

2. ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Θεωρούμε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

Για να ορίσουμε μια επαναληπτική μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης αυτής, γράφουμε πρώτα την εξίσωση αυτή σε μορφή σταθερού σημείου

$$x = g(x),$$

για κάποια συνάρτηση g , έτσι ώστε η εξίσωση $x = g(x)$ να είναι *ισοδύναμη* με την $f(x) = 0$. Προφανώς εδώ η συνάρτηση g δεν είναι μοναδική και θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε η μέθοδος να συγκλίνει. Η **επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου** που αντιστοιχεί στη συνάρτηση g ορίζεται τότε από τον τύπο

$$x_k = g(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad x_0 \text{ δεδομένο.}$$

Ξεκινώντας από ένα αρχικό x_0 , που επιλέγεται συνήθως κοντά σε μια ρίζα της f , η μέθοδος αυτή κατασκευάζει επαναληπτικά μια ακολουθία (x_k) η οποία, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, συγκλίνει σε μια λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, και άρα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Παρατηρούμε ότι, αν η ακολουθία (x_k) της μεθόδου σταθερού σημείου *συγκλίνει* σε κάποιο σημείο $\bar{x}$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\bar{x}$, τότε το $\bar{x}$ είναι λύση της εξίσωσης $x = g(x)$.

Θεώρημα 1 (Τοπική Σύγκλιση). Υποθέτουμε ότι η g είναι ορισμένη στο ανοικτό διάστημα $A := (c, d)$, παραγωγίσιμη σε μια λύση $\bar{x} \in A$ της εξίσωσης $x = g(x)$, και ότι ισχύει

$$\bar{\alpha} := |g'(\bar{x})| < 1.$$

Τότε υπάρχει ένα διάστημα της μορφής $I := [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, με $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε αρχικό $x_0 \in I$, η ακολουθία (x_k) που παράγει η μέθοδος σταθερού σημείου να περιέχεται στο I και να συγκλίνει στη λύση $\bar{x}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της παραγώγου, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left| \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| = |g'(\bar{x})| = \bar{\alpha} < 1.$$

Επιλέγοντας κάποιο $\beta \in (\bar{\alpha}, 1)$, υπάρχει άρα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$I := [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subset A \quad (\text{το } A \text{ είναι ανοικτό}).$$

και

$$\left| \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \leq \beta < 1, \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_0 \in I$, συμπεραίνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε k

$$\alpha_k := \left| \frac{x_k - \bar{x}}{x_{k-1} - \bar{x}} \right| = \left| \frac{g(x_{k-1}) - g(\bar{x})}{x_{k-1} - \bar{x}} \right| \leq \beta < 1 \quad \text{και} \quad x_k \in I.$$

Επομένως

$$|x_k - \bar{x}| \leq \beta |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \beta^2 |x_{k-2} - \bar{x}| \leq \dots \leq \beta^k |x_0 - \bar{x}| \rightarrow 0.$$

Συνεπώς, $x_k \rightarrow \bar{x}$ για κάθε αρχικό $x_0 \in I$.

