

Άσκηση 7

Δίνεται αμφίπακτη δοκός μήκους $L=6,00\text{m}$ με διατομή IPE270 από χάλυβα S235.

Αμελώντας τη διάτμηση και τον έλεγχο σε λειτουργικότητα, ζητείται:

- 1) Να υπολογιστεί το κατανεμημένο φορτίο και το αντίστοιχο βέλος στο μέσον του ανοίγματος:
 - α) για την πρώτη διαρροή (ελαστική ανάλυση – ελαστικός έλεγχος)
 - β) για την δημιουργία της πρώτης πλαστικής άρθρωσης (ελαστική ανάλυση – πλαστικός έλεγχος)
 - γ) για τον σχηματισμό μηχανισμού (πλαστική ανάλυση – πλαστικός έλεγχος)
- 2) Να γίνει το διάγραμμα φορτίου – παραμόρφωσης.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 7

Υλικά

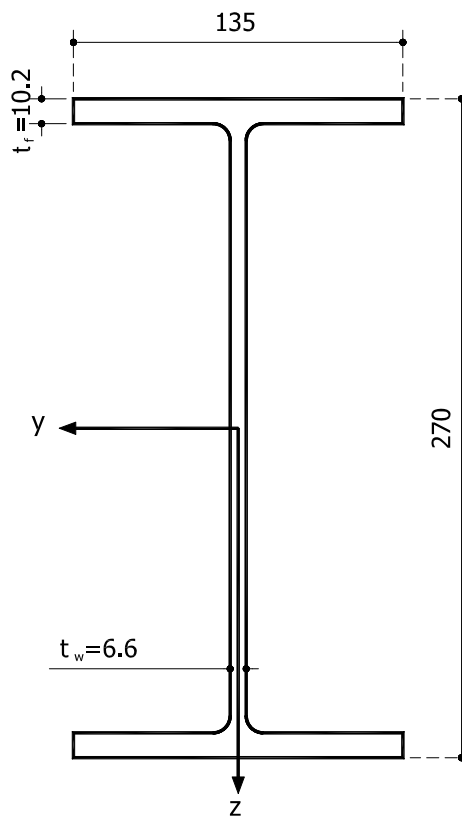
Ποιότητα δομικού χάλυβα S235 $f_y=235\text{MPa}=23,5\text{kN/cm}^2$ $f_u=360\text{MPa}=36,0\text{kN/cm}^2$
 $E=210000\text{MPa}=21000\text{kN/cm}^2$

1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

IPE 270

$$I_y=5790\text{cm}^4$$
$$W_{el,y}=428,9\text{cm}^3$$
$$W_{pl,y}=484,0\text{cm}^3$$

$$b=135\text{mm}$$
$$h=270\text{mm}$$
$$A=45,95\text{cm}^2$$
$$t_f=10,2\text{mm}$$
$$t_w=6,6\text{mm}$$
$$r=15\text{mm}$$



Σχήμα 1: Διατομή IPE270

2. ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

2.1. Κατηγορία κορμού

Με βάση τους πίνακες με τις πρότυπες διατομές και σύμφωνα με τον πίνακα για την κατηγοριοποίηση του κορμού έχουμε:

$$d=219,6\text{mm}$$

$$c/t=d/t_w=219,6/6,6=33,27<72\varepsilon$$

$$\text{όπου } \varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 1$$

και f_y το όριο διαρροής του χάλυβα σε MPa.
Επομένως ο κορμός ανήκει στην κατηγορία 1.

2.2. Κατηγορία πέλματος

Με βάση τους πίνακες με τις πρότυπες διατομές και σύμφωνα με τον πίνακα για την κατηγοριοποίηση του πέλματος έχουμε:

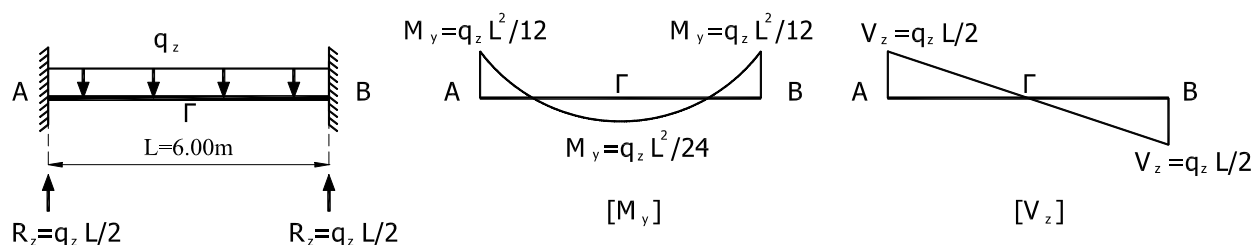
$$\frac{c}{t} = \frac{(b - t_w)/2 - r}{t_f} = \frac{(135 - 6,6)\text{mm}/2 - 15\text{mm}}{10,2\text{mm}} = 4,82 < 9\epsilon$$

όπου $\epsilon=1$

Επομένως και το πέλμα ανήκει στην κατηγορία 1.

2.3. Κατηγορία διατομής

Εφόσον και το πέλμα και ο κορμός ανήκουν στην κατηγορία 1 όλη η διατομή ανήκει στην κατηγορία 1. Έχουμε δικαίωμα ελαστικής και πλαστικής ανάλυσης καθώς και ελαστικού και πλαστικού ελέγχου.

3. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ**3.1. Εντατικά μεγέθη αμφίπακτης δοκού**

Σχήμα 2: Εντατικά μεγέθη αμφίπακτης δοκού

Το φορτίο που προκαλεί πρώτη διαρροή θεωρείται ότι εξαντλεί την αντοχή της δοκού για διατομές κατηγορίας 3. Είναι δηλαδή η μέγιστη αποδεκτή τιμή του φορτίου σχεδιασμού. Πρώτη διαρροή θα παρατηρηθεί στις ακραίες ίνες των διατομών που βρίσκονται στις θέσεις μέγιστης ροπής (στηρίξεις). Ο έλεγχος επάρκειας μιας διατομής, με βάση την ελαστική στατική ανάλυση και θεώρηση ελαστικής αντοχής της διατομής, μπορεί να εφαρμόζεται και σε διατομές των κατηγοριών 1 και 2.

3.2. Φορτίο που αντιστοιχεί στην πρώτη διαρροή

Σύμφωνα με τον ελαστικό έλεγχο σε μονοαξονική κάμψη για τις διατομές A και B της δοκού θα πρέπει να ισχύει:

$$M_{Ed}^{A,B} \leq M_{el,Rd} \Rightarrow qL^2/12 \leq M_{el,Rd} = \frac{W_{el} \times f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{428,9\text{cm}^3 \times 23,5\text{kN/cm}^2}{1,00} = 10079,15\text{kNcm}$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο για ελαστική ανάλυση και ελαστική αντοχή είναι:

$$q_{Ed,el} = \frac{12 \times M_{el,Rd}}{L^2} = \frac{12 \times 10079,15\text{kNcm}}{(600\text{cm})^2} = 0,336\text{kN/cm}$$

Στο μέσον του ανοίγματος (διατομή Γ) η ροπή για το παραπάνω φορτίο είναι:

$$M_{Ed}^{\Gamma} = q_{Ed,el} L^2/24 = 0,336\text{kN/cm} \times (600\text{cm})^2/24 = 5040\text{kNcm}^2 = M_{el,Rd}/2$$

