

ΙΩΑΝΝΗ Π. ΚΡΟΚΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Συνοπτική Θεωρία – Μεθοδολογία – Λυμένα Θέματα Εξετάσεων

Περιέχει :

- ◆ Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης
- ◆ Θεώρημα ύπαρξης
- ◆ Γραμμικές Δ.Ε. 2^{ης} τάξης και ανώτερης
- ◆ Γραμμικά διαφορικά συστήματα
- ◆ Μετασχηματισμός Laplace
- ◆ Λύση Δ.Ε. με χρήση σειρών
- ◆ Ευστάθεια αυτόνομων συστημάτων
- ◆ Προβλήματα ιδιοτιμών

Απευθύνεται σε :

- ✓ Φοιτητές Α.Τ.Ε.Ι. – Α.Ε.Ι. – Ε.Α.Π. – Ε.Μ.Π.
- ✓ Υποψήφιους κατατακτηρίων εξετάσεων



ΑΘΗΝΑ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	σελ.
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	15
1.1 Δ.Ε. που ανάγονται σε χωριζομένων μεταβλητών	17
1.1.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών	17
1.1.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	18
1.1.3 Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς	20
1.2 Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε γραμμικές Δ.Ε. 1ης τάξης	22
1.2.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης	22
1.2.2 Διαφορική εξίσωση Bernoulli	27
1.2.3 Διαφορική εξίσωση Riccati	28
1.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις και αναγόμενες σε πλήρεις	32
1.3.1 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις	32
1.3.2 Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις Ολοκληρώνων παράγων ή πολλαπλασιαστής Euler	34
1.4 Διαφορικές εξισώσεις Lagrange και Clairaut	39
1.4.1 Διαφορική εξίσωση Lagrange	39
1.4.2 Διαφορική εξίσωση Clairaut	42
1.5 Ολοκληρωτικές εξισώσεις	46
1.6 Τεχνάσματα για τη λύση διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης	47
1.6.1 Το τέχνασμα του μετασχηματισμού στις πολικές συντεταγμένες	47
1.6.2 Το τέχνασμα της εναλλαγής του ρόλου των x και y	49
1.6.3 Το τέχνασμα της αντικατάστασης	50
1.7 Γεωμετρικές εφαρμογές	53
1.7.1 Ισογώνιες τροχιές	53
1.7.2 Λύση γεωμετρικών προβλημάτων	56
Λυμένα θέματα	60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρήματα ύπαρξης

81

Λυμένα θέματα

85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

3.1 Γενικά περί γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης 89

3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με
σταθερούς συντελεστές 95

3.2.1 Εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς Δ.Ε. 2ης τάξης 95

3.2.2 Εύρεση μερικής λύσης γραμμικής Δ.Ε. 2ης τάξης 97

3.3 Η γενική γραμμική Δ.Ε. 2ης τάξης 107

3.3.1 Εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς Δ.Ε. 2ης τάξης 107

3.3.2 Εύρεση της μερικής λύσης της γραμμικής Δ.Ε. 2ης τάξης 109

3.4 Μετασχηματισμοί - Διαφορική εξίσωση Euler 112

3.4.1 Μετασχηματισμοί 112

3.4.2 Διαφορική εξίσωση του Euler 113

3.5 Γραμμικές Δ.Ε. τάξης ανώτερης του 2 116

3.5.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς
συντελεστές τάξης ανώτερης του 2 116

3.5.2 Η γενική διαφορική εξίσωση του Euler 121

Λυμένα θέματα 124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

4.1 Γενικά	147
4.1.1 Ισοδυναμία διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων	148
4.2 Η μέθοδος της απαλοιφής	149
4.3 Λύση συστημάτων με χρήση πινάκων Μέθοδος των χαρακτηριστικών μεγεθών	153
4.4 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα	162
4.5 Ο πίνακας e^{At}	165
4.6 Λύση γραμμικών συστημάτων με χρήση του πίνακα e^{At}	168
Λυμένα θέματα	171

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μετασχηματισμός Laplace

5.1 Μετασχηματισμός Laplace	183
5.1.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace	183
5.1.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace	185
5.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός του Laplace	191
5.2.1 Ιδιότητες του αντίστροφου Laplace, L^{-1}	191
5.2.2 Μεθοδεύσεις για την εύρεση του $L^{-1}\{F(s)\}(t)$	193
5.3 Βηματική - Κρουστική συνάρτηση	198
5.3.1 Βηματική συνάρτηση (Heaviside)	198
5.3.2 Κρουστική συνάρτηση (Dirac)	200
5.4 Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace	203
5.4.1 Λύση Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές	203
5.4.2 Λύση γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές	205
5.4.3 Λύση γραμμικών Δ.Ε. με συντελεστές πολυωνυμικής μορφής	206
5.4.4 Λύση Δ.Ε. που περιέχουν την βηματική ή την κρουστική συνάρτηση	208
5.4.5 Λύση ολοκληρωτικών εξισώσεων	209
Λυμένα θέματα	211

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Λύση διαφορικών εξισώσεων με σειρές

6.1 Γενικά	227
6.1.1 Ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς	228
6.1.2 Αναπτύγματα βασικών συναρτήσεων	228
6.1.3 Ομαλά και ανώμαλα σημεία διαφορικής εξίσωσης	229
6.2 Λύση Δ.Ε. με σειρές σε ομαλό σημείο	231
6.3 Λύση Δ.Ε. σε κανονικό ανώμαλο σημείο Μέθοδος Frobenius	237
Λυμένα θέματα	244

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ευστάθεια αυτόνομων συστημάτων

	255
Λυμένα θέματα	262

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Προβλήματα ιδιοτιμών

	267
Λυμένα θέματα	270

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράγωγοι βασικών σύνθετων συναρτήσεων	275
Ολοκληρώματα	276
Γενικευμένα ολοκληρώματα	282

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE