

4. ΝΟΡΜΕΣ – ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

A. ΝΟΡΜΕΣ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στον $\mathbf{R}$. Μια **νόρμα** $\|\cdot\|$ είναι μια απεικόνιση από τον V στον $\mathbf{R}$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) $\|x\| \geq 0$, για κάθε $x \in V$,

β) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

γ) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in V$,

δ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in V$ (Ανισότητα του τριγώνου).

Από τις (γ) και (δ) προκύπτει (άσκηση) και η ανισότητα

δ') $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, για κάθε $x, y \in V$.

Παραδείγματα. Αποδεικνύεται ότι οι τρεις παρακάτω εκφράσεις ορίζουν νόρμες στον $\mathbf{R}^n$ (άσκηση):

1. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,

2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

3. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ (Ευκλείδεια νόρμα).

Υπενθυμίζεται η χρήσιμη **ανισότητα Cauchy-Schwarz** που αφορά το **εσωτερικό γινόμενο**

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

δύο διανυσμάτων του $\mathbf{R}^n$

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

όπου έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $x = \lambda y$ ή $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbf{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Ισχύουν επίσης και οι ανισότητες (άσκηση)

$$|x^T y| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty, \quad |x^T y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα ορισμένη πάνω στο διανυσματικό χώρο των πινάκων $n \times n$. Θα λέμε ότι η νόρμα αυτή είναι **νόρμα πίνακα** αν ισχύει επιπλέον

ε) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, για κάθε A, B πίνακες $n \times n$.

Έστω τώρα $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\|\cdot\|_\pi$ μια νόρμα πίνακα. Θα λέμε ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|_\pi$ είναι **συμβατή** με τη νόρμα $\|\cdot\|$ αν ισχύει

ζ) $\|Ax\| \leq \|A\|_\pi \|x\|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$ και κάθε $n \times n$ πίνακα A .

Παραδείγματα. Αποδεικνύεται ότι οι τρεις παρακάτω εκφράσεις ορίζουν νόρμες πίνακα, και μάλιστα **συμβατές** με τις 1, 2, 3, αντίστοιχα (άσκηση)

1'. $\|A\|_\Gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (Γ : γραμμή),

$$2'. \quad \|A\|_{\Sigma} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\Sigma: \text{στήλη}),$$

$$3'. \quad \|A\|_E = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (E: \text{Ευκλείδεια}).$$

Θεώρημα 1 (Συνέχεια της νόρμας). Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \|x\|,$$

είναι συνεχής στον $\mathbf{R}^n$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_{\infty}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της νόρμας, έχουμε

$$\|x+v\| - \|x\| \leq \|v\|,$$

και

$$\|x\| = \|x+v-v\| \leq \|x+v\| + \|v\|,$$

επομένως

$$\|x+v\| - \|x\| \geq -\|v\|.$$

Συνεπώς

$$|f(x+v) - f(x)| = \left| \|x+v\| - \|x\| \right| \leq \|v\|,$$

που δείχνει ότι η f είναι συνεχής ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$. Εξάλλου, έχουμε

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i,$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbf{R}^n$. Επομένως

$$\|v\| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| \|e_i\| \leq (\max_i |v_i|) \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) = \|v\|_{\infty} M,$$

και άρα

$$|f(x+v) - f(x)| = \left| \|x+v\| - \|x\| \right| \leq \|v\| \leq M \|v\|_{\infty},$$

που δείχνει ότι η f είναι συνεχής ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\infty}$.

Θεώρημα 2 (Ισοδυναμία των νορμών). Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον $\mathbf{R}^n$. Τότε οι δύο νόρμες αυτές είναι **ισοδύναμες**, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $C > 0$ τέτοιες ώστε

$$c\|x\|' \leq \|x\| \leq C\|x\|',$$

και άρα όλες οι νόρμες στον $\mathbf{R}^n$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_{\infty}$, δηλαδή ότι υπάρχουν σταθερές τέτοιες ώστε

$$c\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq C\|x\|_{\infty}.$$

Το σύνολο (υπερκύβος)

$$S = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \|u\|_{\infty} = 1\},$$

είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές, και η συνάρτηση

$$f(x) = \|x\|,$$

είναι συνεχής ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ (από το Θεώρημα 1) και αυστηρά θετική πάνω στο σύνολο S , άρα

$$c = \min_{u \in S} \|u\| > 0 \quad \text{και} \quad C = \max_{u \in S} \|u\| > 0,$$

οπότε έχουμε

$$c \leq \|u\| \leq C, \quad \text{για } u \in S.$$

Για $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, έχουμε $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, άρα

$$c \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \leq C,$$

και τελικά

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty.$$

Ανάλογο θεώρημα ισχύει προφανώς και για τις νόρμες πίνακα.

