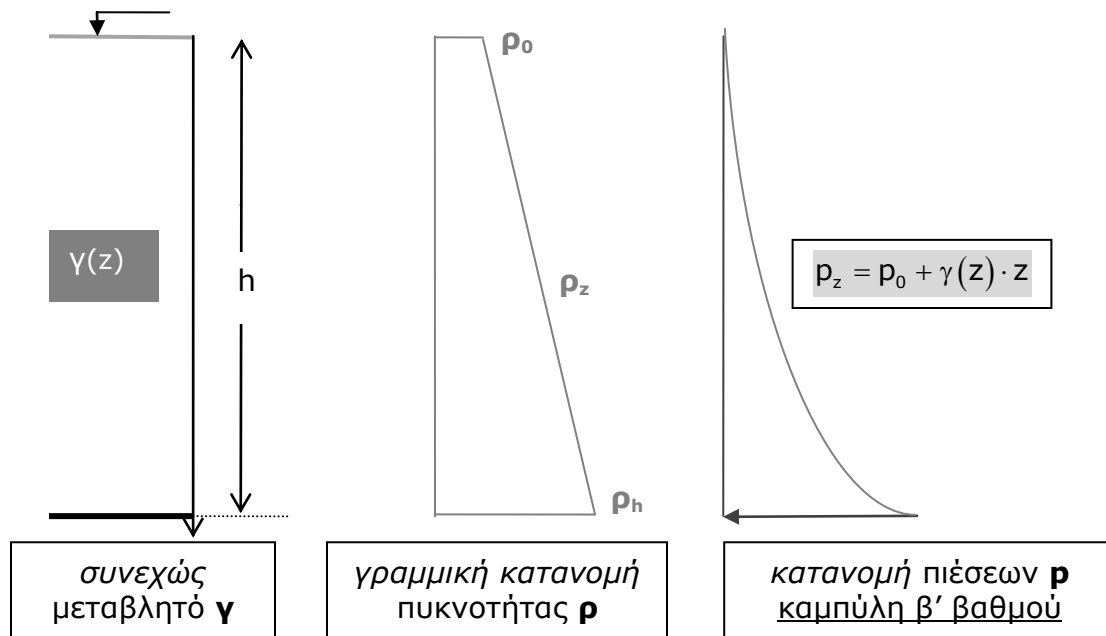


Εναλλακτικός τρόπος χάραξης του διαγράμματος των πιέσεων

Θεωρούμε την πυκνότητα της ανώτερης στρώσης ως ενιαία πυκνότητα του υγρού σε όλο το βάθος και προσδιορίζουμε τις πυκνότητες των υπολοίπων στρώσεων ως πυκνότητες υποθετικών υγρών.



- **Συνεχής μεταβολή της πυκνότητας, συνήθως γραμμική**



- $\gamma_z = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{\rho_h - \rho_0}{h} \cdot z \right) \cdot z$ (5) και $p_z = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{(\rho_h - \rho_0) \cdot z}{2 \cdot h} \right) \cdot z$ (6)
- $\overline{dF} = g \cdot \left(\rho_0 + \frac{(\rho_h - \rho_0) \cdot z}{2 \cdot h} \right) \cdot z \cdot \overline{dE}$ (7) και $\vec{F} = \int \overline{dF}$ (8)

2.2 Κατευθύνσεις – μέθοδοι επίλυσης

2.2.1 Εισαγωγή

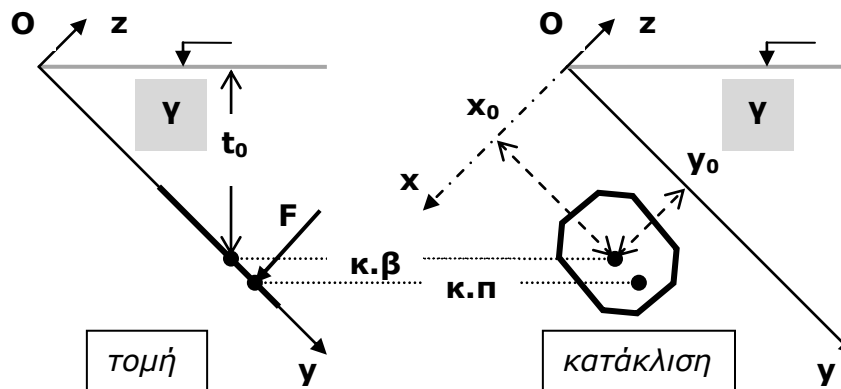
Υπάρχουν τρεις κατευθύνσεις – μέθοδοι – επίλυσης. Κάθε μία έχει το δικό της προνομιακό – ενδεδειγμένο – πεδίο εφαρμογής, αναλόγως της μορφής του φορέα όπου ασκούνται οι πιέσεις, χωρίς να σηματοδοτεί αυτό πλήρη οριοθέτηση: οι **μέθοδοι** έχουν **αλληλοεπικάλυψη**. Ας σημειωθεί, ότι η **ονοματολογία** των μεθόδων **δεν αντικατοπτρίζει την ουσία** τους!..

2.2.2 Αναλυτική μέθοδος

- Πεδίο εφαρμογής: (Προσοχή! <εδώ> παρουσιάζεται μόνο για ομογενές υγρό ☹)
 - Προνομιακό: **Επίπεδα σχήματα** (θυρίδες)
 - Γενικότερο: Επίπεδες επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - **Συνολικώς ορισμένο σύστημα αξόνων** ☹
 - **Αρχή** του **συστήματος** στην **επιφάνεια** του υγρού
 - Άξονες **x** και **y** στο **επίπεδο** του **φορέα**, στον άξονα **z** οι υδροστατικές **πιέσεις** και η **συνολική δύναμη F** από υδροστατικές πιέσεις.
- $F = \gamma \cdot t_o \cdot E^*$ (9) με σημείο εφαρμογής (κέντρο πίεσης):

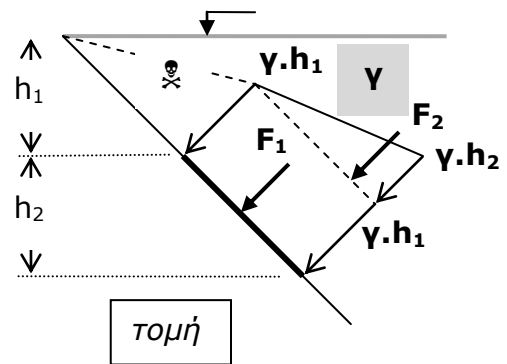
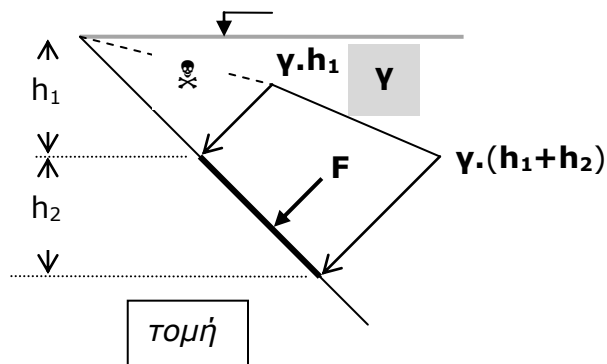
$$Y_{\pi} = Y_o + \frac{J_{xx}}{\gamma_o \cdot E^*} \quad (10) \quad \text{και} \quad X_{\pi} = X_o + \frac{J_{xy}}{\gamma_o \cdot E^*} \quad (10a) \quad \text{όπου:}$$

- t_o το βάθος, x_o και y_o οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του φορέα
 - E^* : εμβαδό της βρεχόμενης επιφάνειας του φορέα
 - X_{π} και Y_{π} οι συντεταγμένες του κέντρου πίεσης
 - J_{xx} : ροπή αδρανείας του φορέα ως προς κεντροβαρικό άξονα παράλληλο του **x**
 - J_{xy} : φυγόκεντρη ροπή αδρανείας του φορέα
(Η J_{xy} είναι μηδέν εάν ο **y** είναι άξονας συμμετρίας του φορέα!)
- Το κέντρο πίεσης είναι πάντοτε **βαθύτερα** από το κέντρο βάρους, διότι $J_{xx} > 0$



2.2.3 Γραφική μέθοδος

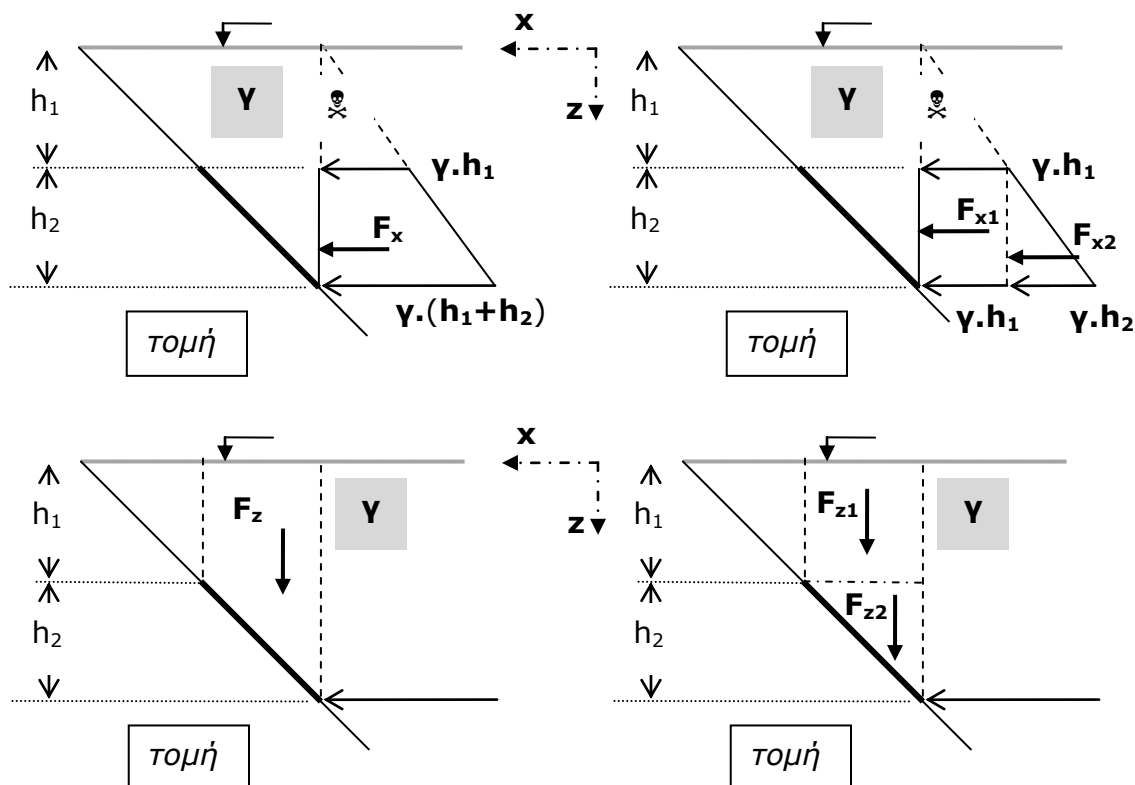
- Πεδίο εφαρμογής:
 - Προνομιακό: **Επιπεδογενείς επιφάνειες**
 - Γενικότερο: Επίπεδες επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - **Απουσία** ορισμένου **σύστηματος αξόνων**
 - Το **διάγραμμα** – πρίσμα **πιέσεων** σχεδιάζεται γραφικά κάθετα σε κάθε επιφάνεια του **φορέα**, με αρχή την ελεύθερη επιφάνεια
 - Όμως λαμβάνεται υπόψη **μόνο** το **τμήμα** του, το οποίο **βρέχει** τον φορέα ☹
- $F = \gamma \cdot b \cdot E$ (11) είναι η συνολική δύναμη **F** από υδροστατικές πιέσεις, κάθετη στο επίπεδο του **φορέα**, (ή κάθετη κατά τμήματα σε όλα τα επίπεδά του), με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του διαγράμματος – πρίσματος πιέσεων.
 - b: πλάτος της βρεχόμενης επιφάνειας του **φορέα**
 - E: εμβαδό του διαγράμματος πιέσεων



- Είναι **προτιμότερη** η ανάλυση του διαγράμματος πιέσεων σε επιμέρους απλούστερα διαγράμματα: **ορθογώνια – τρίγωνα**, των οποίων ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους και γενικώτερον ο λογιστικός χειρισμός είναι **ευχερέστερος!**
- $F = \gamma \cdot b \cdot \sum E_i$ (11a), όπου E_i : επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων.

2.2.4 Γενική ή γενικευμένη μέθοδος

- Πεδίο εφαρμογής:
 - Προνομιακό: **Καμπύλες επιφάνειες**
 - Γενικότερο: Επίπεδες και επιπεδογενείς επιφάνειες
- Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:
 - Χαλαρά ορισμένο σύστημα αξόνων**
 - Άξονας **z** κατακόρυφος
- $F_x = \gamma \cdot b_{yz} \cdot E_x$ (12) και $F_y = \gamma \cdot b_{xz} \cdot E_y$ (13) είναι οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης **F** από υδροστατικές πιέσεις, δηλαδή οι κάθετες προβολές της **F** στα επίπεδα **yz** και **xz** αντιστοίχως.
 Με σημεία εφαρμογής τα κέντρα βάρους των αντιστοίχων προβολών του διαγράμματος - πρίσματος πιέσεων.
 - b_{yz} και b_{xz} : πλάτη της προβολής της βρεχόμενης επιφάνειας του φορέα
 - E_x και E_y : εμβαδά των προβολών του διαγράμματος πιέσεων



- $F_z = \gamma \cdot U_z$ (14) είναι οι συνιστώσα της συνολικής δύναμης **F** από υδροστατικές πιέσεις - κάθετη προβολή της **F** στο επίπεδο **xy**.
 Με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του όγκου U_z .

- Είναι **προτιμότερη** η ανάλυση των διαγράμματος πιέσεων και του όγκου U_z , σε επιμέρους απλούστερα διαγράμματα και όγκους, των οποίων ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους και γενικότερον ο λογιστικός χειρισμός είναι **ευχερέστερος**!

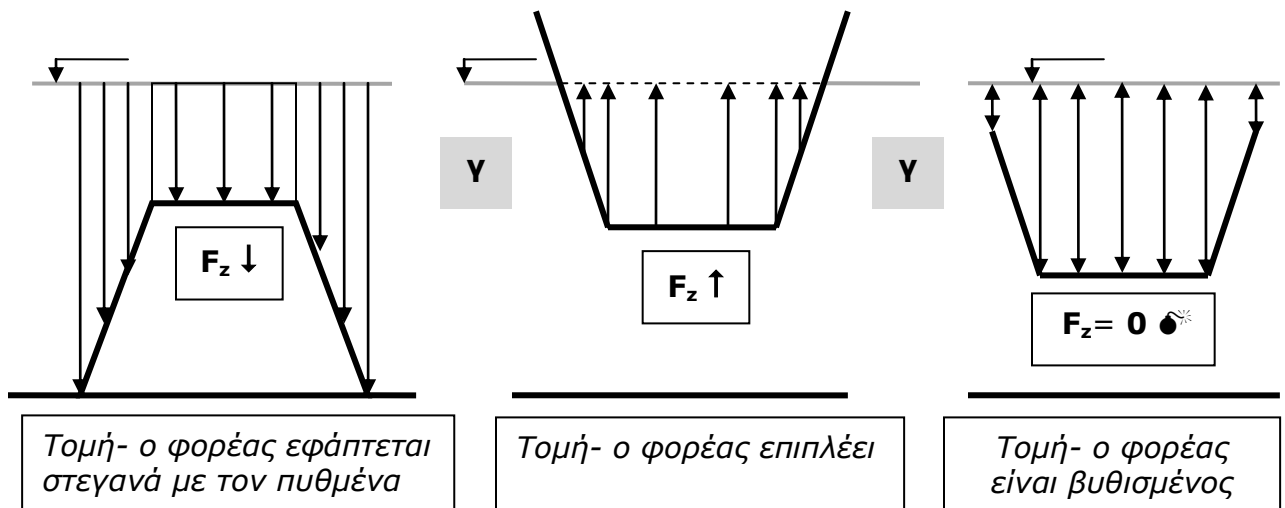
$$F_x = \gamma \cdot b \cdot \sum E_{ix} \quad (12a), \text{ όπου } E_{ix}: \text{ επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων}$$

$$F_y = \gamma \cdot b \cdot \sum E_{iy} \quad (13a), \text{ όπου } E_{iy}: \text{ επιμέρους εμβαδά του διαγράμματος πιέσεων}$$

$$F_z = \gamma \cdot \sum U_{iz} \quad (14a), \text{ όπου } U_{iz}: \text{ επιμέρους όγκοι του όγκου } U_z$$

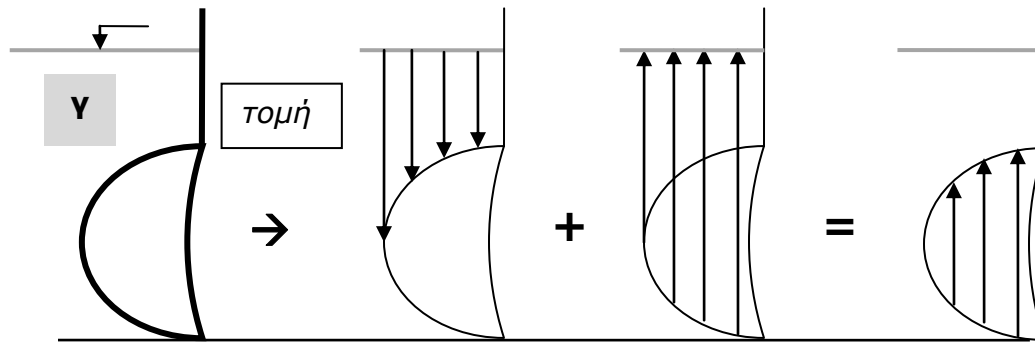
$$F = F_x + F_y + F_z \quad (15)$$

- Ο **όγκος U_z** παράγεται από:
 - τη **βρεχόμενη επιφάνεια** του *φορέα*
 - κατακόρυφες γενέτιρες** επαπτόμενες σε αυτή
 - την **ελεύθερη επιφάνεια** ή την **στάθμη** του *υγρού*, το οποίο την *βρέχει*
- Ο **όγκος U_z** είναι **λογιστικό μέγεθος**!
 - Στη σχέση (9): γ είναι το **ειδικό βάρος** του *υγρού* το οποίο **βρέχει** την επιφάνεια του *φορέα*!
 - ΟΧΙ** το ειδικό βάρος του υγρού το οποίο **περιέχεται** στον **όγκο U_z** ! ☹
 - Η **κατεύθυνση** της δύναμης F_z εξαρτάται από την καμπυλότητα της επιφάνειας του *φορέα* ... και την κοινή λογική! ☼

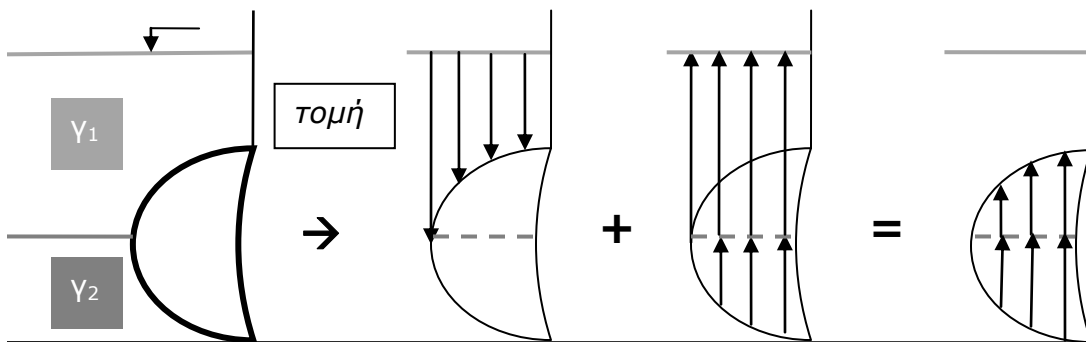


- Στην *αριστερή* περίπτωση του σχήματος, η επιφάνεια του *φορέα* **βρέχεται** από υγρό ειδικού βάρους γ και ο **όγκος U_z** **περιέχει** υγρό ειδικού βάρους γ → στις (14) ή (14a) χρησιμοποιούμε το γ .
- Στη *μεσαία* περίπτωση του σχήματος, η επιφάνεια του *φορέα* **βρέχεται** από υγρό ειδικού βάρους γ αλλά ο **όγκος U_z** **περιέχει αέρα** (κοπανιστό...) → στις (14) ή (14a) και πάλι χρησιμοποιούμε το γ !
- Στη *δεξιά* περίπτωση του σχήματος, οι **δύο επιφάνειες** του *φορέα* **βρέχονται** από υγρό ειδικού βάρους γ → αλλά οι **δύο όγκοι U_z** είναι **ίσοι** και οι **δύο δυνάμεις ίσες** και **αντίθετες**!

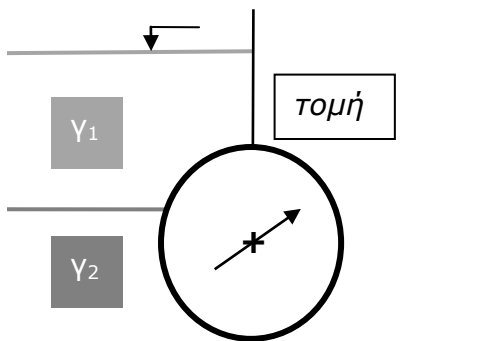
- Χρήσιμες επισημάνσεις



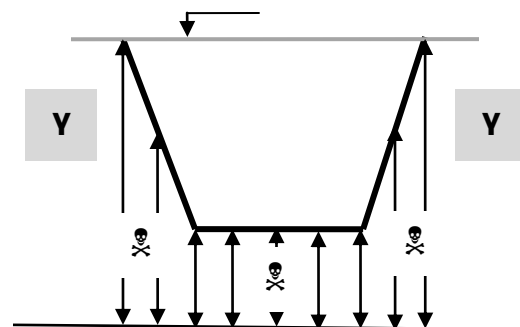
Σε **ομογενές** υγρό αναζητούμε – εφαρμόζουμε **αλληλοαναιρέση** όγκων $U_z \rightarrow$ **κατακόρυφων δυνάμεων**



Σε **στρωματοποιημένο** υγρό αναζητούμε – εφαρμόζουμε **αλληλοαναιρέση**, με προέκταση της **διεπιφάνειας** μέσα στον όγκο U_z και **διαφορετικά γ** !



Σε **κυλινδρικούς** και **σφαιρικούς** φορείς, η συνολική δύναμη από υδροστατικές πιέσεις, **διέρχεται από το κέντρο τους!**



Ο όγκος U_z **ΔΕΝ** έχει καμία **σχέση** με την **απόσταση** του φορέα από τον **πυθμένα** της **θάλασσας!** ☠

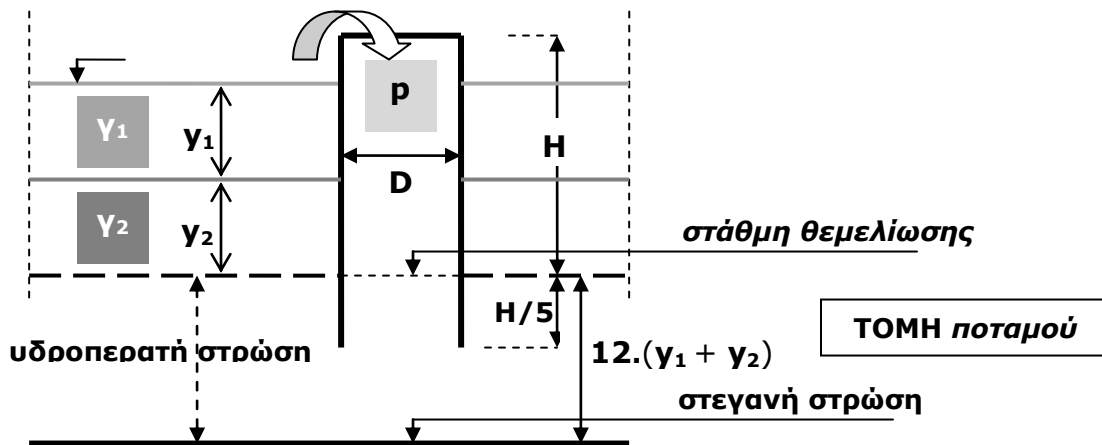
2.3 Εφαρμογές υπολογισμού

2.3.1 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.1.1 και 2.1.2

Πρόκειται να σκυροδετηθεί - σε συνθήκες στεγανότητας - η θεμελίωση μεσοβάθρου γέφυρας, σε ποταμό με νερό δύο στρώσεων (γ_1, γ_2), του οποίου ο πυθμένας έχει στρώση υδατοπερατού υλικού με πολύ μεγάλο βάθος: $12 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)$.

Προτείνετε την τοποθέτηση κυλινδρικού σιδηρότυπου κλειστού αεροστεγώς στο άνω μέρος και δημιουργία υπερπίεσης με τη χρήση αντλιών αέρος (βλ. σχήμα).

1. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της πίεσης p μέσα στον κύλινδρο;
2. Τι άλλο πρέπει να προδιαγράψετε (βλ. OHSAS 18001), για την προστασία της υγείας των εργαζομένων στη στάθμη θεμελίωσης;



1. $p = \gamma_1 \cdot y_1 + \gamma_2 \cdot y_2$

Οι υπόλοιπες διαστάσεις - πληροφορίες είναι άσχετες - παραπλανητικές ☹️

2. Η διαδικασία **αποσυμπίεσης** - από την υπερπίεση p έως την ατμοσφαιρική πίεση - επιβάλλεται να είναι **σταδιακή**! ⚠️

- Η ως άνω μέθοδος κατασκευής εφαρμόστηκε - για πρώτη φορά - στα μέσα του 19^{ου} αιώνα από τον διακεκριμένο Βρετανό - Πολιτικό Μηχανικό: **R. Stephenson** στην κατασκευή σιδηροδρομικής γέφυρας.

Οι εργαζόμενοι στην κατασκευή παρουσίασαν συμπτώματα μιας άγνωστης και μυστηριώδους νόσου, η οποία ονομάστηκε τότε : «νόσος του ποταμού».

Η Ιατρική επιστήμη - πολύ αργότερα - ανέλυσε τα αίτια της «νόσου» και έθεσε τις προδιαγραφές προφύλαξης. Είναι γνωστή πλέον ως «νόσος των δυτών»!

- Γενικός κανόνας:

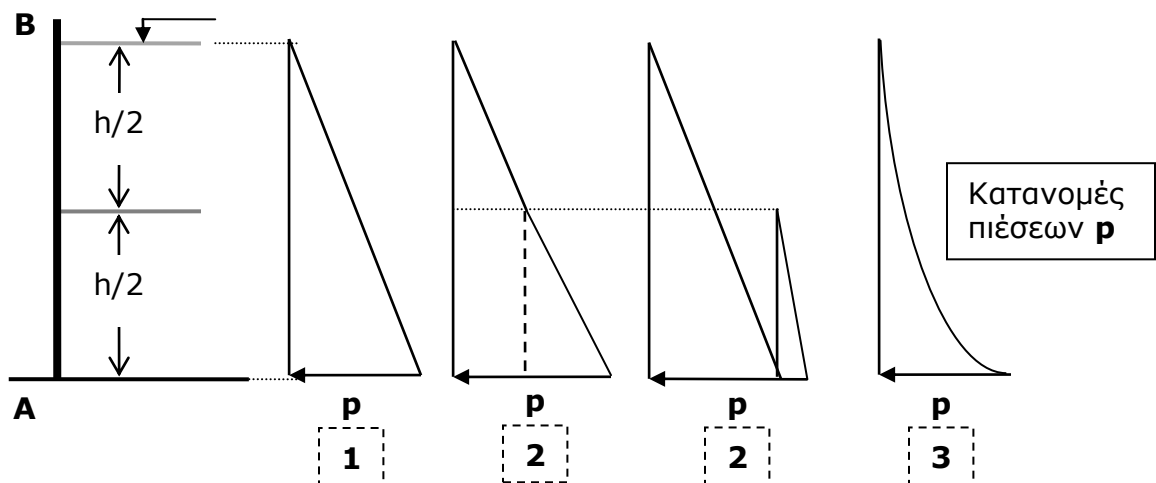
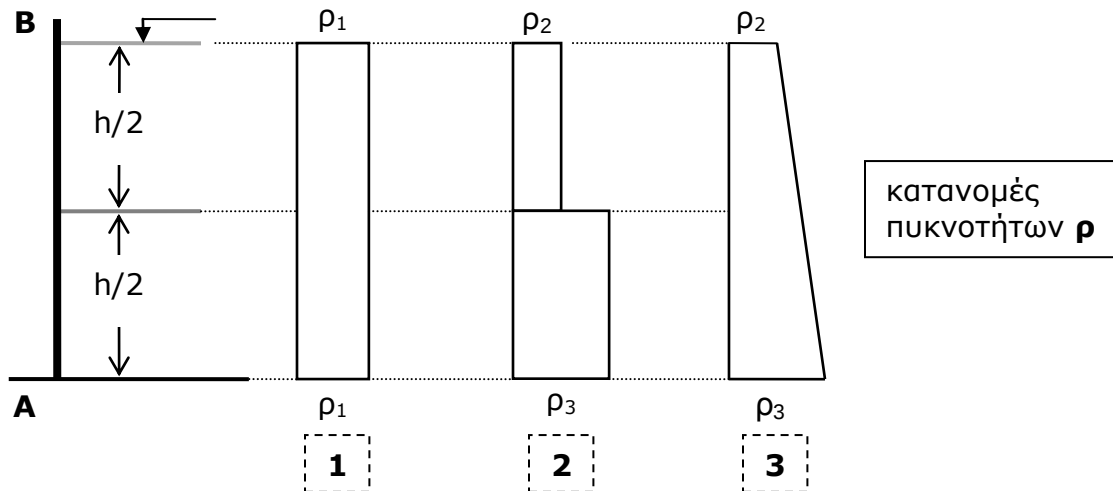
«Τα λάθη των Μηχανικών φαίνονται, ενώ τα λάθη των Ιατρών θάπτονται».

2.3.2 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.1.2

Σε μία λίμνη με βάθος $h = 20$ m σχεδιάζεται η κατασκευή κατακόρυφου φράγματος AB, το οποίο είναι πρόβολος με πάκτωση στο A.

