

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου (§§1-3) μελετάμε το πρόβλημα της παρεμβολής μιας δεδομένης συνάρτησης, ορισμένης σε ένα διάστημα $[a, b]$, σε σημεία $x_0, \dots, x_n$ του $[a, b]$ με συναρτήσεις p_n ειδικής μορφής (π.χ. πολυώνυμα, κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις). Βασικός σκοπός της παρεμβολής είναι η προσέγγιση της συνάρτησης f και η αντικατάστασή της με μια συνάρτηση παρεμβολής p_n πάνω στην οποία οι πράξεις (π.χ. τιμή σε ένα σημείο, παραγώγιση, ολοκλήρωση κλπ.) απλουστεύονται. Θέματα που θα μας απασχολήσουν είναι:

- Προσεγγιστικές ιδιότητες της p_n , για n σταθερό, δηλ. εκτιμήσεις του σφάλματος $f - p_n$,

- Ασυμπτωτικές ιδιότητες της p_n , δηλ. σύγκλιση ή μη της p_n στην f όταν $n \rightarrow \infty$.

Σημειωτέον ότι η παρεμβολή χρησιμοποιείται συχνά σαν μέθοδος των “απροσδιορίστων συντελεστών” για τον υπολογισμό των συντελεστών διαφόρων μοντέλων στην Αριθμητική Ανάλυση (π.χ. μέθοδοι διαφορικών εξισώσεων).

Το δεύτερο μέρος του κεφαλαίου (§§ 4,5) αποτελεί μια εισαγωγή στην ευρεία περιοχή της θεωρίας προσέγγισης συναρτήσεων χωρίς παρεμβολικές δεσμεύσεις. Στην §4, μελετάμε τη σημαντική για τις εφαρμογές μέθοδο προσέγγισης με τα ελάχιστα τετράγωνα, η οποία μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στα ορθογώνια πολυώνυμα και στις συναρτήσεις Fourier. Τέλος, στην §5 δίνουμε το γενικό θεώρημα Weierstrass προσέγγισης συνεχών συναρτήσεων με πολυώνυμα.

1. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ LAGRANGE

Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

$\Pi_n := \Pi_n[a, b]$ = διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ με πραγματικούς συντελεστές στο $[a, b]$,

$C[a, b]$ = χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$,

$C^m[a, b]$ (αντ. $C^\infty[a, b]$) = χώρος των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq m$ (αντ. όλων των τάξεων) στο (a, b) που επεκτείνονται συνεχώς στο $[a, b]$,

$B[a, b]$ = χώρος των φραγμένων συναρτήσεων στο $[a, b]$.

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ = **νόρμα supremum** στο $[a, b]$ που ορίζεται στο χώρο $B[a, b]$ και άρα σε όλους τους παραπάνω χώρους.

Ειδικά, αν $f \in C[a, b]$, τότε βέβαια ισχύει

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

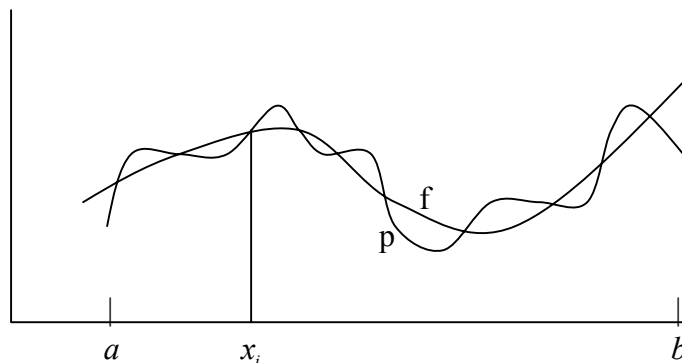
Εύκολα επαληθεύεται ότι οι δύο παραπάνω εκφράσεις όντως ορίζουν νόρμες.

Έστω τώρα f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, $n \geq 0$ ένας ακέραιος, και $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[a, b]$. Ζητούμε ένα

πολυώνυμο $p_n \in \Pi_n[a, b]$ που **παρεμβάλλει** την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, δηλαδή που παίρνει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία αυτά (βλ. Σχήμα 1)

$$(1) \quad p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Εξετάζουμε πρώτα την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής και μετά το σφάλμα παρεμβολής.



Σχήμα 1

Θεώρημα 1 (Υπαρξη και μοναδικότητα). Υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $p_n \in \Pi_n$ που παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Το p_n δίνεται από τον τύπο

$$(2\alpha) \quad p_n(x) := \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i),$$

όπου

$$(2\beta) \quad l_i(x) := \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad i = 0, \dots, n,$$

για $n \geq 1$, και

$$(2\gamma) \quad p_0(x) = f(x_0), \quad \text{για } n = 0.$$

Το πολυώνυμο p_n καλείται **πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange** της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$ και τα πολυώνυμα l_i , $i = 0, \dots, n$, **βασικά πολυώνυμα Lagrange**.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο p_n παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, αφού το κάθε πολυώνυμο l_i παίρνει την τιμή 1 στο σημείο x_i και μηδενίζεται στα σημεία x_j , για $j \neq i$.

Για να δείξουμε ότι το p_n είναι μοναδικό, έστω q τυχόν πολυώνυμο που παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Τότε το πολυώνυμο $p_n - q$ είναι βαθμού το πολύ n και έχει τουλάχιστο τις $n+1$ ρίζες $x_0, \dots, x_n$. Συνεπώς $p_n - q \equiv 0$ και το p_n είναι μοναδικό.

Θεώρημα 2 (Σφάλμα παρεμβολής σε ένα σημείο). Αν $f \in C^{n+1}[a, b]$, τότε το σφάλμα παρεμβολής σε ένα σταθερό σημείο $x \in [a, b]$ δίνεται από τον τύπο

$$(3) \quad e_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{για κάποιο } \xi(x) \in (a, b).$$

Απόδειξη. Για $x \in [a, b]$ σταθερό και διάφορο του κάθε x_i , ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση του t

$$F(t) := f(t) - p_n(t) - [f(x) - p_n(x)] \frac{\prod_{i=0}^n (t - x_i)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}.$$

Η F έχει τουλάχιστο τις $n+2$ ρίζες $x_0, \dots, x_n, x$. Από το Θεώρημα Rolle προκύπτει άμεσα ότι η F' έχει τουλάχιστο $n+1$ ρίζες στο (a, b) , μετά ότι η F'' έχει τουλάχιστο n ρίζες, κ.ο.κ. Καταλήγουμε έτσι στην ύπαρξη ενός $\xi(x) \in (a, b)$ τέτοιου ώστε

$$F^{(n+1)}(\xi(x)) = 0.$$

Το θεώρημα έπεται τότε αν παρατηρήσουμε ότι

$$p_n^{(n+1)} \equiv 0,$$

αφού $p_n \in \Pi_n$, και ότι

$$\left[\prod_{i=0}^n (t - x_i) \right]^{(n+1)} = (t^{n+1})^{(n+1)} = (n+1)!.$$

Θεώρημα 3. Αν τα σημεία $x_i, i = 0, \dots, n$ είναι ισαπέχοντα, με $x_0 = a, x_n = b$, τότε

$$(4) \quad \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \frac{n!}{4} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}.$$

Αν επιπλέον $f \in C^{n+1}[a, b]$, τότε ισχύει η εκτίμηση του μεγίστου, σε απόλυτη τιμή, σφάλματος παρεμβολής

$$(5) \quad \|f - p_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}.$$

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε (άσκηση) ότι τα σημεία μεγίστου της (συμμετρικής ως προς $(a+b)/2$) συνάρτησης $\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$ βρίσκονται αναγκαστικά στα διαστήματα $[x_0, x_1]$ και $[x_{n-1}, x_n]$. Θέτοντας $h := (b-a)/n$, έχουμε επομένως

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| &\leq \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} (|x - x_0| |x - x_1|) \right] |x - x_2| \cdots |x - x_n| \\ &= \frac{h^2}{4} |x - x_2| \cdots |x - x_n| \leq \frac{h^2}{4} 2h \cdot 3h \cdots nh = \frac{n! h^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Η εκτίμηση (5) προκύπτει άμεσα από τις (3) και (4).