3.3. Βέλος κάμψης

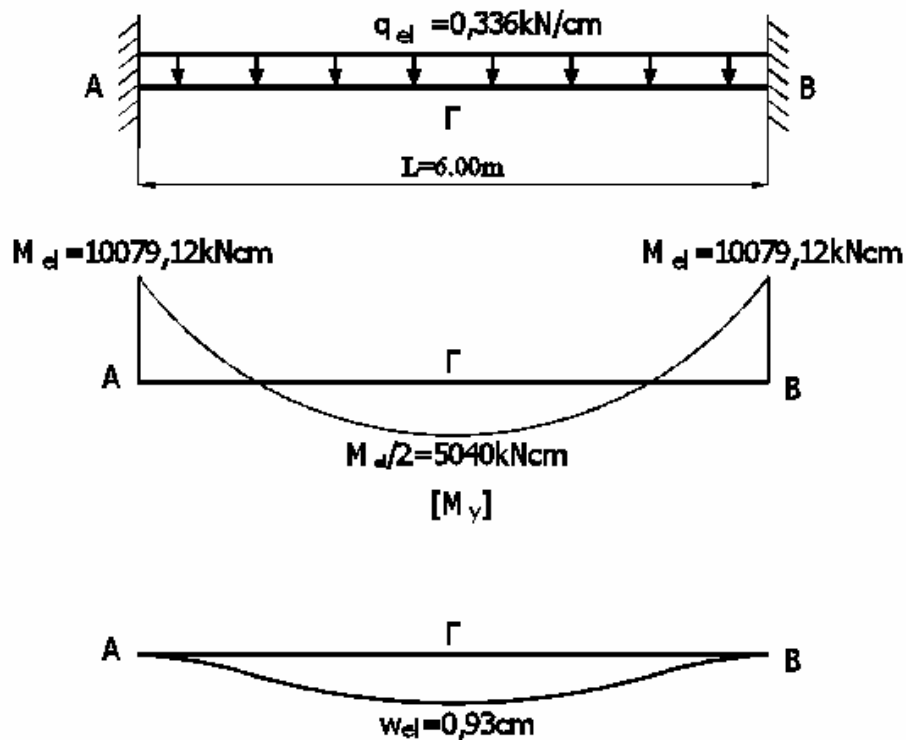
$$\text{Μέγιστο βέλος στο μέσον αμφίπακτης δοκού: } w = \frac{qL^4}{384EI_y}$$

Για το φορτίο που υπολογίσαμε, το βέλος στο μέσον της αμφίπακτης δοκού θα είναι:

$$w_{el} = \frac{q_{Ed,el} L^4}{EI_y} = \frac{0,336 \text{ kN/cm} \times (600 \text{ cm})^4}{384 \times 21000 \text{ kN/cm}^2 \times 5790 \text{ cm}^4} = 0,93 \text{ cm}$$

Το βέλος που υπολογίζεται έχει θεωρητική αξία μόνο και δεν έχει σχέση με το βέλος που θεωρούμε στην οριακή κατάσταση λειτουργικότητας (γιατί το 0,336 kN/cm είναι φορτίο σχεδιασμού).

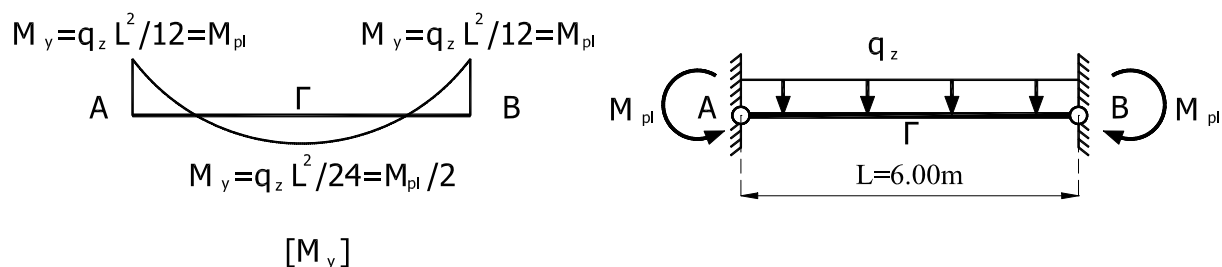
3.4. Διάγραμμα ροπών και βέλος κάμψεως για φορτίο που αντιστοιχεί στην πρώτη διαρροή



Σχήμα 3: Πρώτη διαρροή στην αμφίπακτη δοκό

4. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ

Το φορτίο που προκαλεί στη θέση μέγιστης ροπής, ροπή ίση με την πλαστική ροπή της διατομής θεωρείται οριακό για τη δοκό (ίσο με τη μέγιστη αποδεκτή τιμή του φορτίου σχεδιασμού) όταν αυτή έχει διατομή κατηγορίας 2. Ο έλεγχος επάρκειας μιας διατομής με βάση την ελαστική στατική ανάλυση και θεώρηση της πλαστικής αντοχής της διατομής επιτρέπεται να εφαρμόζεται και σε δοκούς με διατομή κατηγορίας 1.