Εξετάζονται τρεις περιπτώσεις κατανομής της πυκνότητας στο υγρό της λίμνης, όπου: $\rho_1 = 1.050 \text{ kgr} / \text{m}^3$, $\rho_2 = 1.000 \text{ kgr} / \text{m}^3$, $\rho_3 = 1.100 \text{ kgr} / \text{m}^3$ (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν η πίεση p στη βάση του φράγματος A, συνολική δύναμη (ανά μέτρο πλάτους) F από υδροστατικές πιέσεις, η οποία ασκείται σε αυτό και η ροπή πάκτωσης (ανά μέτρο πλάτους) M για όλες τις περιπτώσεις.



$$1. (1), (2) \rightarrow p = g \cdot \rho_1 \cdot h \rightarrow p = 21,00 \text{ t} / \text{m}^2 = 206,01 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$(4) \rightarrow F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \rho_1 \cdot h^2 \rightarrow F = 210,00 \text{ t} / \text{m} = 2.060,10 \text{ kN} / \text{m}$$

$$M = \frac{1}{6} \cdot g \cdot \rho_1 \cdot h^3 \rightarrow M = 1.400,0 \text{ tm} / \text{m} = 13.734,0 \text{ kNm} / \text{m}$$

$$2. (1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h}{2} + \frac{\rho_3 \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{8} + \frac{\rho_2 \cdot h^2}{4} + \frac{\rho_3 \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow F = \mathbf{205,00 \text{ t / m}} = \mathbf{2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{12} + \frac{\rho_2 \cdot h^3}{16} + \frac{\rho_3 \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.350,0 \text{ tm / m}} = \mathbf{13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

Εναλλακτικός τρόπος:

$$(1), (2) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(4) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{8} \right) \rightarrow F = \mathbf{205,00 \text{ t / m}} = \mathbf{2.011,05 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{48} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.350,0 \text{ tm / m}} = \mathbf{13.243,5 \text{ kNm / m}}$$

$$3. (5), (6) \rightarrow p = g \cdot \left(\rho_2 \cdot h + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h}{2} \right) \rightarrow p = \mathbf{21,00 \text{ t / m}^2} = \mathbf{206,01 \text{ kN / m}^2}$$

$$(8) \rightarrow F = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^2}{2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^2}{6} \right) \rightarrow F = \mathbf{206,67 \text{ t / m}} = \mathbf{2.027,40 \text{ kN / m}}$$

$$M = g \cdot \left(\frac{\rho_2 \cdot h^3}{6} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) \cdot h^3}{6} \right) \rightarrow M = \mathbf{1.466,67 \text{ tm / m}} = \mathbf{14.388,0 \text{ kNm / m}}$$

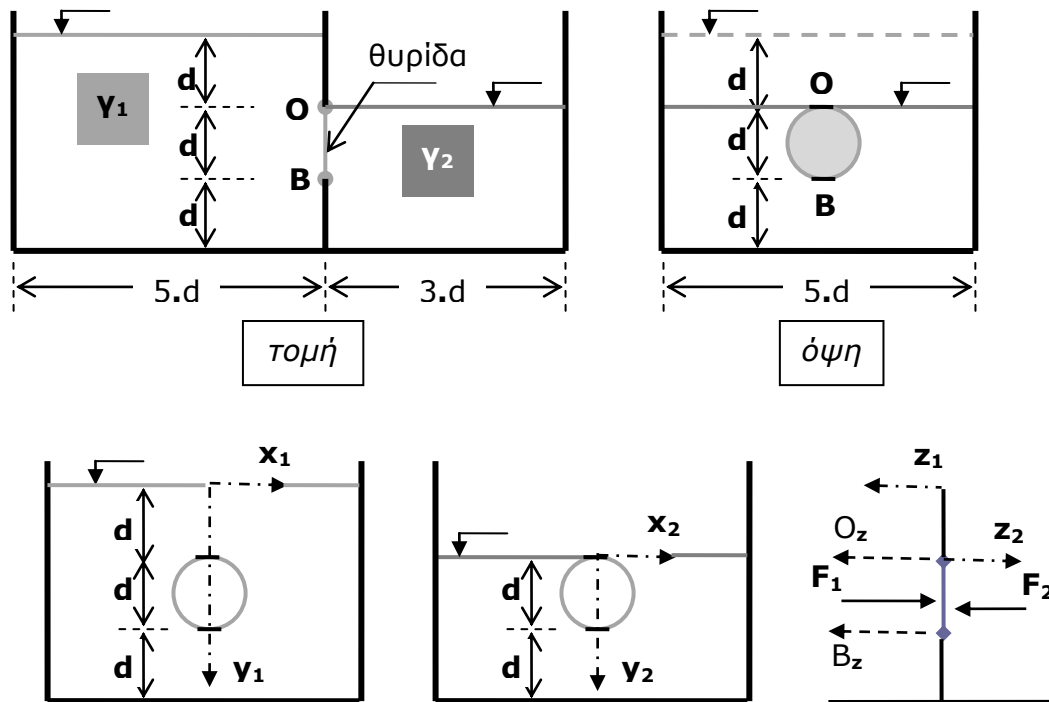
Επισημάνση: Παρότι – με τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης – η πίεση **p** στη βάση του φράγματος προκύπτει ίδια σε όλες τις περιπτώσεις, η συνολική δύναμη **F** και η ροπή πάκτωσης **M** είναι διαφορετικές σε κάθε περίπτωση!

2.3.3 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.2

Σε διθάλαμη δεξαμενή το διαχωριστικό τοίχωμα περιλαμβάνει αβαρκυκλική θυρίδα διαμέτρου d , η οποία στηρίζεται με άρθρωση στο **O** και απλή στήριξη στο **B**. Οι θάλαμοι περιέχουν υγρά διαφορετικού ειδικού βάρους (γ_1, γ_2) και στάθμης (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις των στηρίξεων.

Αριθμητική εφαρμογή: $d = 2,0 \text{ m}$, $\gamma_1 = 1,0 \text{ t/m}^3$, $\gamma_2 = 1,1 \text{ t/m}^3$.



Οι διαστάσεις των θαλάμων **δεν** επηρεάζουν τη **λύση**, είναι **παραπλανητικές** ☹*

Τα **δύο** - **διαφορετικά** ☹ συστήματα αξόνων είναι **ορισμένα** από τη μέθοδο

$$(9) \rightarrow F_1 = \gamma_1 \cdot \frac{3 \cdot d}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3 \cdot \gamma_1 \cdot \pi \cdot d^3}{8} \rightarrow \mathbf{F_1 = 9,424778 \text{ t} = 92,457 \text{ kN}}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi 1} = \frac{3 \cdot d}{2} + \frac{d}{24} \rightarrow e_{OF1} = \frac{d}{2} + \frac{d}{24} \rightarrow \mathbf{e_{OF1} = 1,083333 \text{ m}}$$

$$(9) \rightarrow F_2 = \gamma_2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\gamma_2 \cdot \pi \cdot d^2}{8} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,424752 \text{ t} = 33,901 \text{ kN}}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi 2} = \frac{d}{2} + \frac{d}{8} \rightarrow e_{OF2} = \frac{d}{2} + \frac{d}{8} \rightarrow \mathbf{e_{OF2} = 1,250 \text{ m}}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow B_z \cdot d - F_1 \cdot e_{OF1} + F_2 \cdot e_{OF2} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = 2,945243 \text{ t} = 28,893 \text{ kN}}$$

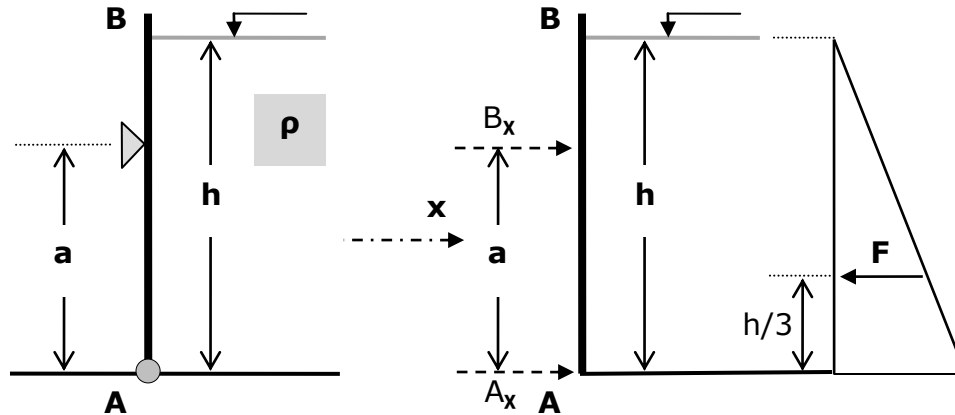
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z - F_1 + F_2 = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = 3,023783 \text{ t} = 29,663 \text{ kN}}$$

2.3.4 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.3

Σε μία λίμνη με βάθος **h** σχεδιάζεται η κατασκευή κατακόρυφου φράγματος AB με πλάτος **b**, το οποίο στηρίζεται με άρθρωση στο A και απλή στήριξη στο B. Η πυκνότητα της λίμνης είναι **ρ**.

Να υπολογιστεί το ύψος **a**, ώστε οι οριζόντιες αντιδράσεις των στηρίξεων να έχουν την ίδια τιμή, καθώς και η τιμή των αντιδράσεων (βλ. σχήμα).

Αριθμητική εφαρμογή: **h= 10 m, b= 25 m, ρ= 1.050 kgr / m³**.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στην επιφάνεια του φορέα

$$(11a) \rightarrow F = \frac{\gamma \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F = \mathbf{1.312,50 \text{ t} = 12.875,625 \text{ kN}}$$

$$\text{και } e_{AF} = \frac{h}{3}, e_{BF} = a - \frac{h}{3}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_x \cdot a - F \cdot e_{AF} = 0 \rightarrow B_x = \frac{F \cdot h}{3 \cdot a}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_x \cdot a - F \cdot e_{BF} = 0 \rightarrow A_x = F \cdot \left(1 - \frac{h}{3 \cdot a}\right)$$

$$A_x = B_x = \frac{F}{2} \rightarrow a = \frac{2 \cdot h}{3} \rightarrow a = \mathbf{6,666667 \text{ m}} \text{ και } \mathbf{A_x = B_x = 656,25 \text{ t} = 6.437,81 \text{ kN}}$$

2.3.5 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.3

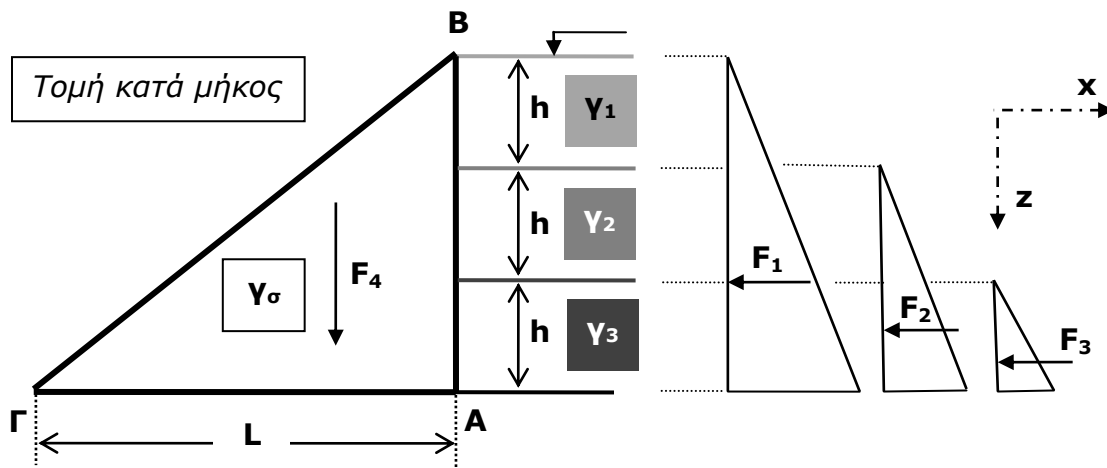
Σε ορθογωνική διατομή ποταμού με πλάτος **b** και βάθος **3.h** σχεδιάζεται η κατασκευή φράγματος βαρύτητας ΑΒΓ, τριγωνικής διατομής με μήκος **L**, από σκυρόδεμα ειδικού βάρους **γ_σ**.