Ορισμοί. Λέμε ότι μια ακολουθία (x_k) στον $\mathbf{R}^n$ **συγκλίνει στο** $x \in \mathbf{R}^n$, και γράφουμε

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \text{ή} \quad x_k \rightarrow x,$$

αν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0,$$

για οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathbf{R}^n$, και ότι μια ακολουθία (A_k) $n \times n$ πινάκων **συγκλίνει στον πίνακα** A , και γράφουμε

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \quad \text{ή} \quad A_k \rightarrow A,$$

αν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0,$$

για οποιαδήποτε νόρμα πίνακα.

Θεώρημα 3 και ορισμός (Φυσική νόρμα πίνακα). Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbf{R}^n$.

Τότε η συνάρτηση

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \tag{1}$$

ορίζει μια αντίστοιχη νόρμα πίνακα και έχουμε

$$\|A\| = \max_{\|u\|=1} \|Au\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Η νόρμα αυτή είναι συμβατή με τη νόρμα στον $\mathbf{R}^n$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

και είναι μάλιστα η *μικρότερη* νόρμα πίνακα συμβατή με τη νόρμα στον $\mathbf{R}^n$. Η νόρμα $\|A\|$ καλείται **φυσική νόρμα πίνακα** που παράγεται από τη νόρμα στον $\mathbf{R}^n$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, η έκφραση της $\|A\|$ είναι ορισμένη για κάθε πίνακα A

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{C}{c} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{C}{c} \frac{\max_i \sum_j |a_{ij} x_j|}{\max_i |x_i|} \leq \frac{C}{c} \max_i \sum_j |a_{ij}| \leq M < \infty,$$

για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, άρα

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty.$$

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι η $\|A\|$ είναι συμβατή με τη $\|x\|$ και ότι κάθε νόρμα πίνακα συμβατή με την $\|x\|$ είναι μεγαλύτερη από την $\|A\|$. Εξάλλου, η συνάρτηση

$$g(x) := \|Ax\|,$$

είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\{u \mid \|u\| = 1\}$

$$|g(x+v) - g(x)| \leq \|Av\| \leq \|A\| \|v\|,$$

άρα

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \max_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

Επίσης, άμεσα προκύπτει (άσκηση) ότι

$$\|A\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Τώρα, οι ιδιότητες (α), (β), (γ) της νόρμας πίνακα προφανώς ισχύουν και

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right) \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|, \\ \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\|A\|$ είναι μια νόρμα πίνακα.

Ορισμός. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ οι ιδιοτιμές του A . Ο αριθμός

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

όπου $|z|$ το μέτρο του $z \in \mathbf{C}$, καλείται **φασματική ακτίνα** του A .

Θεώρημα 4. Έστω $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ οι φυσικές νόρμες πίνακα που παράγουν οι αντίστοιχες νόρμες στον $\mathbf{R}^n$. Έχουμε

1. $\|A\|_\infty = \|A\|_\Gamma,$
2. $\|A\|_1 = \|A\|_\Sigma,$
3. $\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2},$ γενικά,
 $\|A\|_2 = \rho(A),$ αν ο A είναι συμμετρικός.

Σημειωτέον ότι δεν ισχύει $\|A\|_2 = \|A\|_E$.

Απόδειξη.

1. Για κάθε u , με $\|u\|_\infty = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|Au\|_\infty &= \max_i \left| \sum_j a_{ij} u_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| |u_j| \\ &\leq \max_j |u_j| \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|A\|_\Gamma.\end{aligned}$$

Έστω τώρα m τέτοιο ώστε

$$\|A\|_\Gamma = \sum_j |a_{mj}|.$$

Ορίζουμε, για $j = 1, \dots, n$, το διάνυσμα v_j με

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } a_{mj} \geq 0, \\ -1, & \text{αν } a_{mj} < 0. \end{cases}$$

Προφανώς $\|v\|_\infty = 1$ και

$$\|Av\|_\infty \geq |(Av)_m| = \left| \sum_j a_{mj} v_j \right| = \sum_j |a_{mj}| = \|A\|_\Gamma,$$