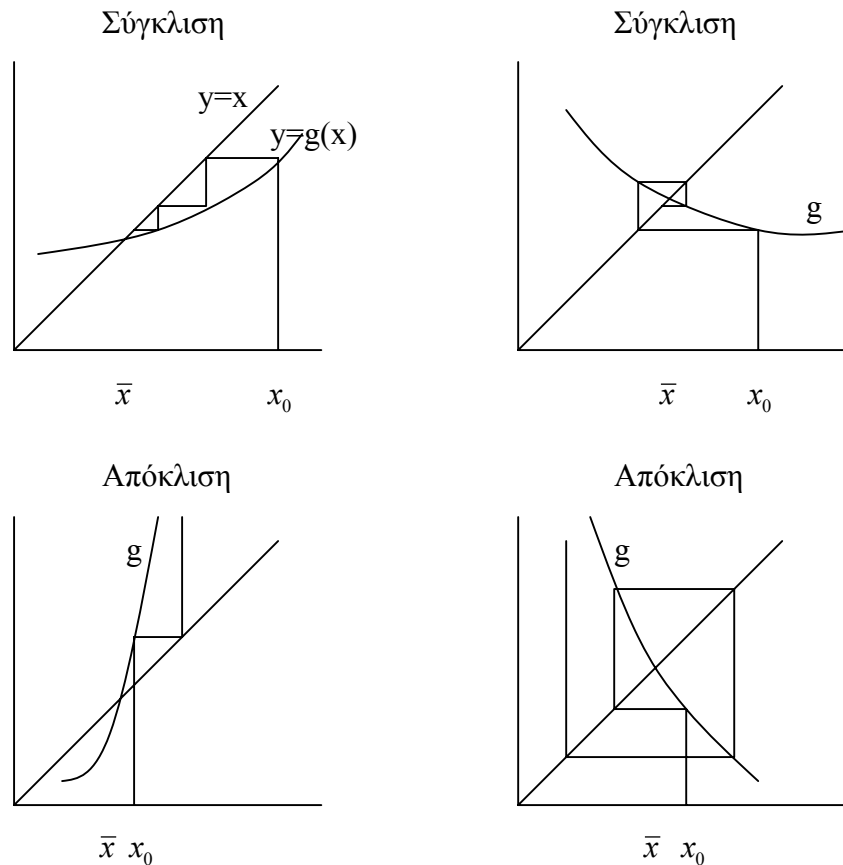
Σχόλια. Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι, αν το x_0 επιλεγεί αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, τότε ισχύει

$$(1) \quad |x_k - \bar{x}| = \alpha_k |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \beta |x_{k-1} - \bar{x}|,$$

όπου

$$\alpha_k = \left| \frac{x_k - \bar{x}}{x_{k-1} - \bar{x}} \right| \rightarrow \bar{\alpha} = |g'(\bar{x})|, \quad \alpha_k \leq \beta, \quad \beta \in (\bar{\alpha}, 1).$$

Αυτό δείχνει ότι, όσο μικρότερο το $\bar{\alpha} = |g'(\bar{x})|$, τόσο ταχύτερη θα είναι σύγκλιση της μεθόδου. Κατά πολύ ταχύτερη θα είναι βέβαια αν $g'(\bar{x}) = 0$.



Σχήμα 1

Θα λέμε ότι η σύγκλιση μιας *συγκλίνουσας* ακολουθίας, ή επαναληπτικής μεθόδου, είναι:

γραμμική αν

$$|x_k - \bar{x}| \leq c |x_{k-1} - \bar{x}|, \quad c \text{ σταθερά,}$$

υπεργραμμική αν

$$|x_k - \bar{x}| \leq c_k |x_{k-1} - \bar{x}|, \quad \text{όπου } c_k \rightarrow 0, \text{ όταν } k \rightarrow \infty,$$

τετραγωνική αν

$$|x_k - \bar{x}| \leq c |x_{k-1} - \bar{x}|^2, \quad c \text{ σταθερά,}$$

και, γενικά, **τάξης m** αν

$$|x_k - \bar{x}| \leq c |x_{k-1} - \bar{x}|^m, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Από τα παραπάνω σχόλια του Θεωρήματος 2 προκύπτει ότι, αν η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει, τότε η σύγκλιση της είναι γραμμική γενικά, και υπεργραμμική αν $g'(\bar{x}) = 0$.

Θεώρημα 2 (Εκτίμηση Σφάλματος). Με τις υποθέσεις και τα I, α_k, β του Θεωρήματος 1, για $x_0 \in I$, ισχύουν οι ανισότητες

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k} |x_{k-1} - x_k| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} |x_{k-1} - x_k|.$$

Απόδειξη. Από τις ανισότητες (1), έχουμε

$$|x_{k-1} - \bar{x}| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \bar{x}| = |x_{k-1} - x_k| + \alpha_k |x_{k-1} - \bar{x}|,$$

$$|x_{k-1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{1 - \alpha_k} |x_{k-1} - x_k|,$$

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k} |x_{k-1} - x_k| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} |x_{k-1} - x_k|,$$

αφού $0 \leq \alpha_k \leq \beta < 1$.

