

5. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Α. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Έστω $Ax = b$ ένα ομαλό γραμμικό σύστημα $n \times n$. Για να ορίσουμε μια επαναληπτική μέθοδο επίλυσης του συστήματος αυτού, επιλέγουμε πρώτα δύο πίνακες Q και P , όπου ο Q είναι ομαλός και εύκολα αντιστρέψιμος, και γράφουμε τον πίνακα A σαν διαφορά των δύο πινάκων

$$A = Q - P.$$

Έχουμε τότε

$$Ax = (Q - P)x = b,$$

άρα

$$x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b.$$

Θέτοντας

$$C = Q^{-1}P \quad \text{και} \quad d = Q^{-1}b,$$

παίρνουμε το γραμμικό σύστημα σε μορφή σταθερού σημείου

$$(1) \quad x = Cx + d.$$

Η λύση x είναι εδώ σταθερό σημείο του γραμμικού μετασχηματισμού $y = Cx + d$.

Το σύστημα (1) είναι προφανώς ισοδύναμο με το αρχικό $Ax = b$. Η **μέθοδος Σταθερού Σημείου** που αντιστοιχεί στην επιλογή των πινάκων P και Q γράφεται τότε

$$(2) \quad x_k = Cx_{k-1} + d, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x_0 \text{ δεδομένο,}$$

και κατασκευάζει επαναληπτικά μια ακολουθία διανυσμάτων (x_k) , ξεκινώντας από ένα αρχικό x_0 . Ο πίνακας C καλείται **πίνακας των επαναλήψεων** της μεθόδου.

Παρατήρηση. Αν η ακολουθία (x_k) της μεθόδου συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα x , τότε, από τον ορισμό της μεθόδου, προκύπτει εύκολα ότι το x είναι λύση του συστήματος (άσκηση).

Θεώρημα 1. Η ακολουθία που παράγει η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει στη μοναδική λύση x του συστήματος $Ax = b$, για κάθε αρχικό $x_0 \in \mathbf{R}^n$, αν και μόνο αν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = O.$$

Απόδειξη. Από τις (1) και (2), έχουμε

$$x_k - x = C(x_{k-1} - x) = C^2(x_{k-2} - x) = \dots = C^k(x_0 - x).$$

Αν τώρα $C^k \rightarrow O$, τότε, για κάποια νόρμα στον $\mathbf{R}^n$ και την αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα, έχουμε

$$\|x_k - x\| \leq \|C^k\| \|x_0 - x\| \rightarrow 0,$$

που δείχνει ότι $x_k \rightarrow x$.

Αντίστροφα, αν $x_k \rightarrow x$ για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}^n$, τότε θέτοντας διαδοχικά, για $j = 1, \dots, n$

$$x_0 = x + e_j, \quad \text{όπου } e_j = (0, 0, \dots, 1_j, \dots, 0)^T,$$

βλέπουμε ότι για κάθε $j = 1, \dots, n$

$$x_k - x = C^k e_j = (\text{στήλη } j \text{ του } C^k) \rightarrow 0, \quad \text{όταν } k \rightarrow \infty.$$

Επομένως

$$\|C^k\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} C^k = O.$$

Θεώρημα 2. Αν υπάρχει νόρμα πίνακα τέτοια ώστε

$$\|C\| < 1,$$

τότε η ακολουθία (x_k) που παράγει η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει στο x , για κάθε αρχικό $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Απόδειξη. Έχουμε προφανώς

$$\|C^k\| = \|CC^{k-1}\| \leq \|C\| \|C^{k-1}\| \leq \dots \leq \|C\|^k \rightarrow 0,$$

και το θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 1.

Θεώρημα 3. Η ακολουθία που παράγει η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει στη λύση του συστήματος $Ax = b$, για κάθε αρχικό διάνυσμα $x_0 \in \mathbf{R}^n$, αν και μόνο αν

$$\rho(C) < 1,$$

ή, ισοδύναμα, υπάρχει φυσική νόρμα πίνακα τέτοια ώστε $\|C\| < 1$.