Ο ανάντη του φράγματος ταμιευτήρας θα περιέχει τρεις στρώσεις υγρών με βάθη **h** και ειδικά βάρη **γ₁**, **γ₂** και **γ₃** (βλ. σχήμα). Το έδαφος θεμελίωσης του φράγματος είναι στεγανό και έχει συντελεστή οριζόντιας τριβής **k**.

Να υπολογιστούν οι συντελεστές ασφαλείας:

1. Σε ολίσθηση **C₁**: Κατακόρυφες δυνάμεις επί το **k** / Οριζόντιες δυνάμεις.
2. Σε ανατροπή (περί το σημείο Γ) **C₂** : Ροπές ευσταθείας / Ροπές ανατροπής.

Αριθμητική εφαρμογή: **h= 5 m**, **b= 25 m**, **L= 30 m**, **k= 0,55**, **γ_σ= 2,50 t/ m³**, **γ₁= 1,00 t/ m³**, **γ₂= 1,05 t/ m³**, **γ₃= 1,10 t/ m³**.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από το **πρόβλημα**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στην επιφάνεια του φορέα με τον εναλλακτικός τρόπο

$$(11a) \rightarrow F_1 = \frac{9 \cdot \gamma_1 \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_1 = 2.812,50 \text{ t} = 27.590,625 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F1} = h$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = 2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot b \cdot h^2 \rightarrow F_2 = 62,50 \text{ t} = 613,125 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$(11a) \rightarrow F_3 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2) \cdot b \cdot h^2}{2} \rightarrow F_3 = 15,625 \text{ t} = 153,281 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F3} = \frac{h}{3}$$

$$F_4 = \frac{3 \cdot \gamma_\sigma \cdot b \cdot h \cdot L}{2} \rightarrow F_4 = 14.062,50 \text{ t} = 137.953,125 \text{ kN} \text{ και } e_{\Gamma F4} = \frac{L}{3}$$

$$\sum F_x = \sum_1^3 F \text{ και } \sum F_z = F_4 \rightarrow C_1 = \frac{3 \cdot k \cdot \gamma_\sigma}{9 \cdot \gamma_1 + 4 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \frac{L}{h} \rightarrow C_1 = 2,67568$$

$$\sum M^- = \sum_1^3 M_F \text{ και } \sum M^+ = M_{F4} \rightarrow C_2 = \frac{3 \gamma_\sigma}{27 \cdot \gamma_1 + 8 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2)} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

$$\rightarrow C_2 = 9,83607$$

2.3.6 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

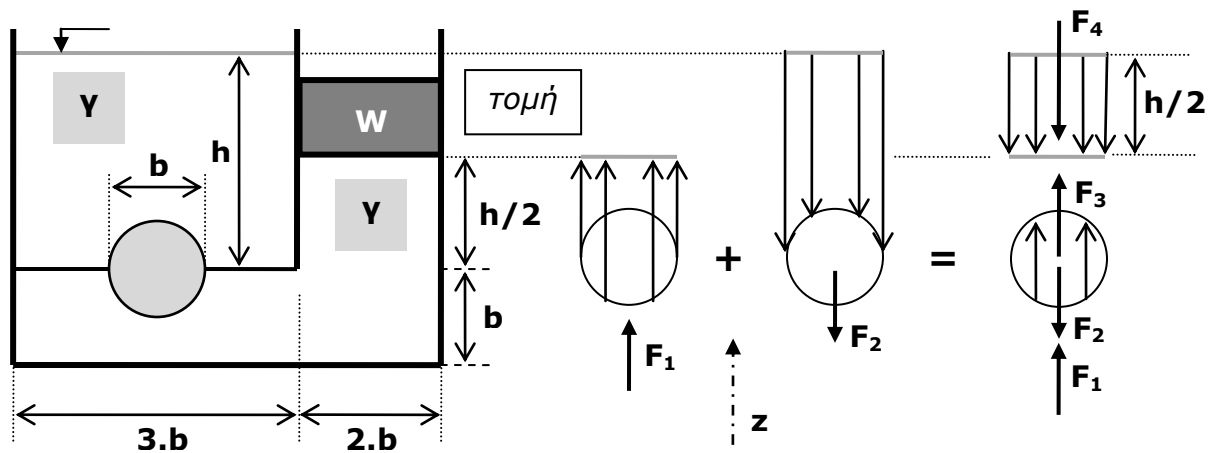
Διθάλαμη ορθογωνική δεξαμενή με συνολικό πλάτος **B** και μήκος **L** περιέχει υγρό ειδικού βάρους **γ** με βάθη **h** και **h/2**. Στον πρώτο θάλαμο υπάρχει οριζόντιο επίπεδο, το οποίο έχει άνοιγμα με πλάτος **b** και μήκος **L**, το οποίο φράζεται με κυλινδρικό πλωτήρα με διάμετρο **b**, μήκος **L** και ειδικό βάρος **γ***.

Ο πλωτήρας ισορροπεί και εξασφαλίζει τη στεγανότητα του ανοίγματος.

Στο δεύτερο θάλαμο υπάρχει έμβολο βάρους **W** με πλάτος **2.b** και μήκος **L** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστεί το βάρος **W**, ώστε ο πλωτήρας να ισορροπεί στη θέση αυτή.

Αριθμητική εφαρμογή: **B = 5.b**, **b = 1 m**, **h = 3 m**, **L = 3 m**,
γ = 1,00 t/m³, **γ* = 2,00 t/m³**.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο**

Κάποιες διαστάσεις **δεν** επηρεάζουν τη **λύση**, είναι **παραπλανητικές** ☹️

Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

Το έμβολο προκαλεί πίεση: $p_w = \frac{W}{2 \cdot b \cdot L}$, η οποία μεταφέρεται στον πλωτήρα!

$$F_1 = p_w \cdot b \cdot L = \frac{W}{2}$$

$$F_2 = \gamma^* \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot L \text{ (το βάρος του πλωτήρα)}$$

$$(14) \rightarrow F_3 = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot L$$

$$(14) \rightarrow F_4 = \gamma \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot L$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow W = (\gamma^* - \gamma) \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{2} \cdot L + \gamma \cdot b \cdot h \cdot L \rightarrow \mathbf{W = 10,570796 \text{ t} = 103,700 \text{ kN}}$$

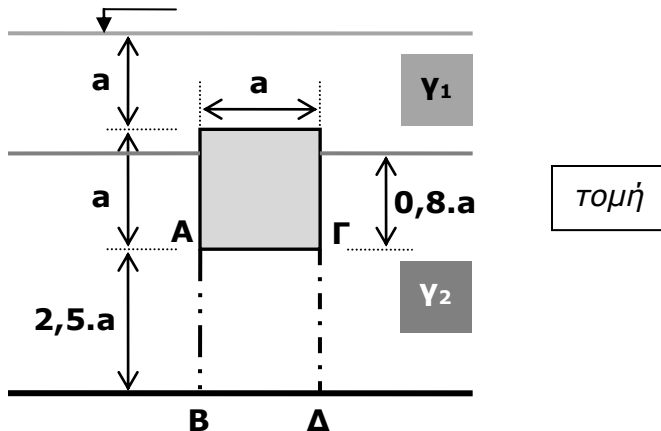
2.3.7 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

Αβαρές πρίσμα τετραγωνικής διατομής με πλευρά a και μήκος L έχει αγκυρωθεί στον πυθμένα λίμνης με δύο κατακόρυφα συρματόσχοινα AB και ΓΔ, τα οποία έχουν συνδεθεί συμμετρικά στο μέσο του μήκους του πρίσματος. Η λίμνη περιέχει δύο στρώσεις υγρού με ειδικά βάρη γ_1 και γ_2 . (βλ. σχήμα).

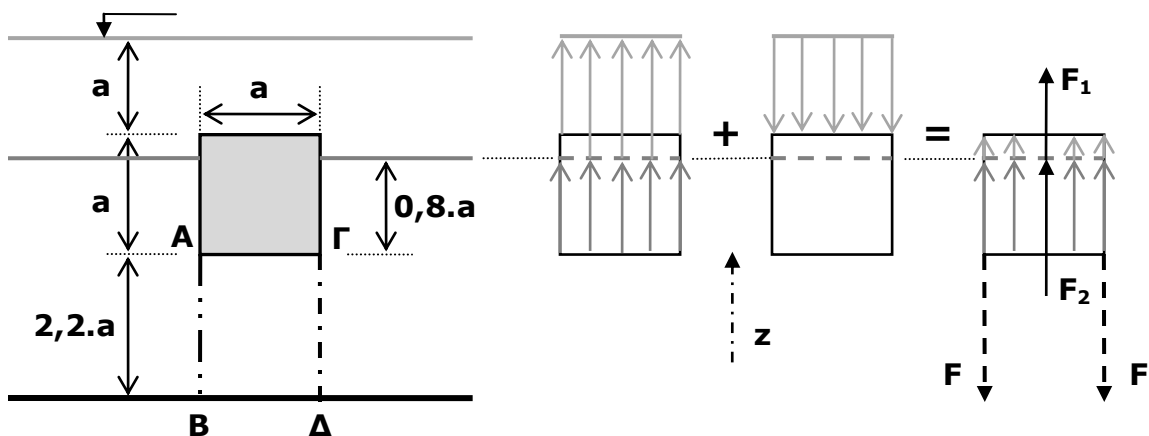
Να υπολογιστούν:

1. Η δύναμη F , την οποία αναλαμβάνει κάθε συρματόσχοινο.
2. Η δύναμη F^* , την οποία θα αναλάβει το συρματόσχοινο ΓΔ, εάν το συρματόσχοινο AB κοπεί.