Σχήμα 4: Πλήρης πλαστικοποίηση των άκρων της αμφίπακτης δοκού

4.1. Φορτίο που αντιστοιχεί στη δημιουργία των δύο πρώτων πλαστικών αρθρώσεων

Οι μεγαλύτερες ροπές παρατηρούνται στα άκρα της αμφίπακτης δοκού. Επομένως πρώτα θα πλαστικοποιηθούν οι διατομές Α και Β. Σύμφωνα με τον πλαστικό έλεγχο σε μονοαξονική κάμψη για τις διατομές Α και Β της δοκού θα πρέπει να ισχύει:

$$M_{Ed}^{A,B} \leq M_{pl,Rd} \Rightarrow qL^2/12 \leq M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} \times f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{484,0 \text{ cm}^3 \times 23,5 \text{ kN/cm}^2}{1,00} = 11374 \text{ kNcm}$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο για ελαστική ανάλυση – πλαστικό έλεγχο που θα προκαλέσει πλαστικές αρθρώσεις στις διατομές Α και Β της δοκού είναι:

$$q_{Ed,pl} = \frac{12 \times M_{pl,Rd}}{L^2} = \frac{12 \times 11374 \text{ kNcm}}{(600 \text{ cm})^2} = 0,379 \text{ kN/cm}$$

Στο μέσον του ανοίγματος (διατομή Γ) η ροπή για το παραπάνω φορτίο είναι:

$$M_{Ed}^{\Gamma} = q_{Ed,pl} L^2 / 24 = 0,379 \text{ kN/cm} \times (600 \text{ cm})^2 / 24 = 5685 \text{ kNcm}^2 \approx M_{pl,Rd} / 2 < M_{el} = 10079,15 \text{ kNcm}$$

Επομένως τη στιγμή που πλαστικοποιούνται πλήρως οι διατομές Α και Β στα άκρα της δοκού, όλη η διατομή Γ στο μέσον του ανοίγματος βρίσκεται ακόμα στην ελαστική περιοχή με τάσεις μικρότερες του ορίου διαρροής και με ροπή κάμψης ίση με $M_{pl}/2$. Με την πλαστικοποίηση των ακραίων διατομών σχηματίζονται πλαστικές αρθρώσεις και αλλάζει το στατικό σύστημα από αμφίπακτη δοκό σε αμφιέρειστη δοκό με συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα, ίσες με M_{pl} .

4.2. Σχέση ροπής πρώτης διαρροής και ροπής πλήρους διαρροής σε διπλά ταυ

Παρατηρούμε ότι για τη διατομή IPE270 ισχύει:

$$\frac{M_{pl,Rd}}{M_{el,Rd}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{484,0 \text{ cm}^3}{428,9 \text{ cm}^3} = 1,13$$

που σημαίνει ότι η ροπή πλήρους διαρροής είναι 13% μεγαλύτερη από τη ροπή πρώτης διαρροής. Ο συντελεστής 1,13 ονομάζεται και συντελεστής σχήματος της διατομής (shape factor). Στα διπλά ταυ ο συντελεστής αυτός κυμαίνεται από 1,10 (στενές διατομές) έως 1,15 (πλατύτελμα διπλά ταυ).