Απόδειξη. Αν η ακολουθία (x_k) συγκλίνει, τότε έχουμε από το Θεώρημα 1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C^k\| = 0,$$

για κάποια φυσική νόρμα. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα y_i , με $\|y_i\| = 1$, του C , έχουμε

$$\|C^k\| = \max_{\|y\|=1} \|C^k y\| \geq \|C^k y_i\| = \|\lambda_i^k y_i\| = |\lambda_i|^k \rightarrow 0, \text{ όταν } k \rightarrow \infty,$$

άρα $|\lambda_i| < 1$, για $i = 1, \dots, n$, και $\rho(C) < 1$.

Αντίστροφα, αν $\rho(C) < 1$, από το Θεώρημα 5, §4, υπάρχει φυσική νόρμα τέτοια ώστε

$$\rho(C) \leq \|C\| < 1,$$

και από το Θεώρημα 3 η μέθοδος συγκλίνει.

Θεώρημα 4 (Εκτιμήσεις σφάλματος). Αν $\|C\| < 1$ για μια φυσική (ή συμβατή) νόρμα πίνακα, τότε ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος

$$(α) \quad \|x_k - x\| \leq \|C^k\| \|x_0 - x\|,$$

$$(β) \quad \|x_k - x\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x_{k-1} - x_k\|,$$

$$(γ) \quad \|x_k - x\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x_0 - x_1\|.$$

Απόδειξη. Η εκτίμηση (α) έχει ήδη αποδειχθεί στο Θεώρημα 1. Για τη (β), έχουμε

$$\|x_{k-1} - x\| \leq \|x_{k-1} - x_k\| + \|x_k - x\| \leq \|x_{k-1} - x_k\| + \|C\| \|x_{k-1} - x\|,$$

$$\|x_{k-1} - x\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \|x_{k-1} - x_k\|,$$

$$\|x_k - x\| \leq \|C\| \|x_{k-1} - x\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x_{k-1} - x_k\|.$$

Η εκτίμηση (γ) προκύπτει άμεσα από τη (β) και την ανισότητα

$$\|x_{k-1} - x_k\| \leq \|C\| \|x_{k-2} - x_{k-1}\|.$$

Η εκτίμηση (α) έχει θεωρητικό μόνο ενδιαφέρον αφού χρησιμοποιεί την άγνωστη ακριβή λύση x . Οι εκτιμήσεις σφάλματος (α) και (γ) δεν προϋποθέτουν τον υπολογισμό του x_k και γι' αυτό λέγονται *εκ των πρότερων* (a priori) εκτιμήσεις. Η *εκ των υστέρων* (a posteriori) εκτίμηση (β) προϋποθέτει τον υπολογισμό αυτό, αλλά είναι ισχυρότερη της (γ) (γιατί;). Η εκτίμηση (α) δείχνει ότι, για δεδομένη νόρμα στον $\mathbf{R}^n$, με την παραγόμενη φυσική νόρμα πίνακα, και εφ' όσον ισχύει $\|C\| < 1$, όσο μικρότερη η νόρμα $\|C\|$, τόσο ταχύτερη σχετικά με τη νόρμα αυτή είναι η μέθοδος. Επιπλέον, η εκτίμηση (α) σε συνδυασμό με την ιδιότητα της φασματικής ακτίνας (Θεώρημα 5, §4)

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \text{ φυσική}} \|A\|,$$

δείχνουν ότι, αν η μέθοδος συγκλίνει, δηλαδή αν $\rho(C) < 1$, τότε όσο μικρότερη η φασματική ακτίνα τόσο απόλυτα ταχύτερη είναι η μέθοδος, με την έννοια ότι έχει το μικρότερο κάτω φράγμα σταθερών $\|C\|$ στην εκτίμηση σφάλματος (α). Η φασματική ακτίνα αποτελεί έτσι ένα μέτρο της *απόλυτης ταχύτητας σύγκλισης* της συγκεκριμένης μεθόδου.

B. ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI

Στη μέθοδο Jacobi, επιλέγουμε τους πίνακες

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

και υποθέτουμε ότι $a_{ii} \neq 0$ για $i = 1, \dots, n$. Έχουμε εδώ

$$C = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad d = Q^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix},$$

και η μέθοδος γράφεται

$$x_k = Cx_{k-1} + d.$$

Θέτοντας $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})^T$, οι επαναληπτικές εξισώσεις κατά συνιστώσα είναι

$$x_{ik} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j, j \neq i} a_{ij} x_{jk-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Θεώρημα 5. Αν ο πίνακας A έχει *διαγώνια κυριαρχία* (κατά γραμμή), δηλ. ισχύει

$$|a_{ii}| > \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα x_0 .

Απόδειξη. Αν ο πίνακας A έχει διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμή, τότε

$$\max_i \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \|C\|_\infty < 1,$$

και το θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 2.

Θεώρημα 6. Αν ο πίνακας A ικανοποιεί την ανισότητα

$$\max_j \sum_{i, i \neq j} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1,$$

τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα x_0 .

Απόδειξη. Η παραπάνω ανισότητα ισοδυναμεί με

$$\|C\|_1 < 1.$$

Σημειωτέον ότι η ανισότητα του Θεωρήματος 6 δεν σημαίνει ότι ο πίνακας A έχει διαγώνια κυριαρχία κατά στήλη. Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι η διαγώνια κυριαρχία κατά στήλη εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου.

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

το οποίο έχει διαγώνια κυριαρχία. Έχουμε εδώ

$$C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad d = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

και τις επαναληπτικές εξισώσεις

$$x_{1k} = \frac{1}{4}(1 + x_{2,k-1} + x_{3,k-1}),$$

$$x_{2k} = \frac{1}{4}(2 + x_{1,k-1} + x_{4,k-1}),$$

$$x_{3k} = \frac{1}{4}(x_{1,k-1} + x_{4,k-1}),$$

$$x_{4k} = \frac{1}{4}(1 + x_{2,k-1} + x_{3,k-1}).$$

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.25	0.5	0.	0.25
1	0.375	0.625	0.125	0.375
2	0.4375	0.6875	0.1875	0.4375
3	0.4687	0.7187	0.2187	0.4687
4	0.4844	0.7344	0.2344	0.4844

Πίνακας 1

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Jacobi με αρχικό διάνυσμα $x_0 = (0.25, 0.5, 0, 0.25)^T$, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1. Η ακριβής λύση του συστήματος είναι $x = (0.5, 0.75, 0.25, 0.5)^T$. Βρίσκουμε εδώ την εκτίμηση σφάλματος

$$\|x_4 - x\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|x_3 - x_4\|_\infty = \frac{0.5}{1 - 0.5} 0.0157 = 0.0157.$$

Αλγόριθμος.

Διαβάζουμε τα $n, A, b, x, \varepsilon, N$ (μεγάλος αριθμός ασφαλείας)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ C

$$\|C\|_\infty = \max_i \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

Για $k = 1, \dots, N$ εκτελούμε μέχρι το 1

$y = x$

Για $i = 1, \dots, n$ εκτελούμε μέχρι το 2

$$2 \quad x_i = (b_i - \sum_{j, j \neq i} a_{ij} y_j) / a_{ii}$$

$$e = \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|x - y\|_\infty \quad (\text{φράγμα σφάλματος})$$

Εκτυπώνουμε τα k, x, e

1 Αν $e \leq \varepsilon$, σταματάμε

Εκτυπώνουμε “Όριο επαναλήψεων” και σταματάμε

Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL

Στη μέθοδο Gauss-Seidel, επιλέγουμε τους πίνακες

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & 0 & \dots & \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix},$$