Η (5) δίνει μια αρκετά ικανοποιητική εκτίμηση του μεγίστου σφάλματος και αποφεύγει τον ακριβή υπολογισμό του μεγίστου της συνάρτησης $\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$, που είναι αδύνατος για $n \geq 5$.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x) := \sin x$ και τα σημεία παρεμβολής

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής της f είναι

$$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \sin 0 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \sin 1 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \sin 2.$$

Ας εκτιμήσουμε το μέγιστο σφάλμα παρεμβολής στο διάστημα $[0, 2]$. Έχουμε $n = 2$ και

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &= \frac{|f^{(3)}(\xi(x))|}{3!} |x(x-1)(x-2)| \\ &= \frac{1}{6} |-\cos(\xi(x))| |x^3 - 3x^2 + 2x| \leq \frac{1}{6} |x^3 - 3x^2 + 2x|. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(x) := |x^3 - 3x^2 + 2x|$ παίρνει τη μέγιστή της τιμή $2\sqrt{3}/9$ στα δύο σημεία $x' = 1 - \sqrt{3}/3$, $x'' = 1 + \sqrt{3}/3$, οπότε παίρνουμε την εκτίμηση σφάλματος

$$\|f - p_2\|_{\infty} \leq 2\sqrt{3}/27 \approx 0.06415.$$

Εξάλλου, η εκτίμηση (5) δίνει

$$\|f - p_2\|_{\infty} \leq \frac{1}{4 \cdot 3} \left(\frac{2-0}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} \approx 0.083333.$$

Αναφέρουμε εδώ το ακόλουθο αξιοσημείωτο Θεώρημα Faber, το οποίο δείχνει ότι, για ένα άπειρο πλήθος συνεχών συναρτήσεων f , όταν ο αριθμός n των σημείων παρεμβολής τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής (p_n) της συνάρτησης f δεν συγκλίνει στην f (βλ. Ε.Α.Α., Κεφ. II).

Θεώρημα 4 (Faber). Έστω οποιοδήποτε **τριγωνικό σύστημα παρεμβολής**, δηλαδή για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ μια επιλογή $n+1$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων παρεμβολής x_{ni} , $i = 0, \dots, n$. Τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο F του $C[a, b]$, μάλιστα πυκνό στο $C[a, b]$, τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$ να ισχύει

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} \|f - p_k\|_{\infty}) = +\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - p_{n_j}\|_{\infty} = +\infty, \quad \text{για κάποια υπακολουθία } (p_{n_j}) \text{ της } (p_n).$$

Παράδειγμα απόκλισης Runge (βλ. Ε.Α.Α., Κεφ. II). Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

(που ανήκει μάλιστα στον $C^{\infty}(\mathbf{R})$) και για κάθε n , τα $n+1$ ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής του διαστήματος $[-1, 1]$

$$x_{ni} := -1 + \frac{2i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Έστω $p_n \in \Pi_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της f στα σημεία x_{ni} . Τότε υπάρχει $\bar{x} \in [-1, 1]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ μονο}}} |f(\bar{x}) - p(\bar{x})| = +\infty.$$

Μπορούμε όμως να επιτύχουμε τη *σύγκλιση* της συνάρτησης παρεμβολής εφαρμόζοντας την παρεμβολή Lagrange *κατά τμήματα*. Συγκεκριμένα, διαιρούμε το

διάστημα $[a, b]$ σε M υποδιαστήματα I_k , $k=1, \dots, M$, μήκους h_k^M , με $h := h^M := \max_k h_k^M \rightarrow 0$ όταν $M \rightarrow \infty$, και στο κάθε I_k επιλέγουμε $n+1$ (με n μικρό και σταθερό) διαφορετικά μεταξύ τους σημεία x_{nki}^M , $i=0, \dots, n$. Έστω τώρα η μοναδική (όχι απαραίτητως συνεχής) συνάρτηση p_n^M η οποία, σε κάθε διάστημα I_k (ενδεχομένως ανοικτό σε ένα άκρο) ορίζεται σαν το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange βαθμού $\leq n$ της f στα σημεία x_{nki}^M , $i=0, \dots, n$. Η p_n^M καλείται **κατά τμήματα πολυωνυμική** (βαθμού $\leq n$) **συνάρτηση παρεμβολής της f στα σημεία x_{nki}^M , $i=0, \dots, n$.**

Λήμμα 1. Τα βασικά πολυώνυμα Lagrange l_i , $i=0, \dots, n$, ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=0}^n l_i \equiv 1.$$

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $q \equiv 1$. Το πολυώνυμο $p_n := \sum l_i$ (βαθμού n) είναι το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, βαθμού $\leq n$, της q στα σημεία x_i , άρα ταυτίζεται με το πολυώνυμο q (βαθμού $0 \leq n$) το οποίο προφανώς παρεμβάλλει τον εαυτό του.

