

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η απ' ευθείας επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 100 εξισώσεων με 100 αγνώστους με τους γνωστούς από την Άλγεβρα τύπους Cramer με ορίζουσες απαιτεί υπολογιστικό χρόνο περισσότερο από 10^{140} αιώνες σε ένα μεγάλο σύγχρονο Υπολογιστή, ο οποίος, σημειωτέον, εκτελεί 10^9 πράξεις ανά δευτερόλεπτο. Χρησιμοποιώντας τώρα την αριθμητική μέθοδο απαλοιφής Gauss που περιγράφεται στην §2, το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με τον ίδιο Υπολογιστή σε λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο!

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε διάφορες αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση γραμμικών συστημάτων της μορφής $Ax = b$. Διακρίνονται δύο κατηγορίες τέτοιων μεθόδων, οι άμεσες και οι έμμεσες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι απαλοιφής (π.χ. τύπου Gauss) και παραγοντοποίησης (π.χ. LU, Choleski), και στη δεύτερη οι επαναληπτικές μέθοδοι (π.χ. Jacobi, Gauss-Seidel).

Εκτός από την ταχύτητα επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος στον Υπολογιστή, ένα σημαντικό πρόβλημα που τίθεται είναι η “ευστάθεια” ή “κατάσταση” του συστήματος, δηλαδή η αξιοπιστία της αριθμητικής λύσης. Αναπτύσσουμε λοιπόν εδώ τη σχετική θεωρία ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος.

Παραδείγματα προβλημάτων που ανάγονται στην επίλυση ενός ή περισσότερων γραμμικών συστημάτων είναι οι συνθήκες και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι πολυωνυμικές και άλλες προσεγγίσεις συναρτήσεων, η εκτίμηση παραμέτρων με τα ελάχιστα τετράγωνα, τα προβλήματα βελτιστοποίησης και βέλτιστου ελέγχου κ.ά. Ακόμα και τα μη γραμμικά συστήματα, και άλλα μη γραμμικά προβλήματα, ανάγονται στην επίλυση μιας ακολουθίας γραμμικών συστημάτων.

Ένα άλλο γραμμικό πρόβλημα που θα μελετήσουμε εδώ είναι ο αριθμητικός υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα παίζουν μεγάλο ρόλο σε πολλούς κλάδους της Επιστήμης και της Τεχνολογίας (π.χ. προβλήματα συντονισμού).

Η τελευταία παράγραφος του κεφαλαίου αποτελεί μια εισαγωγή στις μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων (μέθοδοι σταθερού σημείου, Newton-Raphson και Quasi-Newton).

1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΓΕΝΙΚΑ

Έστω ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

όπου τα a_{ij} καλούνται **συντελεστές** του συστήματος, τα b_i **δεύτερα μέλη** και τα x_j **άγνωστοι**. Γράφουμε το σύστημα αυτό στη μορφή

$$Ax = b,$$

όπου A ο πίνακας του συστήματος, b το διάνυσμα δεύτερο μέλος και x το άγνωστο διάνυσμα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε επίσης το χρήσιμο για τους υπολογισμούς **επαυξημένο πίνακα** του συστήματος

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Ένα διάνυσμα x τέτοιο ώστε $Ax = b$ καλείται **λύση** του συστήματος. Από την Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα $Ax = b$ είναι είτε **ομαλό** (δηλ. έχει μια μοναδική λύση), είτε **αόριστο** (έχει άπειρο πλήθος λύσεων), είτε **αδύνατο** (δεν έχει λύση). Υπενθυμίζεται το ακόλουθο βασικό θεώρημα της Άλγεβρας.

Θεώρημα 1. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (α) Η ορίζουσα $|A|$ του A δεν μηδενίζεται,
- (β) Το σύστημα $Ax = b$ έχει μια μοναδική λύση για κάθε διάνυσμα b ,
- (γ) Το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει τη μοναδική λύση $x = 0$,
- (δ) Ο πίνακας A έχει αντίστροφο A^{-1} ,
- (ε) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες,
- (η) Οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Αν ισχύουν οι παραπάνω προτάσεις, τότε ο πίνακας A λέγεται **ομαλός** και η λύση x του ομαλού γραμμικού συστήματος $Ax = b$ δίνεται από $x = A^{-1}b$ και οι συντεταγμένες του x από τους **τύπους Cramer**

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} \dots & b_1 \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots & b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^j, \quad \text{για } j = 1, \dots, n.$$

Υπενθυμίζεται ότι, σε ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, αν πολλαπλασιάσουμε μια εξίσωση με μια σταθερά $c \neq 0$, ή αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης σε μια άλλη, ή αν ανταλλάξουμε δύο εξισώσεις, τότε το προκύπτον σύστημα $A'x = b'$ είναι **ισοδύναμο**, δηλ. έχει το ίδιο σύνολο λύσεων, με το αρχικό.