και υποθέτουμε ότι $a_{ii} \neq 0$ για $i = 1, \dots, n$. Επειδή ο πίνακας Q δεν είναι άμεσα αντιστρέψιμος, γράφουμε εδώ την επαναληπτική μέθοδο στη μορφή

$$Qx_k = Px_{k-1} + b,$$

που αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα ως προς x_k , με ομαλό κάτω-τριγωνικό πίνακα Q . Το σύστημα αυτό μπορεί άρα να λυθεί με **εμπρός-αντικατάσταση**

$$x_{ik} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{j,k} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_{j,k-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Θεώρημα 7. Αν ο πίνακας A έχει διαγώνια κυριαρχία, τότε ο πίνακας $C = Q^{-1}P$ των επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel ικανοποιεί

$$\|C\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty < 1,$$

όπου C_J ο πίνακας της μεθόδου Jacobi, και άρα (Θεώρημα 2) η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα x_0 . Επιπλέον, ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|x_{k-1} - x_k\|_\infty.$$

Απόδειξη. Από τη διαγώνια κυριαρχία του A , έχουμε

$$\max_i \sum_{j, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \|C_J\|_\infty < 1.$$

Θέτοντας, για $u \in \mathbf{R}^n$, με $\|u\|_\infty = 1$

$$v = Q^{-1}Pu = Cu,$$

παίρνουμε

$$v_i = - \sum_{j, j < i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} v_j - \sum_{j, j > i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j.$$

Θα δείξουμε πρώτα επαγωγικά ότι

$$|v_i| \leq \|C_J\|_\infty, \text{ για } i = 1, \dots, n.$$

Για $i = 1$, έχουμε

$$|v_1| \leq \sum_{j, j > 1} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| |u_j| \leq \|u\|_\infty \sum_{j, j > 1} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq \|C_J\|_\infty.$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $|v_j| \leq \|C_J\|_\infty \leq 1$, για $j = 1, \dots, i-1$. Τότε

$$\begin{aligned} |v_i| &\leq \sum_{j, j < i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |v_j| + \sum_{j, j > i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |u_j| \leq (\max_j |v_j|) \sum_{j, j < i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| + \|u\|_\infty \sum_{j, j > i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \\ &\leq \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \|C_J\|_\infty. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|v\|_\infty = \|Cu\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty,$$

για κάθε $u \in \mathbf{R}^n$, με $\|u\|_\infty = 1$, και άρα

$$\|C\|_\infty = \max_{\|u\|_\infty=1} \|Cu\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty < 1.$$

Συνεπώς η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει.

Τέλος, από το Θεώρημα 4 έχουμε

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|x_{k-1} - x_k\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|x_{k-1} - x_k\|_\infty.$$

Παρατηρήσεις.

1. Όταν ο πίνακας A έχει διαγώνια κυριαρχία, η πρώτη ανισότητα του Θεωρήματος 5 δείχνει ότι η μέθοδος Gauss-Seidel έχει μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, από τη μέθοδο Jacobi, αφού έχουμε

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|C\|_\infty^k \|x_0 - x\|_\infty, \text{ για τη Gauss-Seidel,}$$

και

$$\|x_{kJ} - x\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty^k \|x_0 - x\|_\infty, \text{ για τη Jacobi.}$$

Η δε χρήσιμη εκτίμηση σφάλματος του Θεωρήματος 7 μας επιτρέπει να αποφύγουμε τον υπολογισμό του πίνακα C , δηλαδή την αντιστροφή του Q . Εδώ, ο όρος $\|x_{k-1} - x_k\|_\infty$ είναι αποτέλεσμα της ταχύτερης σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Seidel (μετά από όλες τις προηγούμενες επαναλήψεις), με ένα μικρό συμβιβασμό στην τελευταία επανάληψη ως προς το συντελεστή του, στον οποίο έχει αντικατασταθεί ο κανονικός πίνακας C της μεθόδου Gauss-Seidel με τον C_J .

2. Η απόδειξη του Θεωρήματος 7 δείχνει ότι, αν αντικατασταθεί η υπόθεση της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας του A με τις ασθενέστερες

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> \sum_{j>1} |a_{1j}|, \\ |a_{ii}| &\geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n, \\ \sum_{j, j < i} |a_{ij}| &\neq 0, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

(η τελευταία συνθήκη δεν είναι απαραίτητη αν ο A είναι συμμετρικός), τότε

$$\|C\|_\infty < 1 \quad \text{και} \quad \|C\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty \leq 1,$$

και η μέθοδος Gauss-Seidel πάλι συγκλίνει, αλλά αν υπάρχει έστω και μια ισότητα στις παραπάνω ανισότητες, τότε $\|C_J\|_\infty = 1$ και η εκτίμηση σφάλματος του Θεωρήματος 7 δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα του πιο πάνω παραδείγματος της μεθόδου Jacobi, το οποίο έχει διαγώνια κυριαρχία. Οι επαναληπτικές εξισώσεις της μεθόδου Gauss-Seidel γράφονται εδώ

$$\begin{aligned} x_{1k} &= \frac{1}{4}(1 + x_{2,k-1} + x_{3,k-1}), \\ x_{2k} &= \frac{1}{4}(2 + x_{1,k} + x_{4,k-1}), \\ x_{3k} &= \frac{1}{4}(x_{1,k} + x_{4,k-1}), \\ x_{4k} &= \frac{1}{4}(1 + x_{2,k} + x_{3,k}). \end{aligned}$$

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.25	0.5	0.	0.25
1	0.375	0.62525	0.15625	0.45312
2	0.45312	0.72656	0.22656	0.48828
3	0.48828	0.74414	0.24414	0.49707
4	0.49707	0.74853	0.24853	0.49927

Πίνακας 2

Παρατηρούμε ότι σε κάθε εξίσωση i χρησιμοποιούμε τις ανανεωμένες (δείκτης k) συνιστώσες j , για $j < i$, από τις προηγούμενες εξισώσεις, και τις παλιές (δείκτης $k-1$) συνιστώσες για $j > i$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss-Seidel με αρχικό διάνυσμα $x_0 = (0.25, 0.5, 0, 0.25)^T$, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 2. Η

ακριβής λύση του συστήματος είναι $x = (0.5, 0.75, 0.25, 0.5)^T$. Βρίσκουμε εδώ την εκτίμηση σφάλματος

$$\|x_4 - x\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|x_3 - x_4\|_\infty = \frac{0.5}{1 - 0.5} 0.0088 = 0.0088.$$

Αλγόριθμος.

Διαβάζουμε τα $n, A, b, x, \varepsilon, N$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ JACOBI C

$$\|C\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

Για $k = 1, \dots, N$ εκτελούμε μέχρι το 1

$y = x$

Για $i = 1, \dots, n$ εκτελούμε μέχρι το 2

$$2 \quad x_i = (b_i - \sum_{j, j \neq i} a_{ij} x_j) / a_{ii}$$

$$e = \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|x - y\|_\infty \quad (\text{φράγμα σφάλματος})$$

Εκτυπώνουμε τα k, x, e

1 Αν $e \leq \varepsilon$, σταματάμε

Εκτυπώνουμε “Όριο επαναλήψεων” και σταματάμε

Δ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

Η μέθοδος της Χαλάρωσης (relaxation) είναι ένας τρόπος επιτάχυνσης της σύγκλισης μιας δεδομένης επαναληπτικής μεθόδου (που θα καλούμε εδώ αρχική) επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια αρχική επαναληπτική μέθοδο με πίνακες P και Q

$$A = Q - P,$$

όπου ο Q είναι εύκολα αντιστρέψιμος. Στη μέθοδο της Χαλάρωσης, ορίζουμε δύο πίνακες P_α και Q_α , που εξαρτώνται από μια παράμετρο $\alpha \in \mathbf{R}$, τέτοιους ώστε

