① Εφόσον οι y_1, y_2 ικανοποιούν την σχέση

$$y_1^2+y_2^2=1$$

Θα είναι:

$$y_1(x)=\cos(ax+\varphi)$$
$$y_2(x)=\sin(ax+\varphi)$$

εκτός των περιπτώσεων:

- $y_1(x)=\pm 1 \rightarrow y_2=0$

Από την (*) θα είναι $q(x)=0$ και θα ισχύει για κάθε $p(x)$.

- $y_2(x)=\pm 1 \rightarrow y_1=0$

Πάλι, θα είναι $q(x)=0$ και η (*) θα ισχύει για κάθε $p(x)$.

$$y_1'=-a\sin(ax+\varphi) \qquad y_2'=a\cos(ax+\varphi)$$

$$y_1''=-a^2\cos(ax+\varphi) \qquad y_2''=-a^2\sin(ax+\varphi)$$

Η y_1 θα επαληθεύει την (*):

(1) $-a^2\cos(ax+\varphi)-p(x)a\sin(ax+\varphi)+q(x)\cos(ax+\varphi)=0$

Η y_2 θα επαληθεύει την (*):

$$-a^2\sin(ax+\varphi)+p(x)a\cos(ax+\varphi)+q(x)\sin(ax+\varphi)=0 \rightarrow$$

$$q(x)\sin(ax+\varphi)=a^2\sin(ax+\varphi)-p(x)\cdot a\cos(ax+\varphi)$$

(1) $\rightarrow$ $-a^2\cos(ax+\varphi)-p(x)a\sin(ax+\varphi)+(a^2-ap(x)\cot(ax+\varphi))\sin(ax+\varphi)=0$

(με $\sin(ax+\varphi)\neq 0$, αν $\sin(ax+\varphi)=0 \to y_2=0$)

$$-a^2\cos(ax+\varphi)-p(x)\,a\sin(ax+\varphi)+a^2\sin(ax+\varphi)$$
$$-a\,p(x)\cos(ax+\varphi)=0 \to$$

$$p(x)\,a\,(\sin(ax+\varphi)+\cos(ax+\varphi)) = a^2(\sin(ax+\varphi)-\cos(ax+\varphi)) \to$$

$$p(x) = \frac{a\,(\sin(ax+\varphi)-\cos(ax+\varphi))}{\sin(ax+\varphi)+\cos(ax+\varphi)}$$

$$q(x) = a^2 - a^2\cot(ax+\varphi)\,\frac{\sin(ax+\varphi)-\cos(ax+\varphi)}{\sin(ax+\varphi)+\cos(ax+\varphi)}$$

Η γενική λύση της (*) θα είναι:

$$y = c_1\cos(ax+\varphi)+c_2\sin(ax+\varphi)$$