Αριθμητική εφαρμογή: $a = 4,95 \text{ m}$, $L = 6,5 \text{ m}$, $\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$, $\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$.



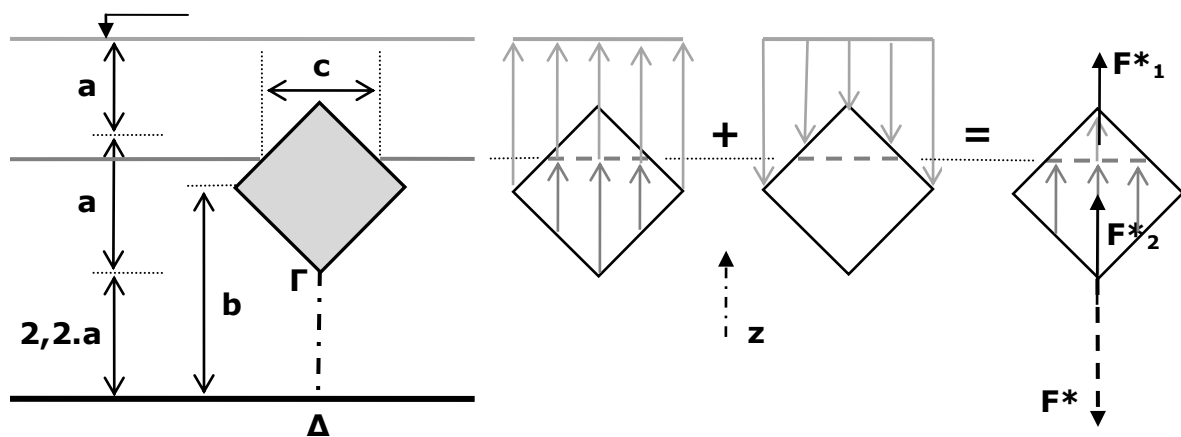
Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο**



1. Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

$$(14) \rightarrow F_1 = 0,2 \cdot \gamma_1 \cdot a^2 \cdot L \text{ και } F_2 = 0,8 \cdot \gamma_2 \cdot a^2 \cdot L$$

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{(0,2 \cdot \gamma_1 + 0,8 \cdot \gamma_2)}{2} \cdot a^2 \cdot L \rightarrow F = 86,003775 \text{ t} = 843,697 \text{ kN}$$



2. Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται!

$$b = \left(2,2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot a \text{ και } c = 2 \cdot (\sqrt{2} - 0,8) \cdot a$$

$$F^*_{*1} = \frac{1}{4} \cdot \gamma_1 \cdot c^2 \cdot L = (\sqrt{2} - 0,8)^2 \cdot \gamma_1 \cdot a^2 \cdot L \text{ και } F^*_{*2} = \left[1 - (\sqrt{2} - 0,8)^2 \right] \cdot \gamma_2 \cdot a^2 \cdot L$$

$$F^* = F^*_{*1} + F^*_{*2} = \left[\gamma_2 - (\sqrt{2} - 0,8)^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \right] \cdot a^2 \cdot L$$

$$\rightarrow F^* = 169,184424 \text{ t} = 1.659,699 \text{ kN}$$

Επισήμανση: Η **F*** **δεν** είναι **διπλάσια** της **F**!

Η μετατόπιση του πρίσματος στη νέα θέση, προκάλεσε αλλαγή στους *σχετικούς* όγκους, άρα και στις *σχετικές* ανώσεις.

Εάν το υγρό ήταν ομογενές, όντως στη 2^η περίπτωση η αναλαμβανόμενη από το συρματόσχοινο δύναμη θα ήταν διπλάσια.

Υπό την προϋπόθεση όμως, ότι τα γεωμετρικά δεδομένα θα οδηγούσαν το πρίσμα σε πλήρη βύθιση ♡*

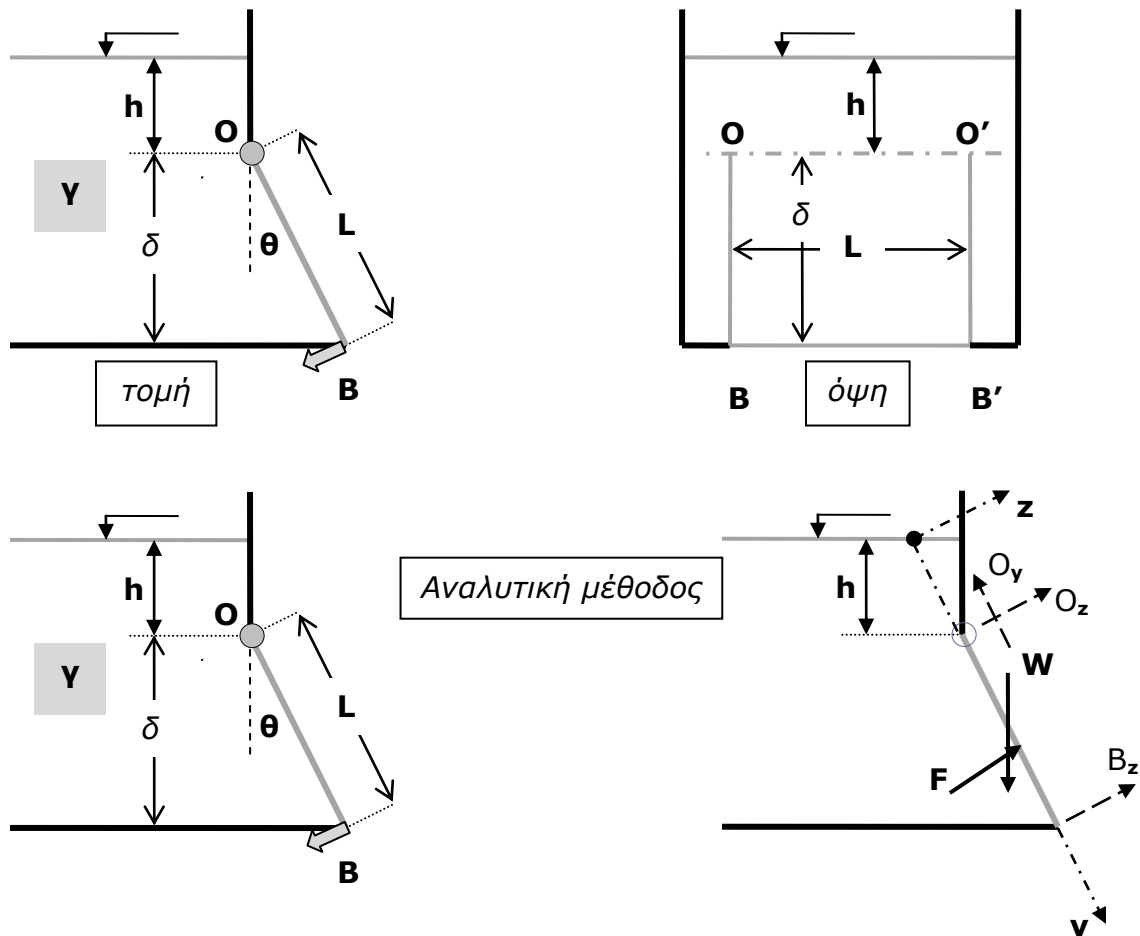
2.3.8 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.2.2, 2.2.3 και 2.2.4

Στο τοίχωμα δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό, προβλέπεται τετραγωνική θυρίδα, με πλευρές μήκους L και βάρος w (ανά μονάδα επιφανείας). Το τοίχωμα έχει κλίση με γωνία θ και το βάθος μέχρι τη θυρίδα είναι h . Η θυρίδα είναι στρεπτή (γραμμική άρθρωση) περί οριζόντιο άξονα OO' και στηρίζεται με απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) BB' (βλ.σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων.
2. Η συνολική δύναμη η οποία ασκείται στη θυρίδα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα).

Αριθμητική εφαρμογή: $L = 2,0$ m, $h = 2,0$ m, $w = 5,0$ t / m², $\theta = 30^\circ$.



Το σύστημα αξόνων είναι **ορισμένο** από τη μέθοδο

$$(9) \rightarrow F = \gamma \cdot \left(h + \frac{L \cdot \cos \theta}{2} \right) \cdot L^2 \rightarrow F = 11,464102 \text{ t} = 112,463 \text{ kN}$$

$$(10) \rightarrow y_{\pi} = \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right) + \frac{L^2}{12 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right)} \rightarrow y_{\pi} = 3,410124 \text{ m}$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OF} = \frac{L}{2} + \frac{L^2}{12 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \right)} \rightarrow e_{OF} = \mathbf{1,100723 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

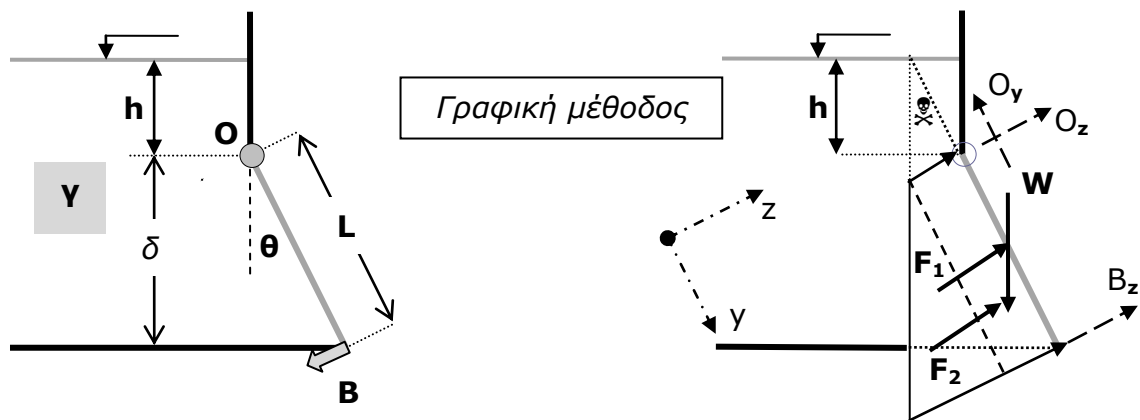
$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_y = 17,320508 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{OW} - F \cdot e_{OF} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = -1,309401 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F - W \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = -0,154701 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