Στην περίπτωση όπου το $\bar{\alpha} = |g'(\bar{x})|$ είναι μικρό, π.χ. $\bar{\alpha} \leq 1/4$, αν επιλέξουμε το x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, μπορούμε να πάρουμε $\beta = 1/2$, οπότε ισχύει η εκτίμηση

$$(2) \quad |x_k - \bar{x}| \leq |x_{k-1} - x_k|.$$

Η εκτίμηση (2) ισχύει κατά μείζονα λόγο όταν η σύγκλιση είναι υπεργραμμική ή τετραγωνική (τότε $\alpha_k \rightarrow 0$ και το α_k είναι συνήθως πολύ μικρό).

Μια συνάρτηση g , ορισμένη σε ένα υποσύνολο S του $\mathbf{R}$, καλείται **συστολική** στο S , με σταθερά α , αν υπάρχει α , με $0 \leq \alpha < 1$, τέτοιο ώστε

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in S.$$

Θεώρημα 3 (Κριτήριο συστολικότητας). Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[c, d]$, παραγωγίσιμη στο (c, d) , και υπάρχει $\alpha \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$|g'(x)| \leq \alpha, \quad \text{για κάθε } x \in (c, d),$$

τότε είναι συστολική στο $[c, d]$, με σταθερά α .

Απόδειξη. Από το θεώρημα Μέσης Τιμής, για $x_1, x_2 \in [c, d]$, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq |g'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq \alpha |x_1 - x_2|,$$

άρα η g είναι συστολική.

Θεώρημα 4 (Περιορισμένη Σύγκλιση). Έστω S ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η g είναι συστολική στο S με σταθερά $\alpha \in [0, 1)$ και ότι η ακολουθία της μεθόδου σταθερού σημείου περιέχεται στο S (αυτό προφανώς ισχύει αν $g(S) \subset S$ και $x_0 \in S$, π.χ. αν $S := \mathbf{R}$). Τότε

(α) Η ακολουθία (x_k) συγκλίνει σε μια λύση $\bar{x} \in S$ της εξίσωσης $x = g(x)$,

(β) Η λύση $\bar{x}$ είναι μοναδική,

(γ) Ισχύουν οι τρεις εκτιμήσεις σφάλματος:

- (i) $|x_k - \bar{x}| \leq \alpha^k |x_0 - \bar{x}|,$
- (ii) $|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_{k-1} - x_k|,$
- (iii) $|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} |x_0 - x_1|.$

Ειδικά, αν η g είναι συστολική σε ένα διάστημα της μορφής $S = \{x \mid |x - \bar{x}| \leq \delta\}$, όπου $\bar{x}$ μία λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, τότε $g(S) \subset S$ και άρα ισχύουν τα συμπεράσματα (α)-(γ) αν $x_0 \in S$.

Απόδειξη. Κατ'αρχήν έχουμε

$$(3) \quad |x_{k+1} - x_k| \leq |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \alpha |x_k - x_{k-1}| \leq \dots \leq \alpha^k |x_1 - x_0|,$$

και η g είναι συνεχής στο S αφού είναι συστολική.

(α) Από την (3), έχουμε

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+p}| &\leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_{k+2}| + \dots + |x_{k+p-1} - x_{k+p}| \\ &\leq (\alpha^k + \dots + \alpha^{k+p-1}) |x_1 - x_0| = \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \alpha^k |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία έκφραση τείνει στο 0 όταν $k \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow \infty$. Επομένως η ακολουθία (x_k) είναι τύπου Cauchy και άρα συγκλίνει σε κάποιο $\bar{x} \in S$. Επειδή η g είναι συνεχής, έχουμε

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_{k-1}) = g(\bar{x}).$$

(β) Έστω $\bar{x}$ και $\tilde{x}$ δύο ενδεχόμενες λύσεις. Επειδή η g είναι συστολική, έχουμε

$$|\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})| \leq \alpha |\bar{x} - \tilde{x}|,$$

όπου $0 \leq \alpha < 1$, άρα αναγκαστικά $\bar{x} = \tilde{x}$.