Θεώρημα 5.

α) Αν $f \in C^{n+1}[a, b]$, τότε ισχύει η εκτίμηση του μεγίστου, σε απόλυτη τιμή, σφάλματος παρεμβολής με την κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση p_n^M

$$(6) \quad \|f - p_n^M\|_{\infty} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}.$$

Ειδικά, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι *ισαπέχοντα*, σε αύξουσα διάταξη, με $[x_{nki}^M, x_{nkn}^M] = I_k$, τότε ισχύει η βελτιωμένη εκτίμηση σφάλματος

$$(7) \quad \|f - p_n^M\|_{\infty} \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{h}{n}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}.$$

β) Αν $f \in C[a, b]$ και (αν $n > 0$) υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε M να ισχύει $|x_{ki}^M - x_{kj}^M| \geq ch_k^M$, για $i \neq j$, $k=1, \dots, M$, τότε η ακολουθία (p_n^M) *συγκλίνει ομοιόμορφα* στην f όταν $M \rightarrow \infty$

$$(8) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \|f - p_n^M\|_{\infty} = 0.$$

Απόδειξη.

α) Η ανισότητα (6) προκύπτει άμεσα από τον τύπο σφάλματος παρεμβολής (3) και τις προφανείς ανισότητες

$$\left| \prod_{i=0}^n (x - x_{nki}^M) \right| \leq (h_k^M)^{n+1} \leq h^{n+1}, \quad k=1, \dots, M.$$

Η δε ανισότητα (7) προκύπτει εφαρμόζοντας την (5), εδώ με $b-a := h_k^M \leq h$, σε κάθε διάστημα I_k .

β) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι *ομοιόμορφα* συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, σε κάθε διάστημα I_k ισχύει

$$|f(x) - f(x_{ki})| \leq \varepsilon,$$

για M αρκετά μεγάλο. Επομένως, από το Λήμμα 1, σε κάθε I_k έχουμε (με προφανή συμβολισμό l_{ki})

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n^M(x)| &= \left| \left[\sum_{i=0}^n l_{ki}(x) \right] f(x) - \sum_{i=0}^n l_{ki}(x) f(x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |l_{ki}(x)| |f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |l_{ki}(x)| \\ &\leq \varepsilon, \quad \text{αν } n = 0, \\ &\leq \varepsilon(n+1) \frac{(h_k^M)^n}{c^n (h_k^M)^n} = \varepsilon \frac{n+1}{c^n}, \quad \text{αν } n > 0, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό των l_{ki} και την υπόθεση πάνω στα x_{ki} . Συνεπώς ισχύει η (8).

Παρατήρηση. Η υπόθεση της πρότασης (β) του Θεωρήματος 5 πάνω στα x_{ki} ισχύει ειδικά όταν τα σημεία αυτά είναι ισαπέχοντα, σε αύξουσα διάταξη, με $[x_{k0}, x_{kn}] = I_k$.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \cos x$. Εφαρμόζοντας την παρεμβολή Lagrange ανά ζεύγος διαστημάτων μήκους 0.1 στο διάστημα $[0, 1]$, δηλ. με $n = 2$, $M = 5$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα (5), βρίσκουμε την εκτίμηση σφάλματος

$$\|f - q\|_{\infty} \leq \frac{0.1^3}{4 \cdot 3} \|f^{(3)}\|_{\infty} \leq \frac{0.1^3}{12} \approx 8.3 \cdot 10^{-5}.$$

Μορφή Newton του πολωνύμου Lagrange – Διηρημένες διαφορές

Θα εξετάσουμε τώρα έναν αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού του πολωνύμου παρεμβολής Lagrange. Γράφουμε το πολωνύμο παρεμβολής Lagrange p_n στη λεγόμενη **μορφή Newton**

$$(9) \quad p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Παρατηρούμε ότι τα πολωνύμα

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα οι συντελεστές $a_0, \dots, a_n$ (για δεδομένο n) είναι μοναδικοί. Προσδιορίζουμε πρώτα το συντελεστή a_n ταυτίζοντάς τον με το συντελεστή του x^n στο πολωνύμο Lagrange (2)

$$(10) \quad a_n = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

Επειδή ο τελευταίος όρος της έκφρασης (9) μηδενίζεται στα σημεία $x_0, \dots, x_{n-1}$, το πολωνύμο βαθμού $\leq n-1$

$$q_{n-1}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}),$$

παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_{n-1}$ και άρα ταυτίζεται με το πολωνύμο παρεμβολής Lagrange p_{n-1} της f στα σημεία αυτά. Συμπεραίνουμε επαγωγικά ότι οι συντελεστές του p_n δίνονται από τον τύπο

$$(11) \quad a_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}, \quad k = n, n-1, \dots, 0.$$