Η συνολική δύναμη και το σημείο εφαρμογής της έχουν ήδη υπολογιστεί: **F, y_n**
 Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα → **30°** ως προς οριζόντιο άξονα.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στην επιφάνεια του φορέα

$$(11a) \rightarrow F_1 = \gamma \cdot h \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{F_1 = 8,000 \text{ t} = 782,480 \text{ kN}}$$

$$e_{OF1} = \frac{L}{2} \rightarrow e_{OF1} = \mathbf{1,000 \text{ m}}$$

$$(11a) \rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \delta \cdot L^2}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot \cos \theta}{2} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,464102 \text{ t} = 33,983 \text{ kN}}$$

$$e_{OF2} = \frac{2 \cdot L}{3} \rightarrow e_{OF2} = \mathbf{1,333333 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W = 20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{OW} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow e_{OW} = \mathbf{0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_y = 17,320 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{OW} - F_1 \cdot e_{OF1} - F_2 \cdot e_{OF2} = 0 \rightarrow \mathbf{B_z = -1,309 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

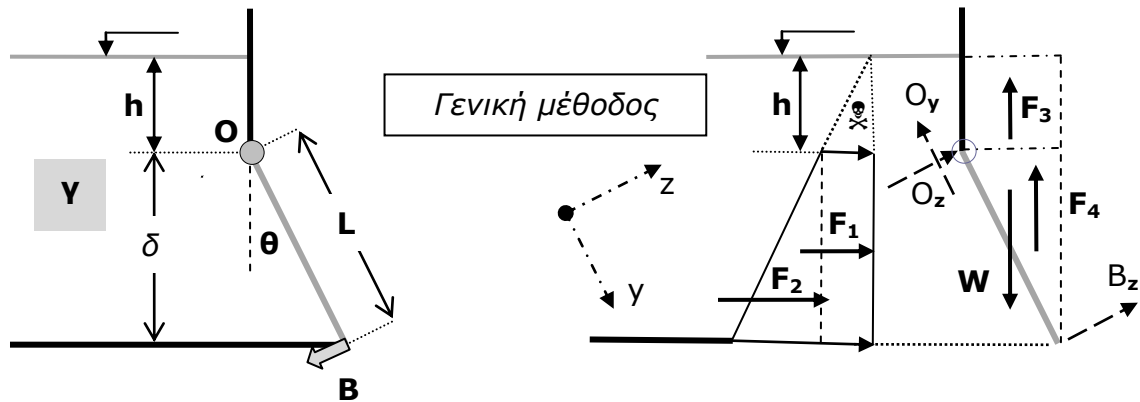
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F_1 + F_2 - W \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \mathbf{O_z = -0,154 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

Συνολική δύναμη $F = F_1 + F_2 \rightarrow \mathbf{F = 11,464 \text{ t} = 112,463 \text{ kN}}$

Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα $\rightarrow 30^\circ$ ως προς οριζόντιο άξονα.

Το σημείο εφαρμογής της πρέπει να υπολογιστεί (συνδυασμός των F_1 και F_2).

Προφανώς θα προκύψει το y_n !



Η επιλογή του συστήματος αξόνων καθορίστηκε από τις αντιδράσεις

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πίεσεις στους άξονες της μεθόδου

$$(12a) \rightarrow F_1 = \gamma \cdot h \cdot \delta \cdot L = \gamma \cdot h \cdot L^2 \cdot \cos \theta \rightarrow \mathbf{F_1 = 6,928203 \text{ t} = 67,966 \text{ kN}}$$

$$e_{OF1} = \frac{\delta}{2} = \frac{L \cdot \cos \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{OF1} = 0,866025 \text{ m}}$$

$$(12a) \rightarrow F_2 = \frac{\gamma \cdot \delta^2 \cdot L}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot (\cos \theta)^2}{2} \rightarrow \mathbf{F_2 = 3,000 \text{ t} = 29,430 \text{ kN}}$$

$$e_{OF2} = \frac{2 \cdot \delta}{3} = \frac{2 \cdot L \cdot \cos \theta}{3} \rightarrow \mathbf{e_{OF2} = 1,154701 \text{ m}}$$

$$(14a) \rightarrow F_3 = \gamma \cdot h \cdot L \cdot L \cdot \sin \theta = \gamma \cdot h \cdot L^2 \cdot \sin \theta \rightarrow \mathbf{F_3 = 4,000 \text{ t} = 39,240 \text{ kN}}$$

$$e_{OF3} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{OF3} = 0,500 \text{ m}}$$

$$(14a) \rightarrow F_4 = \frac{\gamma \cdot \delta \cdot L \cdot L \cdot \sin \theta}{2} = \frac{\gamma \cdot L^3 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{F_4 = 1,732051 \text{ t} = 15,762 \text{ kN}}$$

$$e_{OF4} = \frac{2 \cdot L \cdot \sin \theta}{3} \rightarrow \mathbf{e_{OF4} = 0,666667 \text{ m}}$$

$$W = w \cdot L^2 \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{20,000 \text{ t} = 196,200 \text{ kN}},$$

$$\text{Μοχλοβραχίονας } e_{ow} = \frac{L \cdot \sin \theta}{2} \rightarrow \mathbf{e_{ow} = 0,500 \text{ m}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -O_y + W \cdot \cos \theta + F_1 \cdot \sin \theta + F_2 \cdot \sin \theta - F_3 \cdot \cos \theta - F_4 \cdot \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{O_y = 17,320 \text{ t} = 169,914 \text{ kN}}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -B_z \cdot L + W \cdot e_{ow} - F_1 \cdot e_{OF1} - F_2 \cdot e_{OF2} - F_3 \cdot e_{OF3} - F_4 \cdot e_{OF4} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B_z = -1,309 \text{ t} = -12,845 \text{ kN}}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + B_z + F_1 \cdot \cos \theta + F_2 \cdot \cos \theta + F_3 \cdot \sin \theta + F_4 \cdot \sin \theta - W \cdot \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{O_z = -0,154 \text{ t} = -1,518 \text{ kN}}$$

$$\text{Συνολική δύναμη } F = \left[(F_1 + F_2)^2 + (F_1 + F_2)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \mathbf{F = 11,464 \text{ t} = 112,463 \text{ kN}}$$

Η διεύθυνση της: κάθετη στη θυρίδα $\rightarrow \mathbf{30^\circ}$ ως προς οριζόντιο άξονα.

Το σημείο εφαρμογής της **πρέπει να υπολογιστεί** (συνδυασμός των $\mathbf{F_1}$ έως $\mathbf{F_4}$).

Προφανώς θα προκύψει το $\mathbf{y_n}$!

Επισήμανση: Παρότι η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί και με τις τρεις κατευθύνσεις – μεθόδους, είναι **εμφανέστατη** η **υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

2.3.9 Η εφαρμογή αναφέρεται στα 2.2.3 και 2.2.4

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ABOA** σε όλο το πλάτος της **b**. Η γωνία του θυροφράγματος στο B είναι 90° .

Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **O** και απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) στον οριζόντιο άξονα **A**.

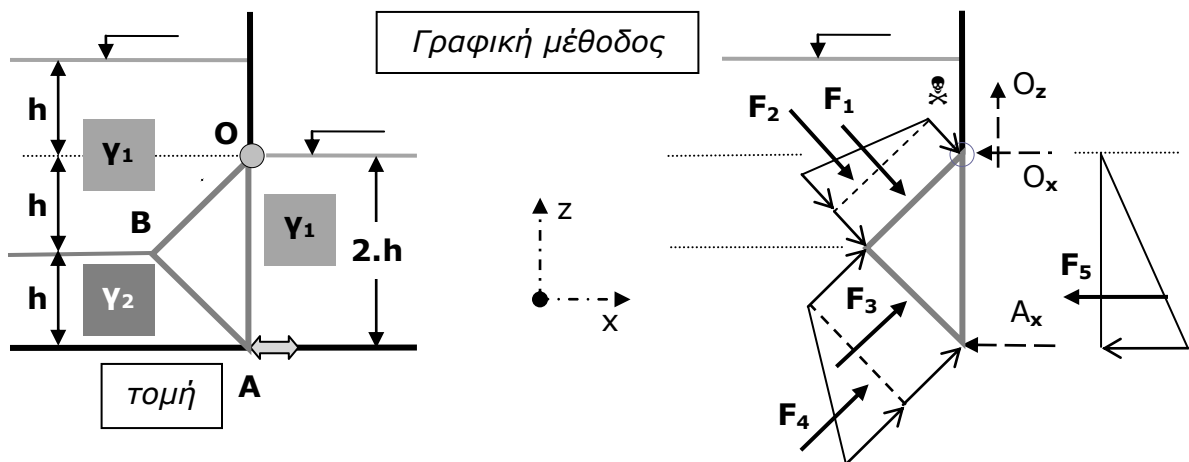
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **2.h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων, ανά μέτρο πλάτους του θυροφράγματος.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .

Σημείωση: Σε *φορείς*, των οποίων η μορφή παραμένει σταθερή σε όλο το πλάτος, είναι σύνηθες να υπολογίζουμε τις αντιδράσεις των στηρίξεων *ανά μέτρο πλάτους*.