(γ) (i) Έχουμε

$$|x_k - \bar{x}| = |g(x_{k-1}) - g(\bar{x})| \leq \alpha |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \dots \leq \alpha^k |x_0 - \bar{x}|.$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} |x_{k-1} - \bar{x}| &\leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \bar{x}| \\ &\leq |x_{k-1} - x_k| + \alpha |x_{k-1} - \bar{x}|, \end{aligned}$$

άρα

$$|x_{k-1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-\alpha} |x_{k-1} - x_k|.$$

Συνεπώς

$$|x_k - \bar{x}| \leq \alpha |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_{k-1} - x_k|.$$

(iii) Προκύπτει άμεσα από την (ii) και την ανισότητα

$$|x_{k-1} - x_k| = |g(x_{k-1}) - g(x_k)| \leq \alpha |x_{k-1} - x_k| \leq \dots \leq \alpha^{k-1} |x_0 - x_1|.$$

Τέλος, αν η g είναι συστολική σε ένα διάστημα της μορφής $S = \{x \mid |x - \bar{x}| \leq \delta\}$, όπου $\bar{x}$ μια λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, τότε, για κάθε $x \in S$

$$|g(x) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq \alpha |x - \bar{x}| \leq \alpha \delta < \delta,$$

δηλαδή $g(S) \subset S$ και άρα ισχύουν τα συμπεράσματα (α)-(γ).

Η εκτίμηση (i) έχει θεωρητικό μόνο ενδιαφέρον αφού η $\bar{x}$ είναι άγνωστη. Οι εκτιμήσεις σφάλματος (i) και (iii) δεν προϋποθέτουν τον υπολογισμό του x_k και γι' αυτό λέγονται “*εκ των προτέρων*” (a priori) εκτιμήσεις. Η δε “*εκ των υστέρων*” (a posteriori) εκτίμηση (ii) προϋποθέτει τον υπολογισμό αυτό, αλλά είναι ισχυρότερη της (iii) (γιατί; βλ. απόδειξη).

Παράδειγμα. Έστω η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$. Ζητούμε να προσεγγίσουμε τη μοναδική θετική ρίζα $\bar{x} = 2$ της f με μια μέθοδο σταθερού σημείου. Αν θέσουμε π.χ.

$$g(x) = x^2 - 2,$$

η σύγκλιση δεν εξασφαλίζεται αφού

$$|g'(x)| = |2x| > 1, \text{ για } |x| > \frac{1}{2}.$$

Αντίθετα, αν θέσουμε

$$g(x) = \sqrt{x+2},$$

τότε

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \alpha := \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \text{ για } x \geq 0,$$

και εύκολα βλέπουμε εδώ ότι ισχύει

$$g([0, b]) = [g(0), g(b)] \subset [0, b], \text{ για κάθε } b > 2,$$

οπότε το Θεώρημα 4 εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου, για κάθε αρχικό x_0 σε ένα τέτοιο διάστημα $[0, b]$, και άρα για κάθε $x_0 \geq 0$. Με $x_0 = 0$, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.

k	x_k
0	0
1	1.41421
2	1.84776
3	1.96157
4	1.99037
5	1.99759

Πίνακας 1

Από την εκτίμηση σφάλματος (ii) του Θεωρήματος 4, παίρνουμε, με $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$|x_5 - 2| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_4 - x_5| = 0.00395,$$

και από την (iii)

$$|x_5 - 2| \leq \frac{\alpha^5}{1 - \alpha} |x_0 - x_1| = 0.01208.$$

Τέλος, το ακριβές σφάλμα είναι εδώ $|x_5 - 2| = 0.00241\dots$