και άρα $\|Av\|_\infty = \|A\|_\Gamma$. Συνεπώς

$$\|A\|_\infty = \max_{\|u\|_\infty=1} \|Au\|_\infty = \|A\|_\Gamma.$$

2. . Για κάθε u , με $\|u\|_1 = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|Au\|_1 &= \sum_i \left| \sum_j a_{ij} u_j \right| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| |u_j| \\ &\leq \sum_j (|u_j| \sum_i |a_{ij}|) = \left(\sum_j |u_j| \right) \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|A\|_\Sigma.\end{aligned}$$

Έστω τώρα m τέτοιο ώστε

$$\|A\|_\Sigma = \sum_i |a_{im}|.$$

Τότε, m -οστό διάνυσμα e_m της κανονικής βάσης του $\mathbf{R}^n$ ικανοποιεί $\|e_m\|_1 = 1$ και

$$\|Ae_m\|_1 = \sum_i |a_{im}| = \|A\|_\Sigma.$$

Συνεπώς

$$\|A\|_\Gamma = \max_{\|u\|_1=1} \|Au\|_1 = \|A\|_\Sigma.$$

3. Ο συμμετρικός πίνακας $A^T A$ έχει πραγματικές, εδώ μη αρνητικές, ιδιοτιμές

$$A^T A v = \lambda v \Rightarrow (Av)^T Av = \lambda v^T v \Rightarrow \lambda = \frac{(Av)^T Av}{v^T v} \geq 0.$$

Έστω $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ οι ιδιοτιμές αυτές και $u_1, \dots, u_n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^n$ (δηλ. $u_i^T u_j = \delta_{ij}$). Έχουμε, για $x \in \mathbf{R}^n$

$$x = \sum_j c_j u_j,$$

$$\|x\|_2^2 = x^T x = \left(\sum_j c_j u_j \right)^T \left(\sum_j c_j u_j \right) = \sum_{i,j} c_i c_j u_i^T u_j = \sum_i c_i^2,$$

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T (A^T A x) = \left(\sum_i c_i u_i \right)^T \left(\sum_j \lambda'_j c_j u_j \right) = \sum_i \lambda'_i c_i^2.$$

Επομένως

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \frac{\sum_i \lambda'_i c_i^2}{\sum_i c_i^2} \leq \max_i \lambda'_i = \rho(A^T A).$$

Εξάλλου, αν $\lambda'_k = \max_i \lambda'_i = \rho(A^T A)$, τότε

$$\|Au_k\|_2^2 = u_k^T A^T Au_k = \lambda'_k u_k^T u_k = \lambda'_k = \rho(A^T A) \|u_k\|_2^2.$$

Συνεπώς

$$\|A\|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \rho(A^T A).$$

Αν τώρα ο πίνακας A είναι συμμετρικός, αποδεικνύεται ανάλογα, θεωρώντας τις ιδιοτιμές του A , ότι

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Τέλος, δίνεται χωρίς απόδειξη (βλ. π.χ. Ciarlet) το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $\rho(A)$ η φασματική του ακτίνα. Τότε ισχύει γενικά

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|_{\text{φυσική}}} \|A\|,$$

και αν ο A είναι συμμετρικός, το Θεώρημα 4 δείχνει ότι

$$\rho(A) = \|A\|_2 = \min_{\|\cdot\|_{\text{φυσική}}} \|A\|.$$

Σημειωτέον ότι γενικά το $\rho(A)$ δεν είναι νόρμα πίνακα.

B. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λέγεται **ευσταθές** αν κάθε σχετικά μικρή μεταβολή στα δεδομένα A και b επιφέρει σχετικά μικρή μεταβολή στη λύση του, και **ασταθές** αν κάποια μικρή μεταβολή στα δεδομένα επιφέρει σχετικά μεγάλη μεταβολή στη λύση του.

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα

$$10000x + 30000y = 40000$$

$$x + 3.0001y = 4.0001$$

και το ελαφρά διαταραγμένο σύστημα

$$10000x + 30000y = 40000$$

$$x + 2.9999y = 4.0002$$

Παρατηρούμε ότι η λύση $x = y = 1$ του πρώτου συστήματος διαφέρει κατά πολύ από τη λύση $x = 10$, $y = -2$, του δεύτερου. Τα δύο συστήματα είναι άρα **ασταθή**. Η ορίζουσα του πίνακα του πρώτου συστήματος είναι 1 και του δεύτερου -1 .