Βλέπουμε έτσι ότι η ακολουθία (a_k) είναι μοναδική (δηλ. ανεξάρτητη του n) και άρα η (11) δίνει τη γενική έκφραση όλων των συντελεστών όλων των πολυωνύμων παρεμβολής p_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Ορίζοντας το σύμβολο

$$(12) \quad f_{rs} := f[x_r, \dots, x_s] := \sum_{i=r}^s \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=r \\ j \neq i}}^s (x_i - x_j)}, \quad \text{για } s > r, \quad \text{και} \quad f_{rr} := f(x_r),$$

έχουμε, από την (11)

$$(13) \quad a_k = f_{0k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

και εύκολα επαληθεύεται ότι

$$(14) \quad f_{rs} = \frac{f_{r+1,s} - f_{r,s-1}}{x_s - x_r}.$$

Το f_{rs} καλείται **δητημένη διαφορά** τάξης $s - r$. Βλέπουμε έτσι ότι, για δεδομένα σημεία $x_0, \dots, x_n$, τα f_{rs} μπορούν να υπολογιστούν επαναληπτικά όπως δείχνει ο Πίνακας 1. Τα a_k δίνονται τότε από τη (13) (άνω διαγώνιος του Πίνακα 1).

i	x_i	0	1	2	3	...	n
0	x_0	$f_{00} = f(x_0)$					
			$f_{01} = \frac{f_{11} - f_{00}}{x_1 - x_0}$				
1	x_1	$f_{11} = f(x_1)$		$f_{02} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0}$			
			$f_{12} = \frac{f_{22} - f_{11}}{x_2 - x_1}$		$f_{03} = \frac{f_{13} - f_{02}}{x_3 - x_0}$		
2	x_2	$f_{22} = f(x_2)$		$f_{13} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1}$		...	f_{0n}
			$f_{23} = \frac{f_{33} - f_{22}}{x_3 - x_2}$		$f_{14} = \frac{f_{24} - f_{13}}{x_4 - x_1}$		
3	x_3	$f_{33} = f(x_3)$		$f_{24} = \frac{f_{34} - f_{23}}{x_4 - x_2}$			
			$f_{34} = \frac{f_{44} - f_{33}}{x_4 - x_3}$				
4	x_4	$f_{44} = f(x_4)$					
...	...	...					
n	x_n	$f_{nn} = f(x_n)$					

Πίνακας 1

Παρατηρούμε επίσης ότι η προσθήκη ενός νέου σημείου παρεμβολής x_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό $n+2$ μόνο νέων διηρημένων διαφορών (νέα κάτω διαγώνιος του Πίνακα 1). Σημειωτέον ότι η έκφραση (12) είναι συμμετρική ως προς τα x_i , δηλαδή είναι ανεξάρτητη από τη διάταξη των x_i . Τέλος, από τις (9) και (13) παίρνουμε

$$(15) \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) + f_{0,n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

και θέτοντας $\bar{x} := x_{n+1}$, το σφάλμα παρεμβολής Lagrange στο σημείο $\bar{x}$ είναι

$$(16) \quad f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = p_{n+1}(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = a_{n+1} \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i) = f_{0,n+1} \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i),$$

αφού $p_{n+1}(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Παράδειγμα. Έστω τα σημεία παρεμβολής

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

και οι τιμές

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 4.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι προφανώς $p_2(x) = x^2$. Ας υπολογίσουμε τη μορφή Newton του p_2 . Παίρνουμε εδώ τον Πίνακα 2.

i	x_i	0	1	2
0	$x_0 = 0$	$f_{00} = 0$		
			$f_{01} = 1$	
1	$x_1 = 1$	$f_{11} = 1$		$f_{02} = 1$
			$f_{12} = 3$	
2	$x_2 = 2$	$f_{22} = 4$		

Πίνακας 2

Άρα η μορφή Newton είναι

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= f_{00} + f_{01}(x - x_0) + f_{02}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= x + x(x - 1). \end{aligned}$$