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τις **αντιδράσεις**

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στις επιφάνειες του φορέα

Τα μήκη των πλευρών AB και BO είναι: $\sqrt{2} \cdot h$

$$F_1 = \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}, e_{AF1} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}, e_{AF3} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h}{3}, e_{AF4} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{OFi} + M_{OF5} = 0 \rightarrow A_x = \frac{3 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}{6} \cdot h^2 \cdot b$$

$\rightarrow A_x = 15,600 \text{ t} = 153,036 \text{ kN} \rightarrow A_x/m = 1,950 \text{ t/m} = 19,130 \text{ kN/m}$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + M_{AF5} = 0 \rightarrow O_x = \frac{6 \cdot \gamma_1 + \gamma_2}{6} \cdot h^2 \cdot b$$

$\rightarrow O_x = 21,300 \text{ t} = 208,953 \text{ kN} \rightarrow O_x/m = 2,663 \text{ t/m} = 26,119 \text{ kN/m}$

Επισημάνση 1: Η επιλογή της $\sum M_A = 0$ αντί της $\sum F_x = 0$, όταν (όπως <εδώ>) είναι ευχερής ο προσδιορισμός των μοχλοβραχιόνων, είναι προτιμότερη. Οι δύο αντιδράσεις προκύπτουν με ανεξάρτητο υπολογισμό και η $\sum F_x = 0$ είναι δυνατό να αξιοποιηθεί για έλεγχο!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + O_x - \left(\sum_1^4 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + F_5 = 0$$

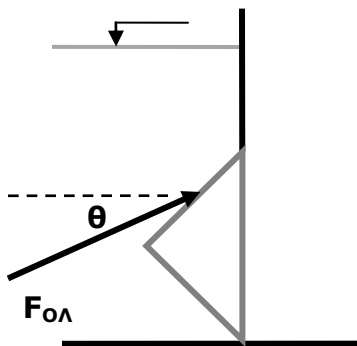
$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z - \left(\sum_1^2 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\sum_3^4 F_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \rightarrow O_z = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot h^2 \cdot b$$

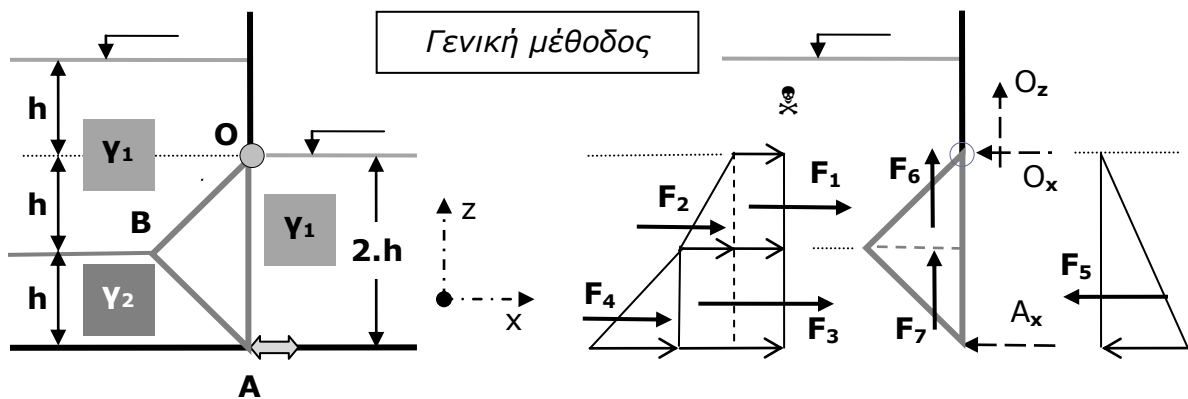
$\rightarrow O_z = -18,900 \text{ t} = -185,409 \text{ kN} \rightarrow O_z/m = -2,363 \text{ t/m} = -23,176 \text{ kN/m}$

$$F_{O\lambda} = \left[(\sum F_x)^2 + (\sum F_z)^2 \right]^{1/2} = \left[(3 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{h^2 \cdot b}{2} \rightarrow$$

$F_{O\lambda} = 41,459 \text{ t} = 406,709 \text{ kN}$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{3 \cdot \gamma_1 + \gamma_2} \rightarrow \tan \theta = 0,512195 \rightarrow \theta = 27,121^\circ$$





Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο** και τις **αντιδράσεις**. Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στους άξονες της μεθόδου.

$$F_1 = \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = \frac{h}{2}, e_{AF1} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{2 \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{4 \cdot h}{3}$$

$$F_3 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{3 \cdot h}{2}, e_{AF3} = \frac{h}{2}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{5 \cdot h}{3}, e_{AF4} = \frac{h}{3}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{OFi} + \sum_5^7 M_{OFi} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + M_{AF5} - \sum_6^7 M_{AFi} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + \left(\sum_6^7 F_i \right) = 0$$

Επισημάνση 2: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με τις δύο κατευθύνσεις – μεθόδους και είναι **εμφανέστατη** η **υπεροχή επιλογής** (κατά σειρά παρουσίασης) των μεθόδων, στο συγκεκριμένο πεδίο! (βλ. 2.2.1)

2.3.10 Η εφαρμογή αναφέρεται στο 2.2.4

Ορθογωνική διατομή διώρυγας φράζεται με αβαρές, άκαμπτο θυρόφραγμα **ΑΒΟΓ** σε όλο το πλάτος της **b**. Το θυρόφραγμα έχει διατομή ημικυκλίου με ακτίνα **h**. Το θυρόφραγμα στηρίζεται με γραμμική άρθρωση στον οριζόντιο άξονα **Ο** και απλή γραμμική στήριξη (κύλιση) στον οριζόντιο άξονα **Α**.

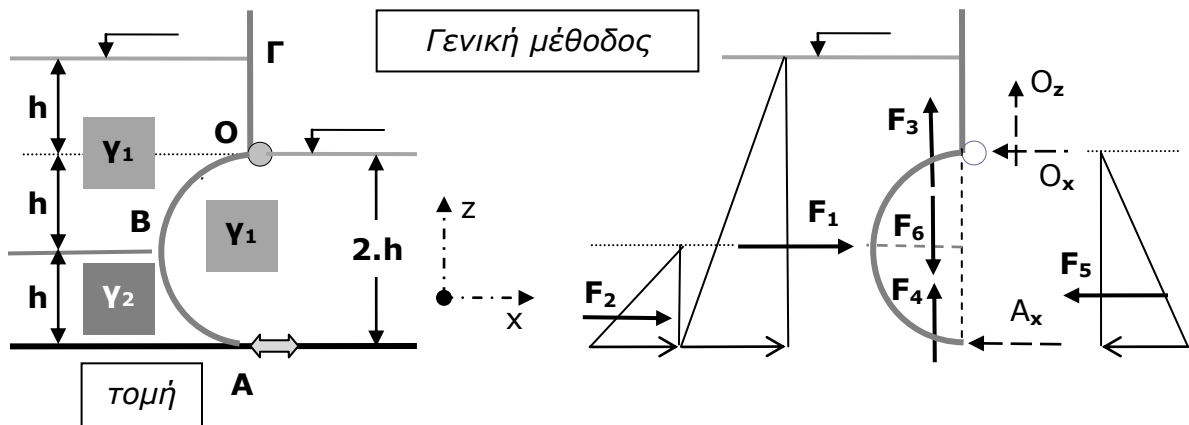
Ανάντη του θυροφράγματος η διώρυγα περιέχει δύο στρώσεις υγρών με βάθη **2.h** και **h** και ειδικά βάρη **γ_1** και **γ_2** αντιστοίχως. Κατόντη περιέχει μία στρώση υγρού με βάθος **2.h** και ειδικό βάρος **γ_1** (βλ. σχήμα).

Να υπολογιστούν – με χρήση όλων των κατευθύνσεων – μεθόδων επίλυσης:

1. Οι αντιδράσεις των στηρίξεων, ανά μέτρο πλάτους του θυροφράγματος.
2. Η συνολική δύναμη, η οποία ασκείται στο θυρόφραγμα από υδροστατικές πιέσεις. (μέτρο, διεύθυνση, κλίση ως προς οριζόντιο άξονα)

Αριθμητική εφαρμογή: **h = 1,5 m**, **b = 8 m**, **$\gamma_1 = 1,00 \text{ t/m}^3$** , **$\gamma_2 = 1,10 \text{ t/m}^3$** .

Σημείωση: Προσοχή στη διαφορετική μορφή του *φορέα* και της άρθρωσης!



Η **επιλογή** του συστήματος αξόνων **καθορίστηκε** από τη **μέθοδο** και τις **αντιδράσεις**. Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα από πιέσεις στους άξονες της μεθόδου

$$F_1 = \frac{9}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF1} = h, e_{AF1} = h$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{5 \cdot h}{3}, e_{AF2} = \frac{h}{3}$$

$$F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF3} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF3} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_4 = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma_2 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF4} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF4} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$F_5 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF5} = \frac{4 \cdot h}{3}, e_{AF5} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

$$F_6 = \frac{\pi}{2} \cdot \gamma_1 \cdot h^2 \cdot b \text{ και } e_{OF2} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}, e_{AF2} = \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow A_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^2 M_{OFi} + \sum_3^5 M_{OFi} - M_{OF6} = 0$$

$$\rightarrow A_x = \frac{8 \cdot \gamma_1 + 3 \cdot \gamma_2}{12} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow A_x = 16,950 \text{ t} = 166,280 \text{ kN} \rightarrow A_x/m = 2,119 \text{ t/m} = 20,785 \text{ kN/m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow O_x \cdot 2 \cdot h - \sum_1^4 M_{AFi} + \sum_5^6 M_{AFi} = 0$$

$$\rightarrow O_x = \frac{16 \cdot \gamma_1 + 3 \cdot \gamma_2}{12} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow O_x = 28,950 \text{ t} = 283,000 \text{ kN} \rightarrow O_x/m = 3,619 \text{ t/m} = 35,500 \text{ kN/m}$$

Επισήμανση 1: Η επιλογή της $\sum M_A = 0$ αντί της $\sum F_x = 0$, όταν (όπως <εδώ>) είναι ευχερής ο προσδιορισμός των μοχλοβραχιόνων, είναι προτιμότερη.

Οι δύο αντιδράσεις προκύπτουν με ανεξάρτητο υπολογισμό και η $\sum F_x = 0$ είναι δυνατό να αξιοποιηθεί για έλεγχο!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + O_x - \sum_1^2 F_i + F_5 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow O_z + \left(\sum_6^7 F_i \right) = 0 \rightarrow O_z = - \frac{\pi \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{4} \cdot h^2 \cdot b$$

$$\rightarrow O_z = -1,414 \text{ t} = -13,869 \text{ kN} \rightarrow O_z/m = -0,177 \text{ t/m} = -1,734 \text{ kN/m}$$

$$F_{o\lambda} = \left[\left(\sum F_x \right)^2 + \left(\sum F_z \right)^2 \right]^{1/2} = \left[4 \cdot (4 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)^2 + \pi^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{h^2 \cdot b}{4}$$

$$\rightarrow F_{o\lambda} = 45,922 \text{ t} = 450,493 \text{ kN}$$

$$\tan \theta = \frac{\sum F_z}{\sum F_x} = \frac{\pi \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{2 \cdot (4 \cdot \gamma_1 + \gamma_2)} \rightarrow \tan \theta = 0,030800 \rightarrow \theta = 1,764^\circ$$

Επισήμανση 2: Η συνολική δύναμη από πιέσεις είναι σχεδόν οριζόντια.

Προσοχή! ΔΕΝ διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου, διότι συμμετέχει και το τμήμα των πιέσεων στο ΟΓ.

Επισήμανση 3: Η άσκηση είναι δυνατό να επιλυθεί μόνο με μία από τις κατευθύνσεις – μεθόδους! (βλ. 2.2.1)