Θεωρούμε γενικά ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$

$$(1) \quad Ax = b,$$

και υποθέτουμε ότι σύστημα είναι ομαλό. Αν διαταράξουμε κατά λίγο τα δεδομένα A και b , παίρνουμε το σύστημα

$$(2) \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

όπου επίσης υποθέτουμε ότι ο πίνακας $A + \Delta A$ είναι ομαλός (αυτό ισχύει αν τα στοιχεί του πίνακα ΔA είναι αρκετά μικρά, άσκηση).

Ορισμός. Έστω A ένας ομαλός $n \times n$ πίνακας και $\|\cdot\|$ μια φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται από μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbf{R}^n$. Ο αριθμός

$$\mu = \mu(A) := \|A\| \|A^{-1}\|,$$

καλείται **δείκτης κατάστασης** του πίνακα A .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετίζει το δείκτη κατάστασης με την *ευστάθεια* ενός γραμμικού συστήματος.

Θεώρημα 6. Έστω $Ax = b$ ένα γραμμικό σύστημα όπως πιο πάνω και $\|\cdot\|$ μια φυσική νόρμα πίνακα. Αν

$$(3) \quad \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\mu},$$

και $b \neq 0$, τότε ισχύει η ανισότητα σχετικών σφαλμάτων

$$(4) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Απόδειξη. Από τις (1) και (2), έχουμε

$$A\Delta x + \Delta A(x + \Delta x) = \Delta b,$$

$$\Delta x = A^{-1}(-\Delta A)(x + \Delta x) + A^{-1}\Delta b,$$

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\| + \|A^{-1}\| \|\Delta b\|,$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \frac{\|x + \Delta x\|}{\|x\|} + \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \|\Delta b\|}{\|A\| \|x\|}, \quad (\text{αφού } A \neq O, b \neq 0, x \neq 0)$$

$$\leq \mu \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \frac{\|x + \Delta x\|}{\|x\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right), \quad (\text{αφού } \|A\| \|x\| \geq \|Ax\| = \|b\|),$$

$$\leq \mu \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \left(1 + \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right) + \mu \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right), \quad (\text{αφού } \|x + \Delta x\| \leq \|x\| \|\Delta x\|),$$

και η (4) προκύπτει τότε από την (3).

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης κατάστασης είναι πάντα ≥ 1

$$\mu = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1.$$

Το Θεώρημα 6 δείχνει ότι, αν ο δείκτης μ δεν είναι πολύ μεγάλος και το σχετικό σφάλμα $\|\Delta A\|/\|A\|$ είναι αρκετά μικρό, τότε το σύστημα $Ax = b$ είναι ευσταθές. Δεν μας πληροφορεί όμως για το τι συμβαίνει αν ο δείκτης είναι μεγάλος. Συνήθως όμως το σύστημα είναι τότε ασταθές. Ένα σύστημα λέγεται **καλής κατάστασης** αν το μ δεν είναι πολύ μεγαλύτερο του 1, αλλιώς λέγεται **κακής κατάστασης**.

Θεώρημα 7. Αν ο πίνακας A είναι ομαλός, τότε

$$\mu(A) = \frac{\max_{\|u\|=1} \|Au\|}{\min_{\|u\|=1} \|Au\|}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|A^{-1}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|},$$

και θέτοντας $y = A^{-1}x$,

$$\|A^{-1}\| = \max_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \max_{y \neq 0} \frac{1}{\left\|A \frac{y}{\|y\|}\right\|} = \max_{\|u\|=1} \frac{1}{\|Au\|} = \frac{1}{\min_{\|u\|=1} \|Au\|},$$

και το θεώρημα έπεται.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.

Θεώρημα 8. Έστω A ένας ομαλός $n \times n$ πίνακας. Τότε

$$\mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{(\max \lambda'_i)^{1/2}}{(\min \lambda'_i)^{1/2}},$$

όπου $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ οι ιδιοτιμές του $A^T A$, γενικά. Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε

$$\mu_2(A) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|},$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A .

Παράδειγμα. Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα, με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, του ασταθούς πρώτου γραμμικού συστήματος του πιο πάνω παραδείγματος είναι

$$\mu_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 1200120004 \gg 1.$$

Σημειωτέον ότι ένας πίνακας με μικρό δείκτη κατάστασης δεν έχει απαραίτητως μικρή ορίζουσα (εδώ είναι 1).