4.3. Βέλος κάμψης

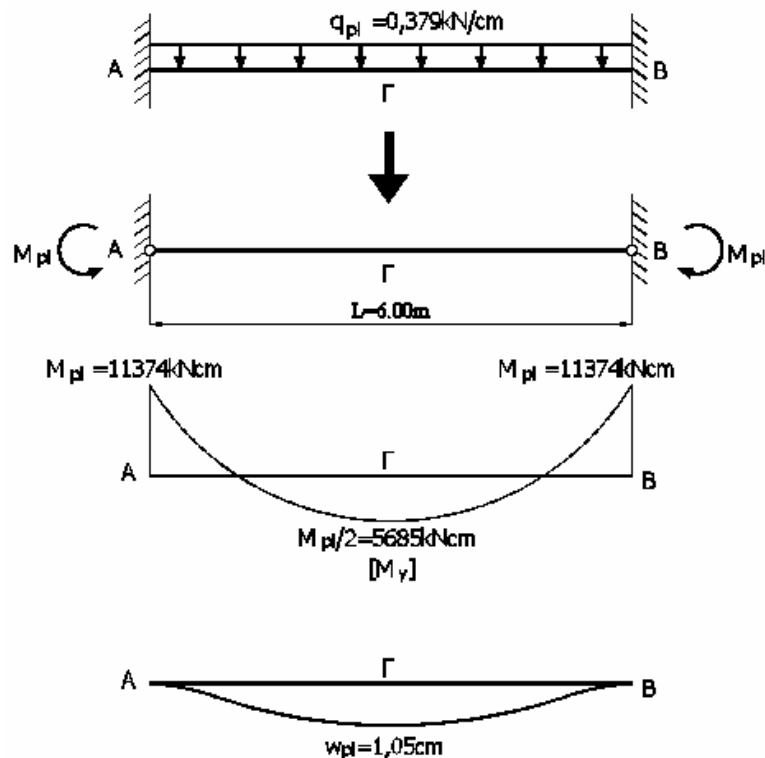
$$\text{Μέγιστο βέλος στο μέσον αμφίπακτης δοκού: } w = \frac{qL^4}{384EI_y}$$

Για το φορτίο που υπολογίσαμε, το βέλος στο μέσον της αμφίπακτης δοκού θα είναι:

$$w_{pl} = \frac{q_{Ed,pl} L^4}{384EI_y} = \frac{0,379 \text{ kN/cm} \times (600 \text{ cm})^4}{384 \times 21000 \text{ kN/cm}^2 \times 5790 \text{ cm}^4} = 1,05 \text{ cm}$$

Ο τύπος του βέλους για την περίπτωση αυτή είναι προσεγγιστικός, ικανοποιητικός για την προσέγγιση της ακριβούς τιμής, αλλά θεωρητικά όχι ακριβής με την έννοια ότι είναι τύπος ελαστικής ανάλυσης, ενώ υπάρχουν ζώνες διαρροής (περιοχές μη ελαστικής συμπεριφοράς) στα άκρα της δοκού.

4.4. Διάγραμμα ροών και βέλος κάμψεως για φορτίο που αντιστοιχεί στη δημιουργία των δύο πρώτων πλαστικών αρθρώσεων



Σχήμα 5: Πρώτη πλαστική άρθρωση στην αμφίπακτη δοκό

5. ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ

Μετά την πλαστικοποίηση των ακραίων διατομών στις στηρίξεις, η αντοχή της δοκού εξαντλείται όταν σχηματιστεί πλαστική άρθρωση στο μέσον του ανοίγματος και ο φορέας μετατραπεί σε μηχανισμό (πλαστική στατική ανάλυση). Οι διατομές στις πακτώσεις δεν αρκεί να έχουν την ικανότητα να αναπτύξουν την πλαστική ροπή, αλλά πρέπει επιπλέον να αναπτύξουν στροφές χωρίς να εκδηλωθεί τοπικός λυγισμός. Ο προσδιορισμός της αντοχής μίας δοκού με βάση την πλαστική στατική ανάλυση και θεώρηση των πλαστικών αντοχών των διατομών επιτρέπεται μόνο σε διατομές κατηγορίας 1.

5.1. Φορτίο που αντιστοιχεί στη δημιουργία της τρίτης πλαστικής άρθρωσης

Για να πλαστικοποιηθεί η διατομή Γ θα πρέπει να προστεθεί ένα φορτίο που να προκαλεί στην αμφιέριστη πλέον δοκό, ροπή ίση με $M_{pl}/2$. Δηλαδή θα πρέπει:

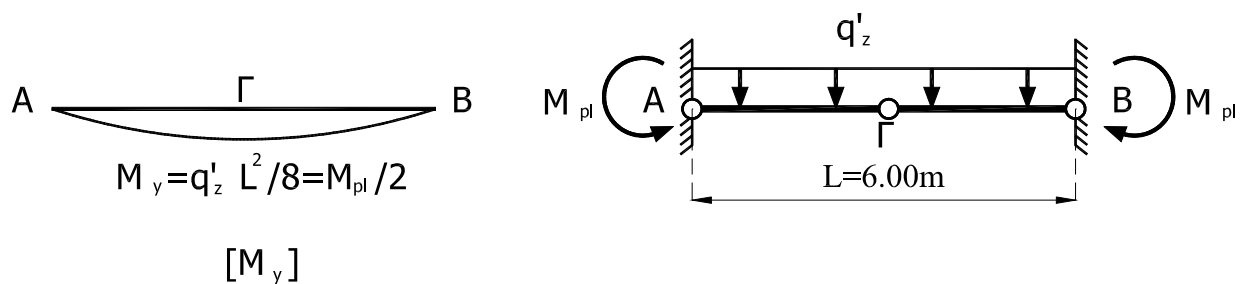
$$M_{Ed} = M_{pl,Rd}/2 \Rightarrow qL^2/8 \leq M_{pl,Rd}/2$$

Το επιπλέον φορτίο που μπορεί να πάρει η διατομή Γ στο μέσον του ανοίγματος προκειμένου να πλαστικοποιηθεί πλήρως, είναι:

$$\Rightarrow q'_{Ed,pl} = \frac{4 \times M_{pl}}{L^2} = \frac{4 \times 11374\text{ kNcm}}{(600\text{ cm})^2 \times 1,00} = 0,126\text{ kN/cm}$$

Επομένως το συνολικό φορτίο που χρειάζεται η διατομή Γ για να πλαστικοποιηθεί πλήρως είναι:

$$q_{Ed,pl} + q'_{Ed,pl} = 0,379\text{ kN/cm} + 0,126\text{ kN/cm} = 0,505\text{ kN/cm}$$



Σχήμα 6: Πλήρης πλαστικοποίηση της διατομής στο μέσον της δοκού

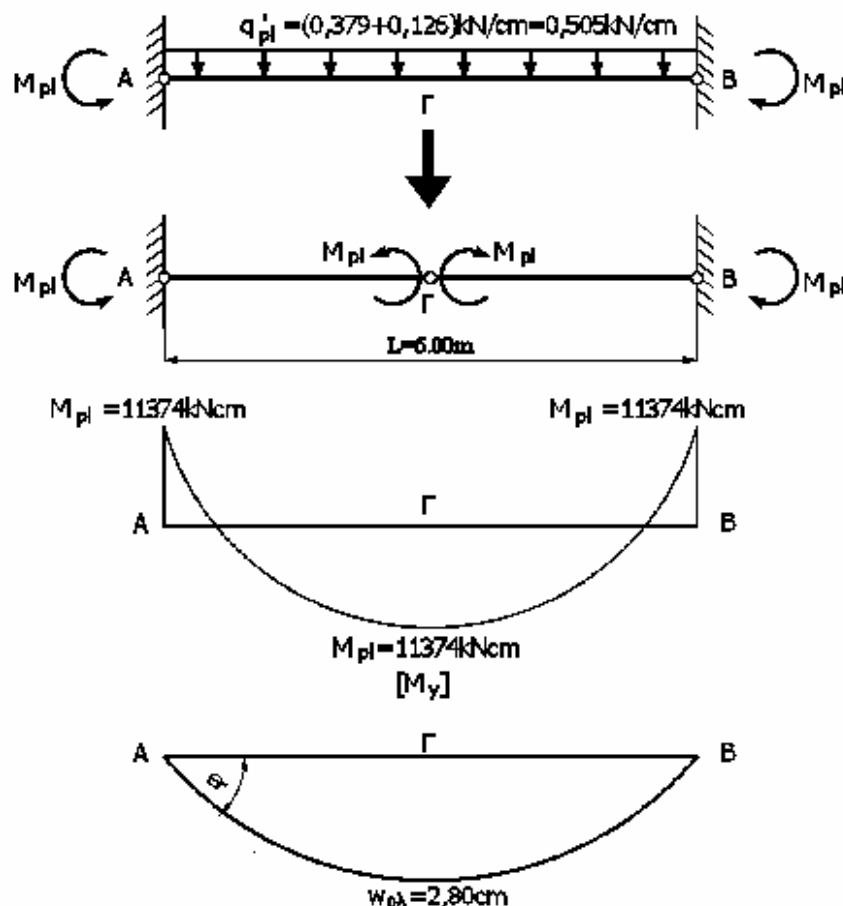
5.2. Βέλος κάμψης

Μέγιστο βέλος στο μέσον αμφιέρειστης δοκού: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$

