

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την προσεγγιστική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων. Γενικά, μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, όπου η f δεν είναι γραμμική, δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς (για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι, για $n > 4$, οι ρίζες ενός πολωνύμου βαθμού n δεν μπορούν να υπολογιστούν με στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις). Μάλιστα, και όταν ακόμα η λύση δίνεται “σε κλειστή μορφή” ενός τύπου, ο τύπος αυτός απαιτεί συχνά πολύ περισσότερο χρόνο για τον υπολογισμό του από τις αριθμητικές μεθόδους.

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι που θα μελετήσουμε είναι συνήθως επαναληπτικές της μορφής $x_k = g(x_{k-1})$, όπου η ακολουθία (x_k) συγκλίνει, με κατάλληλες υποθέσεις σε μια λύση της εξίσωσης $f(x)=0$. Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται βέβαια από τις ιδιότητες της συνάρτησης f και από τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε. Συχνά, είναι καλή πρακτική να αρχίζουμε τις επαναλήψεις με μια (συνήθως αργή) μέθοδο που “εντοπίζει” περίπου μια λύση (π.χ. τη μέθοδο της Διχοτόμησης) και μετά να συνεχίζουμε με μια ταχύτερη μέθοδο (π.χ. τη μέθοδο Newton-Raphson) για μεγαλύτερη ακρίβεια.

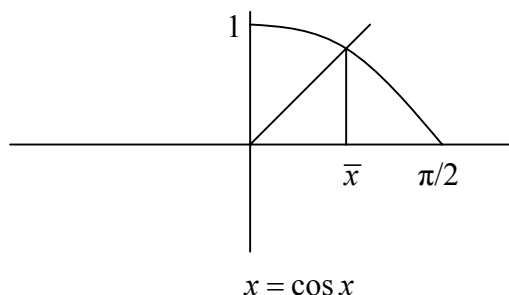
Μη γραμμικές εξισώσεις και συστήματα προκύπτουν, σαν υποπροβλήματα, κατά την επίλυση μη γραμμικών συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, καθώς και σε προβλήματα βελτιστοποίησης, βέλτιστου ελέγχου και μοντελοποίησης.

1. ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

A. ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΡΙΖΩΝ

Έστω μια μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση της μορφής $f(x)=0$.

Συνήθως, πριν εφαρμόσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο επίλυσης μιας τέτοιας εξίσωσης, είναι χρήσιμο να βρούμε μια περιοχή που περιέχει μια λύση, δηλ. μια ρίζα της f . Αυτό μπορεί να γίνει π.χ. γραφικά θεωρώντας το γράφημα της f , ή τα γραφήματα των f_1 και f_2 , αν η εξίσωση δίνεται στη μορφή $f_1(x) = f_2(x)$.



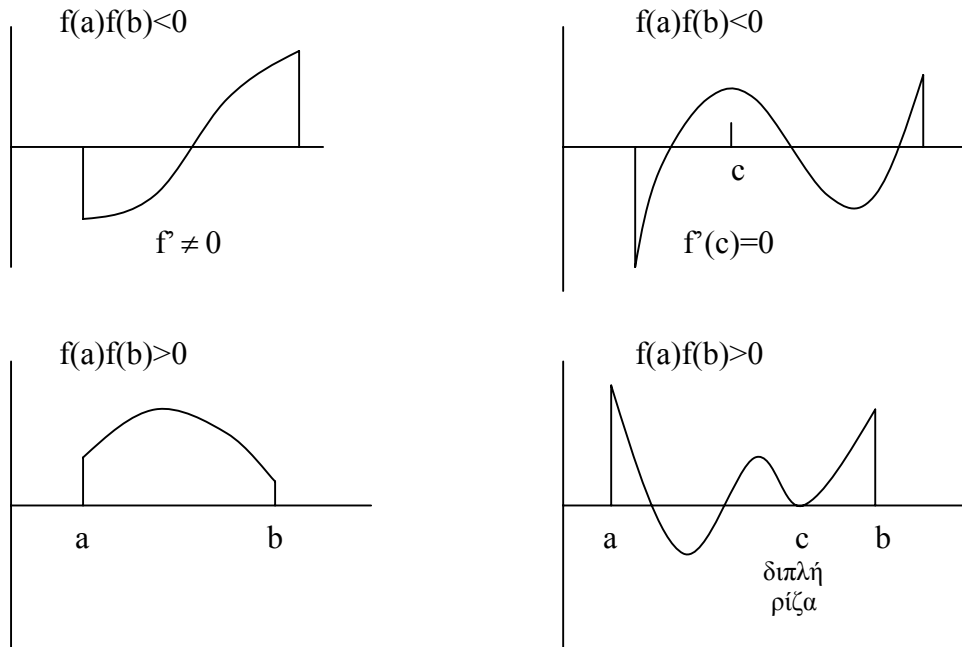
Σχήμα 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$.

- Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε η f έχει μονό αριθμό ≥ 1 ή άπειρο αριθμό ριζών στο $[a, b]$.

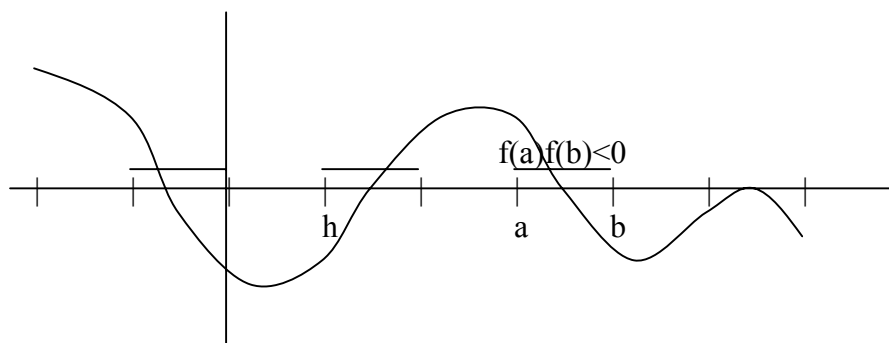
Αν, επιπλέον, $f'(x) \neq 0$ στο $[a, b]$, τότε η f έχει μια μοναδική ρίζα στο $[a, b]$.

- Αν $f(a)f(b) > 0$, τότε η f είτε δεν έχει καμία ρίζα στο $[a, b]$, είτε έχει ζυγό ή άπειρο αριθμό ριζών στο $[a, b]$.



Σχήμα 2

Ένας εύκολος τρόπος εύρεσης διαστημάτων $[a, b]$ με $f(a)f(b) \leq 0$ είναι να υπολογίσουμε τις τιμές της f σε σημεία $x_i = \pm ih$ (σάρωση), με βήμα h σχετικά μικρό, και να εξετάσουμε τα πρόσημα της f στα άκρα των υποδιαστημάτων (βλ. Σχήμα 3). Για να υπολογίσουμε μια ρίζα σε ένα τέτοιο διάστημα, μπορούμε μετά να εφαρμόσουμε μια από τις μεθόδους διχοτόμησης που περιγράφονται παρακάτω.



Σχήμα 3

Οι δε επαναληπτικές μέθοδοι που περιγράφονται στο κεφάλαιο αυτό συγκλίνουν συνήθως αν το αρχικό σημείο επιλεγεί αρκετά κοντά σε μια ρίζα της f . Για την εύρεση τέτοιων αρχικών σημείων, υπολογίζουμε πρώτα τις τιμές της f σε σημεία

$x_i = \pm ih$ και επιλέγουμε σαν αρχικά τα σημεία x_i που ικανοποιούν $|f(x_i)| \leq \varepsilon$, για ε σχετικά μικρό δεδομένο. Εφαρμόζουμε μετά την επαναληπτική μέθοδο για κάθε τέτοιο αρχικό σημείο. Υπολογίζουμε έτσι όσο το δυνατό περισσότερες ρίζες της f .

B. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$, τέτοια ώστε $f(a)f(b) \leq 0$. Θεωρούμε την εξίσωση, για $x \in [a, b]$

$$f(x) = 0.$$

Το Θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει τότε την ύπαρξη μιας τουλάχιστο λύσης της εξίσωσης αυτής, δηλαδή μιας ρίζας της f στο $[a, b]$. Η **μέθοδος της Διχοτόμησης** χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας προσέγγισης μιας τέτοιας ρίζας. Στη μέθοδο αυτή, κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαστημάτων $([a_k, b_k])$ και μια ακολουθία σημείων (x_k) με τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά, θέτουμε

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Αν $f(a_0)f(x_0) \leq 0$, τότε θέτουμε

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = x_0.$$

Αλλιώς, ισχύει αναγκαστικά $f(x_0)f(b_0) \leq 0$, οπότε θέτουμε

$$a_1 = x_0, \quad b_1 = b_0.$$

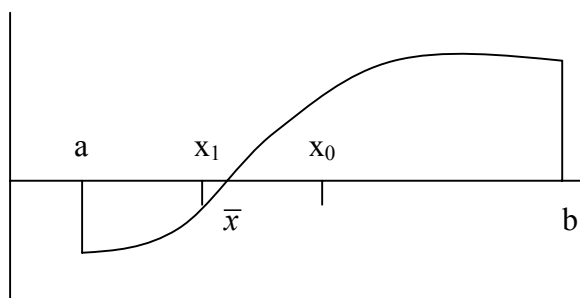
Μετά θέτουμε

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία στο νέο διάστημα $[a_1, b_1]$ κ.ο.κ.

Γενικά, για κάθε $k = 0, 1, \dots$, έχουμε

$$f(a_k)f(b_k) \leq 0 \quad \text{και} \quad x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$



Σχήμα 4

Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύεται η *σύγκλιση* της μεθόδου της Διχοτόμησης και ταυτόχρονα η *ύπαρξη* μιας λύσης της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a, b]$ (δηλ. δίνεται μια *εναλλακτική κατασκευαστική απόδειξη* του Θεωρήματος Bolzano).

Θεώρημα 1. Η ακολουθία (x_k) που κατασκευάζεται με τη μέθοδο της διχοτόμησης συγκλίνει σε μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[a, b]$ όταν $k \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Η ακολουθία (a_k) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το b , η δε ακολουθία (b_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το a , και $a_k < b_k$. Επομένως, οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν, $a_k \rightarrow \bar{a}$, $b_k \rightarrow \bar{b}$, και έχουμε αναγκαστικά

$$a \leq a_k \leq \bar{a} \leq \bar{b} \leq b_k \leq b.$$

Επειδή όμως

$$0 \leq \bar{b} - \bar{a} \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0,$$

και

$$a_k < x_k < b_k,$$

συμπεραίνουμε ότι $\bar{x} := \bar{a} = \bar{b} \in [a, b]$ και ότι οι τρεις ακολουθίες (a_k) , (b_k) και (x_k) συγκλίνουν στο ίδιο όριο $\bar{x}$. Εξάλλου, από την επιλογή του κάθε διαστήματος $[a_k, b_k]$, έχουμε

$$f(a_k)f(b_k) \leq 0,$$

και παίρνοντας το όριο, βρίσκουμε, αφού η f είναι συνεχής

$$0 \leq f(\bar{x})^2 \leq 0,$$

δηλαδή

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Εκτίμηση Σφάλματος.

Έχουμε την εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης

$$|x_k - \bar{x}| = \left| \frac{a_k + b_k}{2} - \bar{x} \right| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} := e_k.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(x_k)$	e_k
0	1(-)	1.5(+)	2(+)	0.875	0.5
1	1(-)	1.25(-)	1.5(+)	-0.297	0.25
2	1.25(-)	1.375(+)	1.5(+)	0.225	0.125
3	1.25(-)	1.3125(-)	1.375(+)	-0.051	0.0625
4	1.3125(-)	1.34375(+)	1.375(+)	0.083	0.03125
5	1.3125(-)	1.328125(+)	1.34375(+)	0.015	0.015625
.....					
10		1.324707		-0.0000466	0.000488
.....					
20		1.324718		0.0000002	0.0000005

(Σε παρένθεση δίνεται το πρόσημο της αντίστοιχης τιμής της f στο σημείο).