$$A = Q_\alpha - P_\alpha.$$

Συγκεκριμένα, θέτουμε

$$Q_\alpha = (1 + \alpha)Q,$$

και

$$P_\alpha = Q_\alpha - A = Q_\alpha - (Q - P) = \alpha Q + P.$$

Η αντίστοιχη επαναληπτική μέθοδος είναι

$$Q_\alpha x_k = P_\alpha x_{k-1} + b, \quad x_0 \text{ δεδομένο,}$$

δηλαδή

$$(1 + \alpha)Qx_k = (\alpha Q + P)x_{k-1} + b,$$

ή ισοδύναμα, αποφεύγοντας έτσι τον πολλαπλασιασμό με Q στο δεύτερο μέλος

$$Qy_k = Px_{k-1} + b,$$

$$x_k = \frac{\alpha}{1 + \alpha} x_{k-1} + \frac{1}{1 + \alpha} y_k.$$

Π.χ. για τη μέθοδο Jacobi, η πρώτη εξίσωση λύνεται άμεσα ως προς y_k , και για τη μέθοδο Gauss-Seidel, με εμπρός-αντικατάσταση. Παρατηρούμε ότι, για $\alpha = 0$, παίρνουμε την αρχική μέθοδο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει. Ο σκοπός είναι να επιλέξουμε την παράμετρο α έτσι ώστε η παραπάνω μέθοδος να έχει τη μεγαλύτερη εφικτή ταχύτητα σύγκλισης. Η μέθοδος της Χαλάρωσης γράφεται

$$x_k = Q_\alpha^{-1} P_\alpha x_{k-1} + Q_\alpha^{-1} b = C_\alpha x_{k-1} + d_\alpha,$$

και συγκλίνει αν και μόνο αν η φασματική ακτίνα του C_α ικανοποιεί $\rho(C_\alpha) < 1$. Όπως έχειδειχθεί στην §4 (εκτίμηση σφάλματος), για δεδομένη νόρμα στον $\mathbf{R}^n$ και την παραγόμενη φυσική νόρμα πίνακα, με $\|C_\alpha\| < 1$, η σχετική με τη νόρμα αυτή ταχύτητα σύγκλισης καθορίζεται από το πόσο μικρή είναι η νόρμα $\|C_\alpha\|$, και η απόλυτη ταχύτητα της μεθόδου από το πόσο μικρή είναι η φασματική ακτίνα $\rho(C_\alpha)$. Η μέγιστη σχετική (αντ. απόλυτη) ταχύτητα επιτυγχάνεται άρα για ένα α' (αντ. α^*) που ελαχιστοποιεί, ως προς α , το $\|C_\alpha\|$ (αντ. $\rho(C_\alpha)$). Εκτός από ορισμένες περιπτώσεις όπου ένα τέτοιο α' ή α^* μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς, συνήθως προσπαθούμε να *εκτιμήσουμε* το α' (ή, αν είναι δυνατό, το α^*). Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε πρώτα μια νόρμα τέτοια ώστε $\|C_0\| = \|C\| < 1$ για την αρχική μέθοδο (π.χ. τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ για τις μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel, αν ο πίνακας έχει διαγώνια κυριαρχία). Επειδή η σύγκλιση δεν εξαρτάται από το b , δοκιμάζουμε τη μέθοδο με $b = 0$ (οπότε το σύστημα $Ax = 0$ έχει τη μοναδική λύση $x = 0$), για διάφορες τιμές του α γύρω από το 0, με N , N μικρό, επαναλήψεις και επιλέγουμε το α που δίνει τη μικρότερη νόρμα $\|x_N(\alpha)\|$. Σημειωτέον ότι, αν ο C_α είναι συμμετρικός, τότε

$$\rho(C_\alpha) = \|C_\alpha\|_2,$$

οπότε η παραπάνω εκτίμηση με τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ είναι και η εκτίμηση του $\alpha^* = \alpha'_2$ (π.χ. αν ο A είναι συμμετρικός και οι πίνακες P , Q είναι οι πίνακες της μεθόδου Jacobi).