Για το επιπλέον φορτίο που υπολογίσαμε, το βέλος στο μέσον της αμφιέρειστης πλέον δοκού θα είναι:

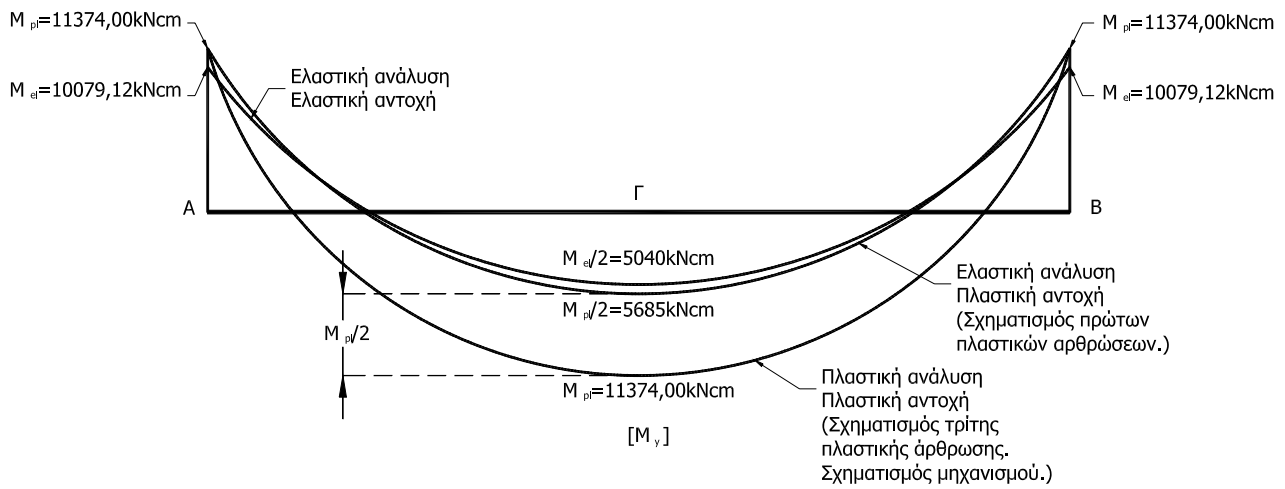
$$w' = \frac{5qL^4}{384EI_y} = \frac{5 \times 0,126 \text{ kN/cm} \times (600 \text{ cm})^4}{384 \times 21000 \text{ kN/cm}^2 \times 5790 \text{ cm}^4} = 1,75 \text{ cm}$$

Το συνολικό βέλος στον μέσον της δοκού τη στιγμή της πλήρους πλαστικοποίησης της διατομής Γ θα είναι:
 $w_{\text{ολ}} = w_{\text{pl}} + w' = 1,05 + 1,75 = 2,80 \text{ cm}$

5.3. Διάγραμμα ροπών και βέλος κάμψεως για φορτίο που αντιστοιχεί στη δημιουργία της τρίτης πλαστικής άρθρωσης και στη δημιουργία μηχανισμού

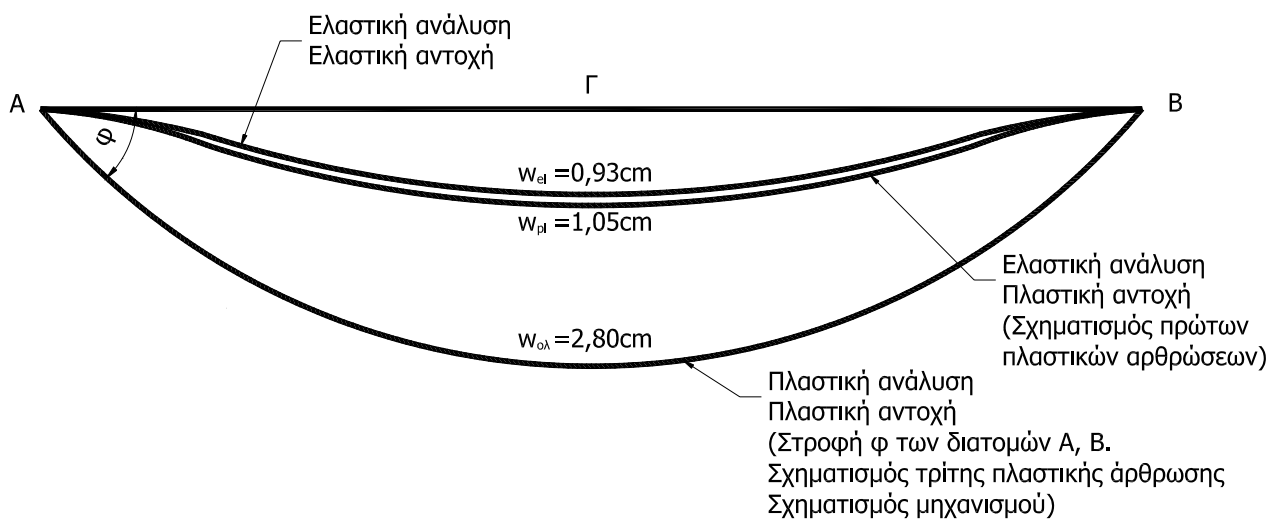
Σχήμα 7: Δεύτερη πλαστική άρθρωση στην αμφίπακτη δοκό – δημιουργία μηχανισμού

6. ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΡΟΠΩΝ ΚΑΜΨΕΩΣ



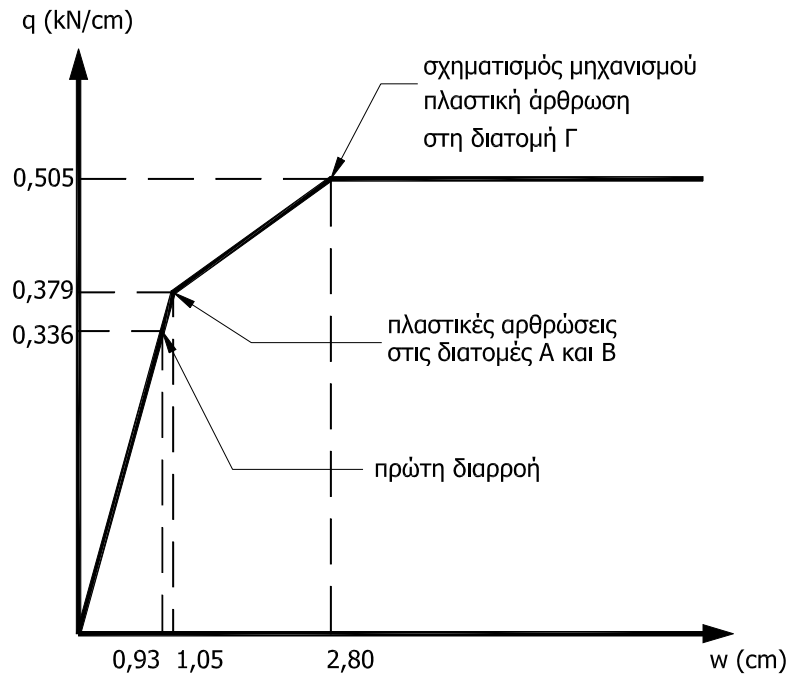
Σχήμα 8: Συνολικά διαγράμματα ροπών

7. ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΒΕΛΗ



Σχήμα 9: Συνολικά βέλη

8. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΦΟΡΤΙΟΥ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



Σχήμα 10: Διάγραμμα φορτίου – παραμορφώσεων στο μέσον του ανοίγματος