Πίνακας 1

Παράδειγμα 1. Έστω η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, και $a = 1$, $b = 2$. Έχουμε $f(1) = -1$ και $f(2) = +5$, άρα ισχύει εδώ $f(1)f(2) < 0$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διχοτόμησης, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.

Η σύγκλιση της μεθόδου της διχοτόμησης είναι *αργή* συγκριτικά με άλλες ταχύτερες μεθόδους (π.χ. Newton-Raphson και Τέμνουσας), τις οποίες και θα μελετήσουμε αργότερα. Η μέθοδος όμως έχει το πλεονέκτημα να “εντοπίζει” μια ρίζα, δηλαδή να βρίσκει ένα μικρό διάστημα που περιέχει τη ρίζα αυτή, και γι’ αυτό το λόγο χρησιμοποιείται σαν αρχική μέθοδο για την εύρεση μιας πρώτης προσέγγισης μιας ρίζας.

Δίνεται παρακάτω ο *αλγόριθμος* της μεθόδου της διχοτόμησης. Γενικά, ένας αλγόριθμος αποτελείται από το σύνολο των λογικών ή/και αριθμητικών πράξεων μιας μεθόδου, δομημένο έτσι ώστε ο αλγόριθμος να μπορεί εύκολα να μεταφραστεί σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού για Υπολογιστή (π.χ. MATLAB, FORTRAN, PASCAL, BASIC, C, κλπ.). Στην αλγοριθμική γλώσσα, όταν γράφουμε $x = e$, εννοείται ότι η υπολογισμένη τιμή της έκφρασης e *εκχωρείται* στο x .

Αλγόριθμος.

Ορίζουμε τη συνάρτηση f

Διαβάζουμε τα n (αριθμός ασφαλείας), ε , a , b

$$f_a = f(a)$$

$$f_b = f(b)$$

Αν $f_a f_b > 0$, σταματάμε

$$e = (b - a) / 2$$

Για $k = 0, \dots, n$ εκτελούμε μέχρι το 1

$$x = a + e$$

$$f_x = f(x)$$

Εκτυπώνουμε τα k , a , b , x , f_x , e

$$p = f_a f_x$$

Αν $p > 0$, πηγαίνουμε στο 2

$$b = x$$

$$f_b = f_x$$

Πηγαίνουμε στο 3

2 $a = x$

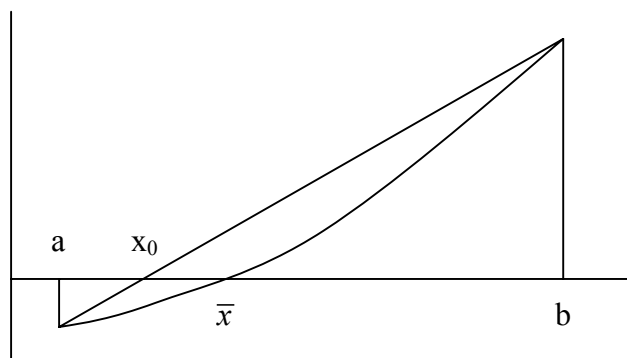
$$f_a = f_x$$

3 Αν $e \leq \varepsilon$, σταματάμε

1 $e = e / 2$

Εκτυπώνουμε “Όριο επαναλήψεων” και σταματάμε

Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΣΦΑΛΜΕΝΗΣ ΘΕΣΗΣ (REGULA FALSI)



Σχήμα 5

Τέλος, αναφέρουμε εδώ τη μέθοδο της **Εσφαλμένης Θέσης**, ή Regula Falsi, η οποία αποτελεί μια παραλλαγή της μεθόδου της διχοτόμησης όπου, αντί του μέσου του κάθε επιλεγμένου υποδιαστήματος, επιλέγουμε σε κάθε επανάληψη το σημείο (βλ. Σχήμα 5)

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}.$$