$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $A \in R^{n \times n}$, να δείξετε ότι η λ είναι και ιδιοτιμή του A^T και ότι η 1/λ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

Β. Επαναληπτικές Μέθοδοι

Όταν ένα σύστημα έχει μεγάλο αριθμό εξισώσεων και πολλά μηδενικά στοιχεία, οι άμεσες μέθοδοι επίλυσης αυτού είναι ασύμφορες, γιατί απαιτούν αρκετή υπολογιστική εργασία και γιατί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος στη μνήμη ενός Η/Υ, αφού αποθηκεύουν και τα μηδενικά στοιχεία. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης, δηλαδή, με τη βοήθεια επαναληπτικών τύπων, δημιουργούμε ακολουθίες, που συγκλίνουν στη λύση του συστήματος. Συστήματα μεγάλων διαστάσεων με πολλά μηδενικά στοιχεία εμφανίζονται πολύ συχνά στην ανάλυση κυκλωμάτων, στην αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων και σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

2.11 Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

Έστω ότι το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b \tag{2.22}$$

είναι ομαλό, δηλαδή $\det A \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία μοναδική λύση. Για να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη λύση του (2.22), γράφουμε τον πίνακα A υπό μορφή διαφοράς δύο πινάκων:

$$A = Q - P$$

όπου ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος. Τότε το (2.22) γίνεται

$$(Q-P)x = b$$

ή

$$Qx = Px + b$$

ή

$$x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b$$

Αν θέσουμε $Q^{-1}P = D$ και $Q^{-1}b = c$, τότε θα έχουμε

$$x = Dx + c \tag{2.23}$$

Η επαναληπτική μέθοδος ορίζεται από την (2.23) ως εξής

$$x^{(k)} = Dx^{(k-1)} + c, \tag{2.24}$$

όπου $k = 1, 2, \ldots$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)}$ = δοθέν.

Θεώρημα 2.11.1

Η ακολουθία $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ που κατασκευάζεται από την (2.24), συγκλίνει στη λύση x του συστήματος (2.22), αν και μόνο αν

$$\lim_{k\to\infty} D^k = 0 \tag{2.25}$$

Απόδειξη

Αφαιρώντας από την (2.24) την (2.23) έχουμε

$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= D(x^{(k-1)} - x) = \\ &= D^2(x^{(k-2)} - x) = \\ &\vdots \\ &= D^k(x^{(0)} - x) \end{aligned}$$

Αν $\lim_{k\to\infty} D^k = 0$, τότε $\lim_{k\to\infty} \|D^k\| = 0$ για κάποια νόρμα (φυσική).

Από την ανισότητα

$$\|x^{(k)} - x\| \le \|D^k\| \cdot \|x^{(0)} - x\|$$

προκύπτει ότι $x^{(k)} \to x$ με $k \to \infty$, $\forall x^{(0)} \in R^n$.

Αντίστροφα, αν $x^{(k)} \to x$ με $k \to \infty$, $\forall x^{(0)} \in R^n$, τότε $\|x^{(k)} - x\|_1 \to 0$ με $k \to \infty$.

Θέτοντας διαδοχικά

$$x^{(0)} = x + d_j,\ j = 1, \ldots, n,\ \text{όπου}\ d_j = (0, 0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0)$$

θα έχουμε

$$x^{(k)} - x = D^k d_j = (\text{στήλη } j \text{ του } D^k) \to 0,\ \text{με } k \to \infty \text{ και } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Επομένως

$$\left\| D^k \right\| \to 0 \ \text{με } k \to \infty$$

και η (2.25) ισχύει.

Λήμμα 2.11.1

Αν η φασματική ακτίνα $\varrho(D) < 1$, τότε ο πίνακας $(I - D)^{-1}$ υπάρχει και ισχύει

$$(I - D)^{-1} = I + D + D^2 + \ldots$$

Απόδειξη

Για κάθε ιδιοτιμή λ του D, η τιμή $(1 - \lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $I - D$. Επειδή είναι $|\lambda| \le \varrho(D) < 1$, έπεται ότι καμία ιδιοτιμή του $I - D$ δεν μπορεί να είναι μηδέν και επομένως, ο $I - D$ δεν μπορεί να είναι μονοδιάστατος. Έστω $S_n = I + D + D^2 + \ldots + D^n$. Τότε θα είναι

$$(I - D)S_n = I - D^{n+1}$$

και επειδή ο D είναι συγκλίνων θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}(I - D)S_n = \lim_{n\to\infty}(I - D^{n+1}) = I.$$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(I - D)^{-1}$.

Θεώρημα 2.11.2

Για κάθε διάνυσμα $x^{(0)} \in R^n$, η ακολουθία των διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$x^{(k)} = Dx^{(k-1)} + c,\ \text{με } k = 1, 2, \ldots \text{ και } c \neq 0 \qquad (2.26)$$